MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 7/1973

Partielle Differentialgleichungen
25.2. bis 3.3.1973

Die diesjährige Tagung über partielle Differentialgleichungen stand unter der Leitung von E. Heinz (Göttingen) und G. Hellwig (Aachen). Leider war Herr Hellwig wegen eines Trauerfalles verhindert, an der Tagung teilzunehmen. Zu Beginn der Tagung dankte Herr Heinz Herrn Hellwig, der die Tagung im wesentlichen vorbereitet hatte, sowie Herrn Haack(Berlin) für seine an allen früheren Tagungen geleistete Arbeit. Herr Heinz hob insbesondere hervor, daß es den Bemühungen von Herrn Haack und Herrn Hellwig wesentlich zu danken ist, daß die Tagung über partielle Differentialgleichungen zum festen Bestandteil des Oberwolfacher Tagungsprogramms geworden ist.

Trotz der durch den Neubau bedingten Einschränkung des Raumes konnten insbesondere viele Gäste aus dem Ausland begrüßt werden. Die Betreuung durch das Institut war wie immer vorbildlich.

Der Mittwochvormittag war

Richard Courant
in memoriam

gewidmet. Zuerst sprach S. Hildebrandt (Bonn) über ein Thema, dem stets das besondere Interesse Courants gegolten hat, der Regularität von Variationsproblemen mit Hindernissen (insbesondere Minimalflächen). Dann hatten sich dankenswerterweise K.O. Friedrichs und F. John (beide New York) bereit erklärt, über das Leben und Werk von Richard Courant zu berichten. Zwei der engsten Mitarbeiter vermittelten mit der Schilderung ihrer Erinnerungen ein lebendiges Bild der Persönlichkeit und des Werkes des großen Mathematikers. Diese sehr persönlichen Vorträge werden den Zuschauern im Gedächtnis bleiben. Eine Filmvorführung am Donnerstag abend über das Wirken von Courant in Göttingen und New York ergänzte diese Gedächtnisveranstaltung.

Teilnehmer

H.W. Alt, Münster
G. Andersson, Lund
N. Bazley, Köln
R. Böhme, Göttingen
F.J. Bureau, Liege
C.R. De Prima, Pasadena
J. Dufner, Freiburg
M.S.P. Eastham, London
W. Faris, Genf
G. Fichera, Rom
J. Frehse, Heidelberg
K.O. Friedrichs, New York
Ch. Fulton, Aachen
L. Gårding, Lund
C. Gerhardt, Bonn
M. Giertz, Stockholm
H. Grabmüller, Darmstadt
W. Haack, Berlin
K. Habetha, Dortmund
E. Heinz Göttingen
P. Hess, Zürich
S. Hildebrandt, Bonn
E. Hölder, Mainz
L. Hörmander, Lund
J. Jaenicke, Braunschweig
F. John, New York
H. Kalf, Aachen
H. Kielhöfer, Bochum/Stuttgart
H. Leinfelder, München
R. Leis, Bonn
I.S. Louhivaara, Jyväskylä
E. Meister, Tübingen
J.C.C. Nitsche, Minneapolis
H. Pachale, Berlin
D. Pascali, Bukarest
M. Reichert, Frankfurt
C.G. Simader, München
L. Svensson, Lund
P. Szilágyi, Cluj, z.Z. Kiel
F. Tomi, Münster
N.S. Trudinger, Brisbane (Australien)
K. Veselić, Zagreb, z.Z. Frankfurt
W. von Wahl, Bonn
J. Walter, Aachen
W. Walter, Karlsruhe
S. Weber, Mainz
J. Weidmann, Frankfurt
W. Wendland, Darmstadt
H.C. Wente, z.Z. Bonn
P. Werner, Stuttgart
K. Widmann, Linköping
E. Wienholtz, München
R. Wüst, Aachen

Vortragsauszüge

N. BAZLEY: Bifurcation at infinity and singlar eigenvalue problems

Non linear eigenvalue problems of the form $A(u) = \lambda u$ are considered, where the operator $A(u)$ is singular for small values of $\|u\|$. In order to avoid the singularity, a bifurcation analysis is made for large values of $\|u\|$ and the pointwise positive solution is extended back to the origin. The procedure is illustrated by a specific example.

R. BÖHME: Einige Eigenschaften der Lösungsmenge des Plateauproblems

Satz 1: Ist γ eine reguläre Jordankurve der Klasse C^∞ im R^3 und bezeichnet $M(\gamma)$ die Menge der Minimalflächen, die γ als Randkurve haben und γ monoton parametrisieren, so ist die Menge der Flächeninhalte $A[M(\gamma)]$ dieser Flächen eine kompakte Lebesgue-Nullmenge in R.

Satz 2: Nehmen wir zusätzlich an, daß γ reellanalytisch ist, so ist $A[M(\gamma)]$ eine endliche Menge in R.

Satz 3: Unter den Voraussetzungen von Satz 2 besteht $M(\gamma)$ nur aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten in $C^o(\bar{B}, R^3)$.

C.R. DEPRIMA: Differential operators and local automorphisms on Banach manifolds

Let M^n be a C^∞ n-dimensional manifold. An (algebraic) automorphism of $C^\infty(M^n,R)$ is local if $\text{supp}(Tf) \subset \text{supp}(f)$. A partial differential operator is an automorphism of $C^\infty(M^n,R)$ given (locally) by $L = \sum a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in C^\infty(M^n,R)$ and $\{\text{supp } a_\alpha\}$ is locally finite. Clearly L is local. In 196o J. Peetre proved the converse. His proof is via distrubution theory. In this talk a proof (given jointly with J.C. Wells) is presented which is independent of distribution theory and in such a manner that it readily applies to the following situation: Let M be a C^∞ manifold modelled on a B^∞-smooth (Wells) Banach space E and let F be a normed linear space. Then an automorphism T of $C^\infty(M,F)$ is local iff T is a differential operator on M in the following sense: $(Tf)(x) = \sum_{j=o}^{\infty} A_j(x)\ (\partial_j f(x))$ (locally) where $\partial_j f(x)$ is the j-th Fréchet derivative of f at x so that $\partial_j f(x) \in L_s^j(E,F)$ - the bounded symmetric j-multilinear maps of E into F. The $A_j \in C^\infty(M,L(L_s^j(E,F),F))$ and $\{\text{supp}A_j\}$ are locally finite.

M.S.P. EASTHAM: Square-integrable solutions of second-order differential equations with an oscillating coefficient

A method is developed for investigating the Weyl limit-circle classification of the equation

$$y''(x) - q(x)y(x) = 0 \quad (0 \leqq x < \infty).$$

A new set of conditions on q(x) is given which makes the equation limit-circle. These conditions allow certain large oscillations of increasing frequency of $q(x)$. This result is in contrast to previous limit-circle criteria, in which the oscillatory nature of $p(x)$ is restricted. As an example it is found that

$$p(x) = x^{\alpha}\{2\sin(x^{\beta}) - 1\}$$

gives the limit-circle case if $\alpha > 2$ and $\beta > \frac{7}{8}\alpha + \frac{5}{4}$ and the limit-point case for all α if $\beta \leqq 2$.

W. FARIS: Commutators and essential self-adjointness of Hamiltonian operators

We give sufficient conditions for the essential self-adjointness of Schrödinger and Dirac Hamiltonians. The method is the introduction of an auxiliary operator $N \geqq 0$ whose commutator $i[H,N]$ with the Hamiltonian H is bounded by a multiple of N.

J. FREHSE: Regularitätssätze für Variationsprobleme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen

(i) Betrachtet wird das Problem

(1) $\int_{\Omega}[|\Delta u|^2 - fu]dx = \min!$ mit Randbedingungen und der Ungleichung

$u \geqq \varphi$ als Nebenbedingung, $\Omega \subset R^n$. Problem (1) führt auf die "biharmonische Variationsungleichung". Unter natürlichen Voraussetzungen an die Ausgangsdaten wird gezeigt, daß die Lösung gleichmäßig beschränkte zweite Ableitungen hat. Das Resultat ist von Interesse, weil man bisher nur geringfügige Aussagen zur Frage der Regularität bei Variationsungleichungen höherer Ordnungen kannte.

(ii) Im Fall von 2 unabhängigen Variablen wird gezeigt, daß die Lösungen u von (linearen oder nichtlinearen) elliptischen Systemen von Variationsungleichungen zweiter Ordnung mit der vektoriellen Nebenbedingung $u \geqq \varphi$ hölderstetige erste Ableitungen haben. Bisher war dieses Ergebnis nur im skalaren Fall bekannt gewesen.

K.O. FRIEDRICHS: Erhaltungssätze und hyperbolische Gleichungen

Die meisten grundlegenden und durch Vereinfachung entstandenen Differentialgleichungen der Physik können als ein System von k linear abhängigen Erhaltungsgleichungen für k-1 Unbekannte geschrieben werden. Aus einem solchen System kann man ein symmetrisch hyperbolisches System von k-1 Gleichungen auswählen, wenn noch eine Positivitätsbedingung erfüllt ist.

G. FICHERA: Behaviour of the electric density near the vertices and the edges of a condenser

It was related by Kirchhoff (see Journal of Appl. Physics, vol. 22, number 2, p. 223) that Dirichlet, shortly before his death, solved the problem of the distribution of electricity on a cube. If so, the solution has been lost. The most difficult aspect of this problem consists in describing the kind of singularities which the first derivatives of the potential function have in the vertices and along the edges of the cube. The paper deals with a method which is able to describe this singularities. It applies as well to more general situations concerning the behaviour of the solution of a boundary value problem, for an elliptic equation in R^3, near the singular points of the boundary.

L. GÅRDING: Stability of Petrovsky lacunas

The so-called Petrovsky lacunas for the fundamental solutions of strongly hyperbolic differential operators with constant coefficients remain lacunas under perturbations of the coefficients to smooth functions.

C. GERHARDT: Existenz und Regularität von Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung über Hindernissen

Wir betrachten das Variationsproblem

$$(*) \quad \int_\Omega \sqrt{1+|Dv|^2}\,dx + \int_\Omega \int_0^{v(x)} nH(x,b)\,dt\,dx + \int_{\partial\Omega} |v-f| \, d\mathcal{H}_{n-1} \to \min$$

in der Klasse

$$v \in H^{1,1}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap \{v \geqq \varphi\}$$

Ω sei ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$, $n \geqq 2$, mit C^2-Rand $\partial\Omega$.

Unter gewissen Voraussetzungen an H,f und $\partial\Omega$ zeigen wir, daß das Variationsproblem (*) für jedes Lipschitzhindernis φ mit $\varphi|_{\partial\Omega} \leq f$ genau eine Lipschitzstetige Lösung u besitzt, deren Randwerte mit f übereinstimmen. Nehmen wir darüber hinaus noch $\varphi \in H^{2,\infty}(\Omega)$ und $\varphi|_{\partial\Omega} < f$ an, so folgt sogar $u \in H^{2,\infty}(\Omega)$.

M. GIERTZ: Inequalities and separation for certain partial differential operators

(Report on joint work W.N. Everitt (Dundee)). Let G denote a region in n-dimensional Euclidean space, let $q: G \to (0,\infty)$ be given and let Δ denote the generalised (Sobolev) Laplacian, with domain $D(\Delta)$ contained in $L_{loc}(G)$. We are concerned with differential expressions of the form $M[f] = -\Delta f + qf$ and acting on functions in the set

$$\mathcal{D}_1(q) = \{f: f \in L^2(G) \cap D(\Delta) \text{ and } M[f] \in L^2(G)\}.$$

We shall say that $M[\cdot]$ ist separated in $L^2(G)$ if $qf \in L^2(G)$ $(f \in \mathcal{D}_1(q))$, so that separation of $M[\cdot]$ implies that the two individual terms Δf and qf of $M[f]$ necessarily must be in $L^2(G)$ whenever this is true of f and $M[f]$. In this talk we shall discuss conditions on q which ensure separation, and also establish the existence of inequalities of the form, here A und B are positive numbers,

$$A\|qf\|^2 + B\|\Delta f\| \leq \|M[f]\|^2 \qquad (f \in \mathcal{D}_1(q)).$$

H. GRABMÜLLER: Diskrete Approximation pseudo-parabolischer Differentialgleichungen

Zahlreiche Phänomene der Physik führen auf das Studium eines gemischten Anfangs-Randwertproblems für eine pseudo-parabolische Differentialgleichung folgenden Typs

$$u_t + \eta\Delta u_t = \varkappa\Delta u, \quad t > 0; \; \eta,\varkappa = \text{const.}$$

Hierbei sei Δ der Laplace-Operator. Geht man in einem geeigneten (durch die Randbedingungen festgelegten) Hilbertschen Raum zu dem (dem Operator Δ) zugeordneten minimalen Operator über, so kann das vorgelegte Anfangs-Randwertproblem eingebettet werden in den folgenden allgemeineren Rahmen: Es soll das abstrakte Cauchy-Anfangswertproblem (ACP) für eine Evolutionsgleichung (2. Art)

$$\frac{d}{dt}(Mu)(t) + (Cu)(t) = 0, \quad t > 0$$

gelöst werden, wobei M und C als abgeschlossene zeitunabhängige lineare Operatoren in einem Hilbertschen Raum vorgegeben seien. Für dieses Problem werden hinreichende Bedingungen an M und C aufgestellt, unter denen das ACP korrekt gestellt ist. Die Existenz von Lösungen wird mit Hilfe eines konstruktiven Verfahrens bewiesen, welches für numerische Auswertungen geeignet erscheint. Das Verfahren besteht in der Vorgabe einer Folge von lösbaren Näherungsproblemen

$$\frac{d}{dt}(M_n u)(t) + (C_n u)(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

die gegen das Ausgangsproblem im Sinne der diskreten Konvergenztheorie konvergieren. Insbesondere ergeben sich für den Fall elliptischer Operatoren M und C völlig neue konvergente Näherungsverfahren.

K. HABETHA: Nullstellen elliptischer Systeme erster Ordnung in der Ebene

Für elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene

$$(*) \quad n_x + A \cdot u_y = C \cdot u$$

mit 2n-Vektoren u und entsprechenden quadratischen Matrizen A,C wird das Verhalten an Nullstellen untersucht. Für Hölderstetige Elemente von A und C sind die Nullstellen endlicher Ordnung isoliert und die Komponenten von u mit niedrigster Nullstellenordnung verhalten sich etwa so wie $a(z-z_0)^n$, für die anderen Komponenten kann das Verhalten jedoch recht beliebig sein. Ist A zu einer Diagonalmatrix äquivalent (oder gibt es ein Teilsystem von (*),in dem das der Fall ist), so können keine Nullstellen unendlich hoher Ordnung auftreten. Das ist ganz allgemein der Fall, wenn die Koeffizienten analytisch sind. Für Systeme der Form $w_{\bar{z}} + B \cdot w_z = C \cdot w + D \cdot \bar{w}$ mit komplexen n Vektoren w und unteren Dreiecksmatrizen B,C,D sowie verschwindender Hauptdiagonale in B kann E. Kühn sogar ein Ähnlichkeitsprinzip im Großen zeigen.

P. HESS: Semi-koerzitive nichtlineare Probleme

Ein abstraktes Resultat über variationelle Ungleichungen, von Fichera, Lions und Stampacchia für lineare semi-koerzitive Operatoren in Hilberträumen bewiesen, wird auf die Klasse der semi-koerzitiven pseudo-monotonen Operatoren in Banachräumen erweitert. Gleichzeitig wird eine neue und wesentlich einfachere Beweismethode angegeben. Einige Anwendungen auf unilaterale Randwertprobleme für nichtlineare elliptische Differentialoperatoren werden skizziert.

S. HILDEBRANDT: Über die Regularität der Lösungen von Variationsproblemen mit Hindernissen

Im Anschluß an Arbeiten von Tomi, Hildebrandt und Frehse wird folgendes, in gewisser Weise abschließendes Resultat bewiesen:

Sei $x = x(w) = (x^1(w), x^2(w),\ldots,x^N(w))$, $w = (u,v)$, eine Lösung eines Variationsproblems der Form

$$\iint_\Omega f(w,x,\nabla x)\,du\,dv \to \min \quad \text{für } x \in \mathfrak{C} = C \cap H_2^1(\Omega,K),$$

wobei C eine durch Randbedingungen definierte Klasse bezeichnet und K eine quasireguläre, abgeschlossene Menge des R^N mit $\partial K \in C^3$ ist, $H_2^1(\Omega,K) = \{x \in H_2^1(\Omega, R^N) : x(w) \in K \text{ f.ü. auf } \Omega\}$. Über f werde folgendes vorausgesetzt: $f \in C^2(\Omega \times S \times R^{2N})$, $K \subset S$ = offen.

Für alle $\xi = (w,x,p) \in \Omega \times K \times R^{2N}$ gilt

$$m_o|p|^2 - k \leq f(\xi) \leq m_1|p|^2 + k, \quad m_2|\eta|^2 \leq f_{p^i_\alpha p^j_\beta}(\xi)\eta^i_\alpha\eta^j_\beta \leq m_3\,|\eta|^2,$$

$$|f_x(\xi)| + |f_{wx}(\xi)| + |f_{xx}(\xi)| + |f_p(\xi)|^2 + |f_{pw}(\xi)|^2 + |f_{px}(\xi)|^2$$

$$\leq m_4\,\{1 + |p|^2\} \text{ mit } o < m_o \leq m_1,\ o < m_2 \leq m_3,\ k,\ m_4 \geq o.$$

Behauptung: Dann gilt $x \in C^{1+\mu}(\Omega)$ für ein $\mu > o$.

L. HÖRMANDER: Real analytic solutions of partial differential equations

Necessary and sufficient conditions are given on a differential operator in R^n with constant coefficients and an open convex subset G such that the equation $P(D)u = f$ has a real analytic solution u in G for every such f. The conditions for existence of analytic solutions in a convex compact subset are also given.

H. KIELHÖFER: Über fastlineare parabolische Anfangswertprobleme in unbeschränkten Gebieten

Gesucht ist eine Lösung des parabolischen Anfangswertproblems

(1) $u_t + Au = f(x,u,D_1,u\ldots,D_{m-1}u)$, $u(o) = u_o$, $u(t) \in D(A)$,

wobei A ein linearer (elliptischer) Differentialoperator ist. Das Problem wird als Evolutionsgleichung in $L_p(\Omega)$ $(\Omega \subset R^n)$ formuliert und auf abstrakte Existenzsätze zurückgeführt. Die angewandte Methode geht auf Sobolevskii zurück, der in diesem Zusammenhang den Kalkül mit gebrochenen Potenzen von A eingeführt hat. Bei unbeschränkten Gebieten Ω hat man allerdings nicht mehr die Kompaktheit von A^{-1} zur Verfügung. Man muß diese ersetzen durch eine Abklingbedingung an f für $x \to \infty$.

J.C.C. NITSCHE: Über Ein- und Mehrdeutigkeit beim Plateauschen Problem und einen Verzweigungsfall

Sind die Lösungen des Plateauschen Problems isoliert? Diese schon bei der Tagung im März 1967 aufgeworfene und in einer Arbeit (M.Z. 1o9 (1969), 393-411) behandelte Frage wird wieder aufgenommen. Für die vom Parameter r, $1 < r < \sqrt{3}$, abhängige Kurvenschar

$$\Gamma_r = \{x = r\cos\theta - \frac{r^3}{3}\cos 3\theta,\ y = -r\sin\theta - \frac{r^3}{3}\sin 3\theta,$$

$$z > r^2\cos 2\theta;\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

wird gezeigt, daß die von Γ_r berandete Ennepper'sche Fläche isoliert liegt. Für Werte $r > 1$ nahe bei Eins wird weiterhin gezeigt, daß Γ_r drei verschiedene Lösungen des Plateauschen Problems berandet. Die umfangreichen Rechnungen sowie den Konvergenzbeweis, mit Hilfe dessen die Existenz dieser drei Lösungen sichergestellt wird, können nur angedeutet werden.

D. PASCALI: Some new standpoints for nonlinear equations of evolution

Using T. Kato's result concerning evolution type equations, we gave some extensions of H. Brezis theorems. A special attention is paid to the wave equation with monotone nonlinearities with respect to the first derivative.

C.G. SIMADER: Über hebbare Singularitäten der Lösungen des Dirichletproblems

Sei $G \subset R^n$ offen, beschränkt mit $\partial G \in C^{2m}$ $(m \geq 1)$ und sei $L := \sum_{|s|\leq 2m} a_s(\cdot)D^s$ mit $a_s \in C^{|s|}(\bar{G})$. Weiter sei $S \subset \bar{G}$ kompakt . S heißt hebbar bezüglich L und $M_p := W_o^{m,p}(G) \cap W^{2m,p}(G)$, wenn für jedes $u \in L^{p'}(G)$ mit $(u,L^*\phi)_o = 0$ für alle $\phi \in M_p$ mit $\phi \equiv 0$ in einer Umgebung von S $(1 < p,p' < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ folgt $(u,L^*\varphi)_o = 0$ für alle $\varphi \in M_p$. Hinreichend ist, daß für die verallgemeinerte Kapazität

$$K_{m,p,d}(S) := \inf\Big\{\Big(\|\phi\|^p_{m,p} + \sum_{m<|\alpha|\leq 2m} \int \mathrm{dist}(x,\partial G)^{(|\alpha|-m)p}\,|D^\alpha\phi|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big|$$

$\phi \in C_o^\infty(R^n)$, $\phi \equiv 1$ in Umgebung von $S\}$ gilt: $K_{m,p,d}(S) = 0$. Ist L in G gleichmäßig elliptisch, so ist $K_{m,p,d}(S) = 0$ auch notwendig für die Hebbarheit von S und es folgt $u \in W_o^{m,p'}(G) \cap W^{2m,p'}(G)$ mit $Lu = 0$.

S.L. SVENSSON: Hyperbolic differential operators, principal part and inessential terms

Charakterisierung der linearen hyperbolischen Operatoren mit konstanten Koeffizienten. Eine sukzessive Auflösungsmethode. Ein Beispiel aus der relativistischen Quantenmechanik.
Bezug: Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part. Ark.Mat. 8, 145-162 (197o).

P. SZILÁGYI: Die Eigenwerte des Operators von A.V. Bitzadze

Sei $\Omega \subset R^2$ ein Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$ und $B: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ der Operator von A.V. Bitzadze

$\left(Bu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2i\,\frac{\partial^2 u}{dxdy}\right)$ mit dem Definitionsbereich

$D(B) = \{u \in W_2^2(\Omega) \,|\, u|_{\partial\Omega} = 0\} \subset L_2(\Omega)$. Ich untersuche hier die Eigenwerte des Operators B, den Nullraum $N(B_\lambda)$ ($B_\lambda = B + \lambda I$) und die Lesbarkeit des Problems $Bu + \lambda u = 0$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = f$. In diesen Problemen sind wir zu Folgendem gekommen:

a) Wenn Ω eine Kreisscheibe ist, existiert nur ein einziger Eigenwert $\lambda = 0$ und seine Ordnung ist ∞.

b) Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Giebt. $\lambda \neq 0$ ist genau dann Eigenwert von B, wenn $e^{(\alpha - i\beta) z(w)}$ eine rationale Funktion ist, wobei $z(w)$ die konforme Abbildung des Einheitskreises $|w| < 1$ auf Ω ist und $\alpha + i\beta = 4\sqrt{-\lambda}$. In diesem Fall ist $\dim N(B_\lambda) = \infty$.

c) Das Problem $Bu + \lambda u = 0$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = f$ hat genau dann mind eine Lösung, wenn $f_1(w) = \exp\left(\frac{\alpha - i\beta}{2} z(w) - \frac{\alpha + i\beta}{2} \overline{z(w)}\right) \in L_2^{(1)}$, wobei $L_2^{(1)}$ der Unterraum von $L_2(|w|=1)$ ist, der auf der Basis $\{e^{in\varphi}\}_{n=0}^{\infty}$ konstruiert wird.

F. TOMI: Zur Frage der Isoliertheit der Lösungen des Plateauschen Problems

Eine Fläche f der konstanten mittleren Krümmung H, die von einer Jordankurve berandet wird, heißt isoliert, wenn es keine Folge f_k von Flächen derselben mittleren Krümmung H gibt, die in der C^0-Topologie gegen f konvergiert. U.a. kann folgendes gezeigt werden: Ist f regulär (d.h. eine Immersion), so sind alle Teilflächen von f isoliert, die sich echt, aber hinreichend wenig von f unterscheiden.

N. TRUDINGER: A priori estimates for quasilinear elliptic equations

We present various results and techniques concerning weak solutions of quasilinear, second order differential equations of the form

$$Qu = \operatorname{div} A(x,u,Du) + B(x,u,Du) = 0.$$

Here $x = (x_1,\dots,x_n)$ represents a point in Euclidean n space, E^n; Du is the gradient of the weakly differentiable function u; A and B are respectively measurable, n-vector and scalar functions of their arguments and div denotes divergence with respect to x.

The principal new results considered are outlined in the article: "Generalised solutions of quasilinear, differential inequalities." I. Elliptic operators. Bull.Amer.Math.Soc. 77, 567-58o (1971) and consist of global maximum principles and local pointwise statements concerning solutions, subsolutions or supersolutions. The maximum principle, in particular, when specialized to linear, elliptic equations permits a satisfactory theory of the Dirichlet problem for generalized solutions to be carried out which hitherto had been subject to unnatural restrictions.

W. v. WAHL: Regularität der Lösungen nichtlinearer elliptischer Gleichungen und Systeme

Zunächst wird das Dirichletproblem für quasilineare alliptische Gleichungen

$$a_{ij}(x,u,\nabla u)u_{x_i x_j} = f(x,u,\nabla u)$$

in einem ebenen Gebiet betrachtet. Es wird gezeigt, daß dieses Problem unter den alleinigen Voraussetzungen der gleichmäßigen Elliptizität des Hauptteils, des quadratischen Wachstums von $f(x,u,\nabla u)$ bezüglich ∇u und der Existenz einer Schränke für $\sup|u|$ lösbar ist. Dann wird mit Hilfe einiger Abschätzungen für elliptische Systeme

$$a^l_{ij}(x)u^l_{x_i x_j} = f^l(x,u,\nabla u), \quad 1 \leq l \leq m,$$

in zwei Variablen eine Verbesserung der Nirenbergschen a-priori-Schranken für die Lösungen der nichtlinearen elliptischen Gleichung $F(x,u,\nabla u,D^2u) = 0$ hergeleitet.

In n Dimensionen endlich wird die schwache Lösung eines elliptischen Systems

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u^l}{\partial x_j}\right) = f^l(x,u,\nabla u), \quad 1 \leq l \leq m,$$

behandelt. Es läßt sich zeigen, daß jede schwache Lösung hölderstetig ist, wenn nur die f^l höchstens quadratisch bezüglich ∇u wachsen und im wesentlichen

$$-u^l f^l(x,u,\nabla u)$$

unabhängig von u und ∇u nach oben beschränkt ist.

J. WALTER: Reguläre Eigenwertprobleme mit Eigenwertparameter in den Randbedingungen

Seien, a,b,α_i,β_i $(i=1,2)$ reelle Zahlen mit $a<b$, $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=1$ und p,q,r genügend glatte, reellwertige Funktionen mit $p(x)>0$, $r(x)>0$ für $x\in[a,b]$. Setze $Tu:=\frac{1}{r}\{-(pu')'+qu\}$, $(u)_\alpha:=\lim\limits_{x\to b}(\alpha_1 u(x)-\alpha_2 u'(x))$, $(u)_\beta:=\lim\limits_{x\to b}(\beta_1 u(x)-\beta_2 u'(x))$. Betrachtet wird das Problem

(1) $u(a)=0,\quad Tu=\lambda u,\quad -(u)_\beta=\lambda(u)_\alpha.$

Ein derartiges Problem nennen wir selbstadjungiert, wenn es als Eigenwertproblem eines selbstadjungierten Operators in einem geeigneten Hilbertraum aufgefaßt werden kann. Wir definieren ein positives Maß

$$\mu(M):=\begin{cases}\int\limits_M r\,dx & \text{für } M\subset(a,b)\\ p(b) & \text{für } M=\{b\},\end{cases}$$

sowie in $H:=L^2([a,b],\mu)$ einen Operator A durch

$D(A)=\{v\in H\,|\,v,v'$ absolut stetig in (a,b), $Tv\in L^2((a,b);r)$, $v(a)=0, v(b)=(v)_\alpha\}$,

$$(Av)(x)=\begin{cases}(Tv)(x) & \text{für } x\in(a,b)\\ -(v)_\beta & \text{für } x=b.\end{cases}$$

Man kann zeigen, daß A selbstadjungiert ist, ein total diskretes Spektrum besitzt und daß das Problem (1) als Eigenwertproblem von A aufgefaßt werden kann. Also ist (1) selbstadjungiert in dem oben definierten Sinn.

W. WENDLAND: Randwertaufgaben für elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene

Im Vortrag wurden Fredholmeigenschaft, Index-Berechnung und Lösbarkeitsbedingungen mit elementaren Methoden und Homotopieeigenschaften von Fredholm-Operatoren für elliptische Systeme

$$\sum_{m=1}^{2n} a_m^e(x,y)u_x^m(x,y)+u_y^e=\sum_{m=1}^{2n} c_m^e u^m+f^e,\quad e=1,\dots 2n;$$

(1) $$\sum_{m=1}^{2n} r^j_m (s) u^m \Big|_{\partial \mathfrak{G}} = \Phi^j(s), \quad j=1,\dots,n \quad (\text{Rang } (r^j_m) = n)$$

mit reellen $C^{1+\alpha}$-Koeffizienten dargestellt. Sei $\Lambda^1_e, \dots, \Lambda^n_e(x,y)$ ein System von Haupt- und Eigenvektoren zu den Eigenwerten von (a^e_m) mit positiven Imaginärteilen, $\Lambda_e^{n+j} := \bar{\Lambda}^j_e$ und $M^e_m := (\Lambda_e{}^m)^{-1}$. Dann lautet die Lopatinskii-Shapiro-Bedingung für die Randbedingungen: Die komplexe n x n-Matrix

$$P^j_k(s) := 2 \sum_{e=1}^{2n} r^j_k M^e_k$$

sei überall auf $\partial\mathfrak{G}$ regulär. Ist sie regulär und glatt, so ist der Index ($\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängend)

$$\nu = n - \frac{1}{\pi} \oint_{\partial \mathfrak{G}} d \arg \operatorname{Det} (P^j_k).$$

Alle diese Ergebnisse sind bekannt, sie folgen aus den a-priori-Abschätzungen von Agmon-Douglis-Nirenberg, den Sätzen von Atiyah-Singer-Bott und der C^∞-Theorie nach Hörmander. Im obigen ebenen Spezialfall erhält man starke Vereinfachungen durch eine geeignete Normalform mit Richtungsableitungen, Homotopieeigenschaften von Fredholm-Operatoren und verallgemeinerte analytische Funktionen (Haack, Hellwig, Vekua). B. Bojarski hatte eine (unwesentlich) andere Normalform (nach Douglis) 1966 benutzt, um (1) mit singulären Integralgleichungen zu lösen.

C. WENTE: Surfaces in equilibrium subject to a volume constraint

For γ an oriented, rectifiable Jordan curve in E^3, we denote by $A_o(\gamma)$ the class of parametric surfaces
$x : \bar{B} = \{\langle u,v\rangle \mid u^2 + v^2 \leq 1\} \to E^3$ such that $x|_{\partial B}$ is a representation of γ, $x \in C^0(\bar{B}) \cap C^1(B)$, and $D(x) = \iint_B |\nabla x|^2 du dv < \infty$. Choose x_f a fixed member of $A_o(\gamma)$ and let $A_o(\gamma, K)$ denote those x for which the oriented volume enclosed by x_f and x equals K.

If we suppose the volume enclosed by x_f and x to be filled with an incompressible fluid, then in the absence of gravity the "free" surface x will take on minimum area subject to the volume constraint and will have constant mean curvature. If we include the gravitational force acting on the mass of the fluid, then in general one can no longer expect to minimize the potential energy, but if the surface tension is sufficiently large, one can show the existence of equilibrium surfaces.

Such surfaces will be free of branch points and will satisfy the system
$$\Delta x = 2H(x) \cdot (x_u \wedge x_v),$$
$$4H(x) = \mu p(x) - \lambda\,, \; |x_u| = |x_v|, \quad (x_u \cdot x_v) = 0,$$

where $p(x)$ is the gravitational potential, μ a constant depending on the surface tension and density of the fluid, λ an unspecified constant.

K.O. WIDMAN: Bemerkungen über die Neumannsche Funktion

R. WÜST: Ein Konvergenzsatz für selbstadjungierte Operatoren und ein Spektrallückensatz von Schmincke (zur Anwendung auf Dirac-Operatoren)

Unter geeigneten Monotonievoraussetzungen an eine Schar nicht notwendig halb-beschränkter selbstadjungierter Operatoren existiert ein verallgemeinerter starker Grenzoperator, der selbstadjungiert ist. Für wesentlich selbstadjungierte minimale Dirac-Operatoren T mit dem formalen Teil
$$T = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \alpha_4 + q(x) \qquad (x \in R^3_+)$$

und zentralsymmetrischem Potential q gibt U.W. Schmincke ein Kriterium für das Vorhandensein einer "Lücke" der Form $(-\sqrt{1-\alpha^2}, \sqrt{1-\alpha^2})$ im Spektrum von $\bar{T}$ an, das α kann explizit berechnet werden. Das Kriterium ist für Coulomb-Potentiale $q(x) = -\mu/|x|$ scharf ($\alpha = |\mu|$). Dieses Kriterium gestattet es, den ersten Satz auf Dirac-Operatoren mit Abschneide-Potentialen anzuwenden.

(K.Habetha, Dortmund)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft