MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 9/1973

Mathematische Statistik

11. bis 17. März 1973

Die diesjährige Tagung, die unter der Leitung von K. Hinderer (Hamburg) und F. Eicker (Dortmund) stand, spiegelte erneut die ständig zunehmende Auffächerung der Stochastik wider. Die Mehrzahl der 23 Vorträge - mit z.T. recht lebhaften Diskussionen - befaßte sich mit Themen aus den Gebieten Schätztheorie, nichtparametrische Methoden, Sequentialverfahren, asymptotische Entwicklungen, Entscheidungstheorie und Regressionsmodelle. Dazu kamen Einzelthemen aus verschiedenen Bereichen der Mathematischen Statistik und der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Leider konnte eine größere Anzahl von ausländischen Statistikern aus verschiedenen Gründen den an sie ergangenen Einladungen nicht Folge leisten. Dies führte dazu, daß es nicht im vorgesehenen Umfange zu einer Schwerpunktbildung auf dem Gebiet der Sequentialverfahren kam, gab jedoch andererseits die Möglichkeit, wenigstens einen Teil der jüngeren westdeutschen Statistiker an der Tagung teilnehmen zu lassen.

Teilnehmer

Ph. Artzner, Strasbourg
V. Baumann, Hohenheim
K. Behnen, Freiburg
R. Beinhauer, Regensburg
R. Borges, Giessen
C. Brown, z.Zt.Erlangen
K. Daniel, Bern
U. Dieter, Karlsruhe
H. Drygas, Bonn
F. Eicker, Dortmund
J. Fabius, Leiden
W. Fieger, Karlsruhe
F. Fischer, Bonn
P. Gänssler, Bochum
F. Hampel, Zürich
H. Hecker, Dortmund
K. Hinderer, Hamburg
J. Kindler, Karlsruhe

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H.-P. Kirschner, Freiburg
O. Krafft, Hamburg
V. Kurotschka, Göttingen
H.-E. Lahmann, Clausthal
J. Lehn, Regensburg
R. Ludwig, Würzburg
H. Luschgy, Münster
V. Mammitzsch, München
K. Miescke, Mainz
D. Morgenstern, Hannover
F. Nanopoulos, Strasbourg
W. Oberhofer, Regensburg
F. Österreicher, Wien
M. Rasche, Münster
U. Rieder, Hamburg
M. Rosenblatt, La Jolla (USA)
H.-J. Sander, Mannheim
S. Schach, Dortmund
M. Schaefer, Hamburg
N. Schmitz, Münster
B. Schorr, Genf
H. Störmer, Mannheim
W. Vogel, Bonn
H. Walk, Stuttgart
H. Witting, Freiburg
W. Wertz, Wien
Y. Yahav, Tel-Aviv
W.R. van Zwet, Leiden

Vortragsauszüge

Ph. ARTZNER: Über die Darstellungen der Wishart-Verteilungen als Faltungen.

Es sei $T = (X_1,\ldots,X_n)$ ein n-Tupel von zufälligen k-dimensionalen (Spalten-) Vektoren; die zufällige Matrix $\sum_1^n X_i X_i'$ ist die Matrix der zufälligen positiven quadratischen Form Q:

$$u \to \sum_1^n \langle u, X_i \rangle^2 , \quad u \in \mathbb{R}^k , \quad \langle , \rangle \text{ Skalar-Produkt.}$$

Falls die gemeinsame Verteilung von T totalstetig ist, findet man, daß die Form Q fast sicher den Rang min(n,k) hat. Es gilt folgender Satz:
Es seien X und Y k-dimensionale ($k>1$) Zufallsvektoren mit totalstetigen Verteilungen, deren Dichten stetig und strikt positiv sind. Es seien $(X_1,\ldots,X_n)$ und $(Y_1,\ldots Y_p)$ Stichproben von X bzw. Y. Wenn die zufälligen Matrizen $\sum_1^n X_i X_i'$ und $\sum_1^p Y_j Y_j'$ identisch verteilt sind, dann gilt: $n = p$, XX' und YY' sind identisch verteilt.

In dem Kegel der positiven nicht-ausgearteten quadratischen

Formen im R^k ist es möglich, eine Familie γ_r, $r > \frac{k-1}{2}$, von Dichten zu definieren, so daß $\gamma_r * \gamma_s = \gamma_{r+s}$ und $\gamma_{\frac{n}{2}} = W(k,n)$ gilt, wobei $W(k,n)$ die Wishart-Verteilung mit $n(\geq k)$ Freiheitsgraden ist. Daraus folgt, daß $W(k,n)$ für $n \geq 2k-1$ Faktoren besitzt, die nicht Wishart-Verteilungen sind. Außerdem läßt sich zeigen: Es seien Γ eine streng konvexe Fläche im $\mathbb{R}^n$ der Klase $\mathcal{L}^1$, und M_1, M_2 bzw. N_1, N_2 unabhängige gemäß stetigen Dichten identisch verteilte Zufallsvektoren mit Werten in Γ. Wenn die Verteilungen von $\frac{1}{2}(M_1+M_2)$ und $\frac{1}{2}(N_1+N_2)$ in einer Umgebung von Γ identisch sind, dann sind M_1, M_2, N_1, N_2 identisch verteilt.

K. BEHNEN: Vergleich von asymptotisch optimalen Rangtests unter beliebigen (benachbarten) Verteilungsfolgen.

Ausgehend von einer Arbeit von Vorličkova (1970) in der Zeitschrift für W-Theorie werden die dort angegebenen asymptotischen Verteilungs- und Schärfeaussagen für randomisierte Rangtests und Rangtests mit gemittelten "scores" unter Verwendung der Methoden aus Behnen AMS (1972) zuerst auf den Fall beliebiger Verteilungen und auf beliebige benachbarte Alternativenfolgen ausgedehnt. Diese Aussagen werden dann verwendet, um Ergebnisse über das Verhalten der ARE von zwei Rangtests mit gemittelten "scores" zu erhalten, die analog sind zu den entsprechenden Aussagen in Behnen (1972) für den Fall stetiger Verteilungen.

Insbesondere ergibt sich, daß der randomisierte Rangtest dem entsprechenden Rangtest mit gemittelten "scores" asymptotisch für alle zur Hypothese benachbarten Alternativenfolgen unterlegen ist.

R. BORGES: Linear gebrochene Nutzenfunktionen.

Es sei $\mathfrak{P}_n$ die Menge aller n-Punktverteilungen $p|A$, d.h. $|\{a : p(a)>0\}| \leq n$, $p(a) \geq 0$, $\sum_{a \in A} p(a) = 1$. Es sei $\mathfrak{P}_n$ vollständig geordnet. Außer den von Neumann-Morgensternschen Ordnungsaxiomen wird folgendes Axiom eingeführt: Aus $\alpha p + (1-\alpha)r \sim \beta q + (1-\beta)r$ für ein Paar $\alpha,\beta \in (0,1)$ folgt $\alpha p + (1-\alpha)s \sim \beta q + (1-\beta)s$ für alle s. (Dieses Axiom ist schwächer als das Samuelson-Malinvaudsche Unabhängigkeitsaxiom). Aus diesen Axiomen - ohne das Letztgenannte - folgt die Existenz einer Abbildung $u : A \to [0,+\infty)\times \mathbb{R}^1$, so daß $p \leq q \Longleftrightarrow E_p u_2/E_p u_1 \leq E_q u_2/E_q u_1$.

U. DIETER: <u>'Compound' Methoden zur Erzeugung Binomial- und Poisson-verteilter Zufallszahlen</u>.

Binomial-verteilte Zufallszahlen mit Parametern $n = a+b-1$ und p lassen sich folgendermaßen erzeugen:

1. Man erzeuge eine Beta (a,b)-verteilte Zufallszahl s.
2. Ist $s \leq p$, so erzeuge man eine Binomial-verteilte Zufallszahl k mit Parametern $n' = b-1$, $p' = \frac{p-s}{1-s}$. Setze $x = k + a$.
3. Ist $s > p$, so erzeuge eine Binomial-verteilte Zufallszahl k mit Parametern $n' = a-1$, $p' = \frac{p}{s}$. Setze $x = k$.

Die Zahl x ist dann Binomial-verteilt mit $n = a+b-1$ und p. Ähnliche Methoden existieren zur Erzeugung Poisson- und Negativ-Binomial-verteilter Zufallszahlen. Man braucht dazu Gamma-verteilte Zufallszahlen anstelle von Beta-verteilten Zufallszahlen. Diese Methoden verlangen besonders gute Verfahren zur Erzeugung von Gamma- bzw. Beta-verteilten Zufallszahlen. Hierfür werden Acceptance-Rejection Methoden vorgeschlagen, bei denen die majorisierende Funktion die Normal- bzw. Exponential-Verteilungsfunktion ist.

H. DRYGAS: <u>Eine Bemerkung über multiple Regressionsmodelle</u>.

Es sei Y eine zufällige n×m-Matrix, $EY \in L$, $\mathrm{Cov}\, Y \in \{(I \times \Sigma) \mid \Sigma \geq 0\}$. Bekanntlich gibt es genau dann einen gleichmäßig besten linearen erwartungstreuen Schätzer von EY, wenn der lineare Teilraum in der Form $L = L_1 x \ldots x L_m$ geschrieben werden kann. Dies ist auch dann richtig, wenn Σ positiv-semidefinit ist. Allerdings scheint es dann, daß die angegebene Form von L auf Grund der Ausartung von Σ ausgeschlossen ist, da Interrelationen zwischen den Komponenten von EY bestehen müssen. Es wird aber gezeigt, daß die üblichen Schätzungen diese Interrelationen automatisch erfüllen. Eine Anwendung bei der Hochrechnung von Wahlergebnissen wird angegeben.

F. HAMPEL: Some questions about asymptotic expansions.

While presently already many good robust point estimators are known, and while asymptotic normality takes care of their distributions and also of confidence intervals roughly for $n \geq 20$, sometimes already for $n \geq 10$, the questions arise how traditional asymptotic expansions and large deviation methods can help for the remaining small values of n, and which known numerical studies indicate their quality. - For M-estimates of location, and in particular for the arithmetic mean $\bar{X}$, the speaker derived the first two terms of an apparently rather unfamiliar expansion, namely for p_n'/p_n, where p_n is the density of the estimator applied to n observations. In the special case of $\bar{X}$ and the uniform distribution, this method gives excellent results down to n = 2; further cases will be tried. The expansion for $\bar{X}$ is related to (and slightly improves upon) the saddlepoint approximation obtained by H.E. Daniels, which in turn appears likely to be usually superior to the more common Edgeworth (and related) expansions as well as to large deviation theorems.

H. HECKER: Lineare Funktionen von Ordnungsstatistiken.

Es werden Linearkombinationen von Ordnungsstatistiken bei zugrundeliegender Rechteckverteilung über (0,1) betrachtet und Bedingungen angegeben, unter denen sie asymptotisch normalverteilt sind. Dazu werden in der Darstellung

$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \alpha_{in} \left(U_{in} - \frac{i}{n+1}\right)$ die Größen $U_{in} - \frac{i}{n+1}$ nach der Bahadur-Approximation der Stichprobenquantile näherungsweise durch $-\left(F_n\left(\frac{i}{n+1}\right) - \frac{i}{n+1}\right)$ ersetzt. Da die empirische Verteilungsfunktion F_n als Summe von unabhängigen Bernoulli-Variablen geschrieben werden kann, erhält man nach Vertauschung der Summationsreihenfolge eine Approximation von T_n durch eine Summe unabhängiger Zufallsvariabler, auf die der Zentrale Grenzwertsatz angewandt werden kann. Die Bedingungen für die Konvergenz gegen N $(0,\sigma^2)$ sind var $T_n \to \sigma^2$ und $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{n} \Sigma \, |\alpha_{in}| \to 0$. Der Fehlerterm konvergiert im zweiten Mittel gegen Null, falls zusätzlich $\sup_n \text{var} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma \, |\alpha_{in}| U_{in}\right) < \infty$ vorausgesetzt wird.

H.-P. KIRSCHNER: Über die Äquivalenz zweier Randomisierungsarten in der Statistik

Bekanntlich gibt es in der Statistik zwei Arten, durch Randomisieren zu einer Entscheidung zu kommen. Entweder man ermittelt nach vorgegebener Verteilung eine unrandomisierte Entscheidungsfunktion, oder man randomisiert auf dem Entscheidungsraum in Abhängigkeit von der jeweils vorliegenden Stichprobe. Es wird diskutiert, unter welchen Bedingungen beide Randomisierungsarten risiko-äquivalent sind, d.h. wann sich für alle zur Entscheidung zugelassenen Verteilungen über dem Stichprobenraum dasselbe Risiko ergibt. Mit Hilfe einer Version des Integral-Darstellungssatzes von Choquet-Bishop-de Leeuw wird gezeigt, daß Risiko-Äquivalenz vorliegt in einem nicht-sequentiellen statistischen Entscheidungsmodell mit kompaktem, metrischen Entscheidungsraum, nach unten halbstetiger Verlustfunktion, sowie dominierter Klasse von zugelassenen Verteilungen.

O. KRAFFT: Ein Beispiel zur Minimax-Schätzung.

Es ist bekannt, daß beim Testen von k einfachen Hypothesen das Minimax-Risiko exponentiell gegen Null konvergiert, wenn bei unabhängigen Beobachtungen der Stichprobenumfang gegen Unendlich geht. Die wenigen bekannten Beispiele für entsprechende Schätzprobleme zeigen, daß bei Verwendung der quadratischen Verlustfunktion das Konvergenzverhalten des Minimax-Risikos wesentlich schlechter ist. Es ist zu vermuten - und wird für

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

den Fall des Schätzens des Parameters der Binomialverteilung belegt - , daß bei Verwendung stückweise konstanter Verlustfunktionen ebenfalls exponentielle Konvergenz eintritt.

V. KUROTSCHKA: The design of complex experiments.

Es wurde ein Überblick über die Fragestellungen der optimalen Versuchsplanung bei komplexen Beobachtungsmodellen gegeben. Die Sonderstellung der linearen Beobachtungsmodelle wurde ausführlicher diskutiert. Ein anschaulich nicht evidenter optimaler Versuchsplan wurde als Beispiel der allgemeinen Theorie der optimalen Versuchsplanung bei komplexen Experimenten mit qualitativen Einflußfaktoren angegeben und anhand einer praktischen Problemstellung diskutiert.

J. LEHN: Schranken für das Minimax-Risiko beim Testen zusammengesetzter Hypothesen

Seien $(M, \mathfrak{K}, \mu)$ ein σ-endl. Maßraum und $W = W(M, \mathfrak{K}, \mu)$ die Menge aller bzgl. μ totalstetigen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{K}$. Durch

$$d(p,q) = \sup_{K \in \mathfrak{K}} |p(K) - q(K)| \quad (p,q \in W)$$

ist in W eine Metrik erklärt. H_1 und H_2 seien nichtleere disjunkte Teilmengen von W, die Hypothesen, $\Delta = \{\delta \in [0,1]^M : \delta\ \mathfrak{K}\text{-meßbar}\}$ die Menge der Tests sowie

$$r_\delta(p) = \begin{cases} \int \delta dp & \text{für } p \in H_1 \\ c \cdot \int (1-\delta) dp & \text{für } p \in H_2 \end{cases}$$

$(c \geq 1)$ die Risikofunktion eines Tests.

Bezeichnen ${}^kH_i$ die konvexe Hülle von H_i $(i=1,2)$ und r^* das Minimax-Risiko, so gilt mit $d' := d({}^kH_1, {}^kH_2)$

$$\frac{c(1-d')}{1+c} \leq r^* \leq 1 - \frac{1}{1+c(1-d')} .$$

Werden auf Grund der Beobachtung von n unabhängigen Wiederholungen einstufige Entscheidungen getroffen, so sei das Minimax-Risiko mit r_n^* bezeichnet. Damit ergibt sich der

Satz: Mit $d_o := d(H_1,H_2)$ und $d_1 := d(^kH_1, ^kH_2)$ gilt:

$$\frac{c(1-d_o)^n}{1+c} \leq r_n^* \leq \frac{2c}{\exp(\frac{n}{2}\, d_1^2)+2c} \quad .$$

K.-J. MIESCKE: Eine partielle Ordnung von Vektorklassen und ihr Zusammenhang mit Kendalls τ und konvexen Funktionen.

In $\mathbb{R}^n/D_n$ wird eine partielle Ordnung erklärt, wobei D_n die Diagonale des $\mathbb{R}^n$ ist. Der Zusammenhang mit bekannten partiellen Ordnungen von Permutationen wird dargestellt, und die Besonderheiten der Ordnung in $\mathbb{R}^n/D_n$ werden hervorgehoben. Insbesondere lassen sich Konvexität und Konkavität von Funktionen durch diese Ordnung charakterisieren.

Schließlich werden Vektoren $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mit zufälligen Vektoren $\vec{\varepsilon}$ überlagert und ein enger Zusammenhang zwischen der Ordnung von $[\vec{y}] \in \mathbb{R}^n/D_n$ und der stochastischen Ordnung von $\tau(\vec{y}+\vec{\varepsilon})$ hergestellt, wobei τ der Rangkorrelationskoeffizient von M.G.Kendall ist.

D. MORGENSTERN: Ein Tripel-Korrelationskoeffizient.

Als Analogon der Kovarianz zweier Zusfallsvariablen und wegen der Verwendung bei nichtlinearer Regression $Z = a+bX+cY+dX^2+eXY+fY^2$ wird $E(XYZ)$ als Maß für die Abweichung der 3-dimensionalen Verteilung von den Marginalverteilungen von je zweien (Beispiel!) diskutiert: Normierung durch Division durch $[E(|X|^3)E(|Y|^3)E(|Z|^3)]^{1/3}$ ergebe τ. Aus Hölderscher Ungleichung oder durch eine Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel folgt $|\tau| \leq 1$ und eine Deutung von $\tau \approx 1$. Für ein Analogon des Gebeleinschen Maximalkorrelationskoeffizienten wird das Integralgleichungssystem aufgestellt. Der Zusammenhang mit den Pearson-Lancasterschen Maßen und die Bildung eines Rang-Tripel-Korrelationskoeffizienten wird erwähnt.

W. OBERHOFER: Die asymptotische Verteilung von Schätzern in Regressionsmodellen.

Betrachtet wird die Regression $y_t = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu x_{t\nu} + u_t$ für $t = 1,2,\ldots T$, wobei y_t die endogene Variable, $x_{t\nu}$ die vorherbestimmten Variablen und β_ν die Parameter sind. Die Störvariable u_t besitze eine im allgemeinen nicht diagonale Varianz-Kovarianz Matrix.

Untersucht wird die asymptotische Verteilung der Quasi-Maximum-Likelihood-Schätzer, der zweistufigen und der Minimum-Distance-Schätzer. Unter allgemeinen Bedingungen wird ein Satz angegeben, der gestattet, die asymptotische Verteilung der erwähnten Schätzer anzugeben.

F. ÖSTERREICHER: Eine asymptotische Eigenschaft der Test-Divergenz.

In einem früheren Vortrag wurde für das Konzept der Test-Divergenz eine qualitative asymptotische Aussage sowie eine Charakterisierung der paarweisen Suffizienz angegeben. In diesem Vortrag wird mit Hilfe einer Beziehung von I. Vajda und einer weiteren hier bereitgestellten Beziehung unter der Annahme einer stationären unabhängigen Folge von Beobachtungen eine quantitative Aussage erzielt; nämlich daß die Folge $(I_T(P_o^{\mathscr{L}_n}, P_1^{\mathscr{L}_n}),\ n \in \mathbb{N})$ der auf die zu den ersten n Beobachtungen gehörigen σ-Algebra $\mathscr{L}_n$ eingeschränkten Test-Divergenzen exponentiell gegen $I_T(P_o, P_1) = 1/2$ konvergiert.

U. RIEDER: Stoppmodelle in der dynamischen Optimierung

In einem instationären Stoppmodell der dynamischen Optimierung $(S,A,p,(q_n),(r_n),(g_n))$ bezeichne S den Zustandsraum, A den Aktionenraum, p die Startverteilung, (q_n) das Bewegungsgesetz, r_n die Gewinnfunktion für das Zeitintervall $(n, n+1]$ und g_n die terminale Gewinnfunktion zur Zeit n. Unter einer Politik versteht man ein Paar (f,τ), wobei $f = (f_n)$ eine Folge von Entscheidungsfunktionen f_n ist, die die Aktionen bis zum Stoppen bestimmen, und τ eine Stoppzeit ist. Ist G_n^m der maximale bedingte erwartete Gewinn im Zeitraum $(n,m]$, so existiert stets $G_n^\infty := \lim_m G_n^m$, $n\in\mathbb{N}$. V_n bzw. G_n sei der maximale bedingte erwartete Gewinn im Zeitintervall (n,∞), wenn alle Politiken (f,τ) mit beliebigen bzw. mit endlichen Stoppzeiten $\tau : (S\times A)^\infty \to \{n,n+1,\ldots,\infty\}$ zulässig sind. Es werden Bedingungen vorgestellt, unter denen die Identitäten $G_n^\infty = G_n$, $n\in\mathbb{N}$ und sogar $G_n^\infty = G_n = V_n$, $n\in\mathbb{N}$ gelten. Außerdem wird ein allgemeiner Existenzsatz für optimale Politiken angegeben.

M. ROSENBLATT: <u>Estimation of probability density functions</u>.

Let $X_1,\ldots,X_n$ be independent identically distributed random variables with continuous density function f. Consider an estimate

$$f_n(x) = \frac{1}{nb(n)} \sum_{j=1}^{n} \omega\left(\frac{x-X_j}{b(n)}\right)$$ with ω a weight function and $b(n)$ a bandwidth with $b(n) \to 0$, $nb(n) \to \infty$ as $n\to\infty$. Under appropriate conditions on f (smoothness) and ω (bounded support or smoothness the asymptotic distribution of the functionals

$$\sup_{0\le x\le 1} |f_n(x) - f(x)|/\sqrt{f(x)} \quad \text{and} \quad \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2/f(x)\,dx$$

is evaluated as $n \to \infty$. This work is due to P. Bickel and myself.

M. SCHAEFER: <u>Eine Ungleichung vom Berry-Esseen-Typ</u>.

$z^{(1)},\ldots,z^{(n)}$ seien stochastisch unabhängige identisch verteilte k-dim. Zufallsvektoren mit Mittelwertvektor 0 und positiv definiter Kovarianzmatrix Σ. U sei ein k-dim. normal-verteilter Zufallsvektor mit demselben Mittelwertvektor 0 und derselben Kovarianzmatrix Σ. Ferner sei f_n eine stetige reellwertige Abbildung des $\mathbb{R}_k$ von der Form $f_n(z) = z_1+r_n(z_2,\ldots,z_k)$, und F_n bzw. F_{on}

sei die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $f_n(n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n} z^{(j)})$ bzw. $f_n(U)$. Unter der Voraussetzung, daß das dritte absolute Moment von $z^{(1)}$ endlich ist, und unter der weiteren Annahme, daß die Funktion r_n zwei Regularitätsbedingungen erfüllt, läßt sich für den Abstand s_n zwischen F_n und F_{on} die folgende Ungleichung herleiten:

$$s_n \leq (c_o + c_1 J_{1,n}) n^{-\frac{1}{2}} + c_2 \gamma_n J_{2,n} + c_3 J_{3,n} \text{ .}$$

Dabei sind c_o, c_1 von k und der Verteilung Q von $Z^{(1)}$ abhängende, c_2, c_3 nur von k abhängende Konstanten, $\{\gamma_n\}$ ist eine von k und Q abhängende Folge, die schneller als jede Potenz von n^{-1} gegen Null strebt, und $J_{1,n},\dots,J_{3,n}$ sind von k, Q und r_n abhängende Integrale.

N. SCHMITZ: Einige offene Probleme der Sequentialanalyse

Definiert man eine unbeschränkt-sequen tielle Entscheidungssituation mit $k(\geq 2)$ einfachen Hypothesen (sES_k) als ein Tupel

$(X,\mathfrak{A},P^{(1)},\dots,P^{(k)})$ mit $(X,\mathfrak{A}) = (\prod_{\nu=1}^{\infty} X_\nu, \prod_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{A}_\nu)$, $P^{(i)}$ W-Maße auf $\mathfrak{A}$,

– $P^{(i)} = \prod_{\nu=1}^{\infty} P_\nu^{(i)}$, $P_\nu^{(i)}$ W-Maß über $(X_\nu,\mathfrak{A}_\nu)$, bedeutet den Fall unabhängiger Versuche, $(X_\nu, \mathfrak{A}_\nu) = (X_1, \mathfrak{A}_1), \nu \geq 1$ und $P^{(i)} = \prod_{\nu=1}^{\infty} P^{(i)}$ mit $P_\nu^{(i)} = P_1^{(i)}, \nu \geq 1$ denjenigen unabhängiger Versuchswiederholungen –

und ein k-Entscheidungsverfahren δ als ein k-Tupel $(\tau, \rho^{(1)},\dots,\rho^{(k-1)})$ von Stoppregeln erster Art mit

$\sum_{i=1}^{k-1} \rho_\nu^{(i)} \leq 1$, so ergeben sich im Zusammenhang mit dem Satz von Wald und Wolfowitz die folgenden offenen Probleme:

(1) Man charakterisiere die Klasse der

a) sES_2 über unabhängige Versuche b) sES_2, so daß jeder LQST δ^* simultan optimal ist.

(2) Man charakterisiere die Klasse der

a) sES_2 über unabhängige Versuche b) sES2, so daß zu jedem $(\tilde{\alpha}_1,\alpha_2) > 0$ mit $\alpha_1+\alpha_2<1$ ein Test $\tilde{\delta}$ mit $\tilde{\alpha}_i(\delta) = \alpha_i$ existiert, der simultan optimal ist.

(3) Man charakterisiere die Klasse der

a) (sES_2 über unabhängige Versuche, δ) b) (sES_2, δ)

mit $\alpha_1(\delta)+\alpha_2(\delta)<1$, so daß gilt

$\tilde{\delta}$ Test mit $\alpha_i(\delta)\leq \tilde{\alpha}_i(\delta) \Rightarrow E_i(N,\delta)\leq E_i(N,\tilde{\delta})$, $i = 1,2$.

(4) Für welche sES_k existieren simultan optimale k-Entscheidungsverfahren.

H. WALK und K. HINDERER: Eine Verallgemeinerung der Erneuerungsprozesse.

Behandelt wird ein stochastischer Prozeß auf $\mathbb{N}_0$ mit Werten in $\mathbb{R}_+$ und Zielbereich $(a,a+\beta)$ $(0<\beta\leq\infty)$, wobei ein potentielles Überschreiten des Zieles durch eine Phase der Stagnation ersetzt wird und der Fall $\beta = \infty$ den gewöhnlichen Erneuerungsprozeß liefert. Es sei N_a die Wartezeit bis zum Erreichen des Ziels. Für $V(a) := EN_a$ ergibt sich die Integralgleichung $V = 1+F*V+Vr$ mit F als Verteilungsfunktion der ungestörten Schrittlänge X_1 und $r(a) := P(X_1>a+\beta)$. V ist endlich unter der Voraussetzung $P(0<X_1\leq\beta)>0$. Hierbei erhält man $V(a)\sim a/EX_1$, $a\to\infty$, für $EX_1<\infty$ Konvergenz von $V(a) - a/EX_1$ gegen einen Ausdruck mit einem V enthaltenden Integral, das in einigen Beispielen ausgewertet wurde, und für $EX_1^2<\infty$ asymptotische Normalverteilung von N_a. Hilfsmittel sind die gewöhnliche Erneuerungstheorie und die Theorie inverspositiver Operatoren.

W. WERTZ: Zur Existenz von Dichteschätzungen.

$\mathfrak{F}$ sei eine Klasse von Dichtefunktionen bezüglich eines σ-endlichen Maßes μ, das auf einem Meßraum $(X,\mathfrak{A})$ definiert ist, $P_f (f\in\mathfrak{F})$ die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsmaße. Aufgrund von n unabhängigen Beobachtungen einer nach P_f verteilten zufälligem Variablen ist die unbekannte, $\mathfrak{F}$ angehörige Dichte f zu schätzen. λ sei ein weiteres σ-endliches Maß auf $(X,\mathfrak{A})$, $p\geq 1$ und für jede meßbare numerische Funktion h mit

$$\sup_{f\in\mathfrak{F}} \int |h|^p dP_f^n \otimes \lambda < \infty \qquad \ldots (*)$$

sei $\delta_p(h) := [\sup_{f\in\mathfrak{F}} \int_{X^n\times X} |h(x^n,x)-f(x)|^p dP_f^n\otimes\lambda(x^n,x)]^{1/p}$.

1) Unter allen h, die (*) erfüllen, existiert eines, das $\delta_p(h)$ minimiert.

2) $\mathfrak{C}$ sei eine abzählbar erzeugte Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}^n$, die für die Menge der Produktmaße $\{P_f^n: f\in\mathfrak{F}\}$ erschöpfend ist. Für jedes h mit (*) gibt es dann eine $\mathfrak{C}\otimes\mathfrak{A}$-meßbare Funktion g mit $\delta_p(g)\leqq\delta_p(h)$.

3) Sei p=1. Unter allen Schätzungen h, die (*) erfüllen und selbst fast überall Dichten sind, existiert eine im Sinne von 1) optimale.

Y. YAHAV: <u>On sequential selection procedures</u>.

Let $(\pi_i, 1\leq i\leq k)$ denote k normal populations $\pi_i \sim N(\mu_i,1)$ and let $\mu^{(k)}>\mu^{(k-1)}>\ldots>\mu^{(1)}$ be the ordered means. We are interested in selecting the population with the largest mean, namely $\mu_j = \mu^{(k)}$. Sobel formulated the problem in the following way:

(A) $\mu^k \geq \mu^{(k-1)}+\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Under assumption (A) find the minimal N such that $\inf_{\underset{\sim}{\mu}} P$ (correct selection) $\geq 1-\alpha$, where $0<\alpha<1$. It can easily be shown that this problem has a solution, and it is easy to compute the solution. The sequential extension to this problem calls for finding a stopping time N that would keep $\inf_{\underset{\sim}{\mu}} p(c.s.)\geq 1-\alpha$ and $\sup_{\underset{\sim}{\mu}} EN$ minimal.

A Bayesian approach to the problem leads to asymptotic pointwise optimal procedures when the cost of sampling converges to zero and if we assume (A) leads to Wald asymptotic optimality. The stopping rule is "stop for the first n, such that the posterior risk at time n is smaller than the cost of sampling". This rule can be used in other families of distributions and asymptotically depends on the prior distribution only through its support. This rule can be translated to the classical set up and considered asymptotically when $\alpha\to 0$.

W.R. VAN ZWET: Asymptotic expansions and deficiencies of nonparametric tests.

Asymptotic expansions to order N^{-1} are derived for the distribution functions of nonparametric test statistics for the one- and two-sample problem, both under the hypothesis and under contiguous location alternatives. From these expansions the deficiencies (in the sense of Hodges and Lehmann) of these tests with respect to their parametric competitors are derived.

U. Rieder, M. Schaefer (Hamburg)