MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 13 /1973

Mathematische Logik

8.4. bis 14.4.1973

Die diesjährige Tagung zur mathematischen Logik wurde wieder von den Herren H. Hermes (Freiburg) und K. Schütte (München) geleitet. Es wurden insgesamt 26 Vorträge gehalten, die Themen aus den verschiedensten Gebieten der Logik behandelten.
Die DVMLG hielt während der Tagung ihre Mitgliederversammlung ab.

Teilnehmer

P. Bernays, Zürich
G. Bitsch, Tübingen
E. Börger, Salerno
H. Brämik, Münster
J.R. Büchi, Lafayette
W. Buchholz, München
R. Deissler, Freiburg
H.-D. Ebbinghaus, Freiburg
U. Felgner, Heidelberg
W. Felscher, Tübingen
R. Fittler, Berlin
R.O. Gandy, Oxford
H. Hermes, Freiburg
B.-J. Koppelberg, Bonn
S. Koppelberg, Bonn
P. Krauss, Heidelberg
M. Kudlek, Hamburg
H. Läuchli, Zürich
H. Luckhardt, Marburg
W. Maaß, München
P. Moran, Freiburg
G.H. Müller, Heidelberg
A. Oberschelp, Kiel
H. Osswald, München
B. Peppinghaus, Bonn
H. Pfeiffer, Hannover
W. Pohlers, München
A. Prestel, Bonn
C. Rauszer, Warschau
M. Richter, Tübingen
H.E. Rose, Bristol
B. Scarpellini, Basel
D. Schmidt, Bad-Vilbel
W. Schönfeld, Bonn

K. Schütte, München
W. Schwabhäuser, Stuttgart
H. Schwichtenberg, Münster
D. Scott, Oxford
D. Siefkes, Heidelberg
L.W. Szczerba, Warschau
A.S. Troelstra, Amsterdam
S.S. Wainer, Leeds
M. Ziegler, Berlin

Vortragsauszüge

M. RICHTER: Resolutionen und Gentzensysteme

Es wird ein Überblick und Vergleich verschiedener Verfahren, die beim maschinellen Beweisen eine Rolle spielen, gegeben. Es handelt sich einmal um die sog. Resolutionsverfahren, zum anderen um Verfahren der von Maslov eingeführten inversen Methode. Alle diese Verfahren stehen in engem Zusammenhang mit den Gentzensystemen und unterscheiden sich im wesentlichen durch die Art der "Buchhaltung" bei den Variablensubstitutionen. Weiter ist in der Prädikatenlogik mit Gleichheit die Methode der Paramodulation äquivalent zu einem von Lefsič angegebenen Kalkül.

U. FELGNER: $\aleph_1$-kategorische Theorien nicht-kommutativer Ringe

Unter Verwendung modelltheoretischer Methoden von M. Morley und S. Shelah wurden diejenigen Ringe R aus gewissen Klassen charakterisiert, deren Theorien $Th(R) = \{\Phi;\ R \models \Phi\}$ $\aleph_1$- kategorisch sind:

Lemma 1: Sei R ein unitaler Ring und Th(R) ω-stabil. Dann ist R ein perfekter Ring und das Jacobson-Radikal J ist nilpotent.

Satz 1: Sei $R \neq \{0\}$ ein Ring ohne nilpotente Elemente $\neq 0$. Dann sind äquivalent: (falls R unendlich ist):

(i) Th(R) ist $\aleph_1$-kategorisch,

(ii) $R = D \oplus H$ wobei D ein Schiefkörper ist mit $Th(D)$ $\aleph_1$-kategorisch und H ein endlicher kommutativer Ring mit 1

Ähnliche Charakterisierungen wurden für semi-prime p.r.i.-Ringe (im Sinne von Goldie), Gruppenringe und für einfache P.I-Ringe erzielt.

P. KRAUSS: *On the Lattice of Universal Theories*

We consider first order languages with finitely many relation symbols and identity. A *universal theory* is a set of open formulas closed under derivation. The set of universal theories forms an algebraic lattice. An element of a lattice is called *well-founded* if it is not the first member of an infinite strictly ascending chain. We study the *well-founded part* of the lattice of universal theories. We completely describe the set of universal theories which can be reached in α steps from the top, where $\alpha<\omega\cdot 2$. A method is indicated how to first extend this result to $\alpha=\omega\cdot 2$ and then to all $\alpha<\omega\cdot\omega$. Some information is also available for the case $\alpha=\omega\cdot\omega$.

A. S. TROELSTRA: *Intensional Identity and its Uses*

The notion of "intensional" or "definitional" equality is discussed, with respect to its uses in philosophical justifications in the foundations of mathematics, and for technical purposes, i.e. to obtain metamathematical results; the latter use is illustrated by a number of examples.

S. S. WAINER: *A Hierarchy for the 1-Section of Any Type-2 Object*

Let $F: N^N \to N$ be any type-2 object *in which* ${}^2E$ *is recursive*. Shoenfield, Hinman associated with F a jump operation j_F which, when iterated over a simultaneously generated set of ordinal notations, produced a hierarchy for 1-sc(F), the class of functions recursive in F.
Now let F be *any* type-2 object and let $[e]^\alpha$, $e<\alpha$ be some standard enumeration of all functions primitive recursive in α. Associate with F the operation

$$J_F \; : \; \alpha \; \to \; \lambda x \left\langle [x]^\alpha(0), F([x]^\alpha)\right\rangle .$$

Then transfinite (effective) iteration of J_F produces a set of notations O^F and functions f_a^F for each $a \in O^F$.

Theorem 1

g is recursive in F iff g is primitive recursive in f_a^F, some $a \in O^F$.

Corollary

A is semi-recursive in F iff $A \leq_M O^F$.

Theorem 2

Every function (strongly) μ-recursive in F is primitive recursive in some f_a^F with $a \in O^F$ and $|a| < \omega^3$.

H. OSSWALD: Definierbarkeit von Funktionszeichen und Interpolationssatz in der intuitionistischen Logik

Es wird gezeigt, wie man in konstruktiver Weise den Interpolationssatz für die intuitionistische Prädikatenlogik 1. Stufe mit Funktionszeichen ohne Gleichheit durch Einführen verschiedener Gleichheitszeichen und neuer Relationszeichen auf den Interpolationssatz von Schütte zurückführen kann. So erhält man auch den Interpolationssatz für die Logik mit Identität. Weiter wird ein Beispiel dafür gegeben, daß im Gegensatz zur klassischen Logik mit und ohne Gleichheit und zur intuitionistischen Logik ohne Gleichheit Skolemerweiterungen keine konservativen Erweiterungen in der intuitionistischen Logik mit Identität sind.

L. W. SZCZERBA: Theories with Unary Predicates

Let T be a theory formulated in terms of finite number of unary predicates, and let $\mathfrak{A}$ be a model of T. For any infinite set A of objects elementarily defined over $\mathfrak{A}$ there is an infinite subset A' of A such that any permutation of A' is induced by an automorphism of $\mathfrak{A}$. This provides a necessary condition for a given theory to be possible to formulate it in terms of unary predicates only. In particular the theory of linear order, elementary arithmetics of natural and real numbers, elementary euclidean geometry and many other theories cannot be formulated in terms of unary predicates. Their primitive notions have to include at least one binary relation (or relation with arity greater than 1).

D. SIEFKES: Entscheidbarkeit ist abhängig von der zugrundegelegten Mengenlehre

Sei S ein System der Mengenlehre, sei M ein Modell von S, sei α eine Ordinalzahl in M. MT[α^M] ist die monadische Theorie zweiter Stufe von α. MT[α^S] ist der Durchschnitt aller MT[α^M], M Modell von S. Für $\alpha \leq \omega_1$ ist MT[α^{ZFC}] entscheidbar nach Büchi. Axiomatisierung der Theorien führte zu folgenden Ergebnissen (mit Büchi): Für $\alpha < \omega^\omega$, MT[α^{ZF}] = MT[α^{ZFC}]. Für $\omega^\omega \leq \alpha \leq \omega_1$, MT[$\alpha^{ZF}$] $\neq$ MT[α^{ZFC}]. Problem: Ist MT[α^{ZF}], $\omega^\omega \leq \alpha \leq \omega_1$, entscheidbar? Was sind die vollständigen Erweiterungen?

H. E. ROSE: $\mathcal{E}^\alpha$-Arithmetic and Transfinite Induction

We study the metamathematical properties of the free variable formal systems based on the extended Grzegorczyk hierarchy of functions $\mathcal{E}^\alpha$. Let $g_2(a) = a^2+1$, $g_{\alpha+1}(a) = g_\alpha^a(1)$ (α-successor ordinal) and $g_{\lambda+1}(a) = g_{\lambda_a}(a)$ where λ_a is a fundamental sequence for λ (a limit ordinal). $\mathcal{E}^0$ contains the zero, identity and successor functions and is closed under composition and limited recursion, $\mathcal{E}^1$ is $\mathcal{E}^0$ plus addition $\mathcal{E}^\alpha$ is $\mathcal{E}^0$ plus g_α and $\mathcal{E}^\lambda$ is $\bigcup_{\beta<\lambda} \mathcal{E}^\beta$($\lambda$ limit). $\mathcal{E}^\alpha$-arithmetic has as propositions A=B where A,B are constants, variables or $\mathcal{E}^\alpha$ functions and rules for equality substitution and induction. For $\alpha>1$ we use the result: consis ($\mathcal{E}^\alpha$) is definable in $\mathcal{E}^\alpha$, derivable in $\mathcal{E}^{\alpha+1}$-arithmetic but not derivable in $\mathcal{E}^\alpha$-arithmetic (the Gödel theorems) to show the independence of the transfinite induction scheme

$$[h(a)<a \rightarrow P(h(a))] \rightarrow P(a) \vdash P(a) \qquad (*)$$

from $\mathcal{E}^\alpha$-arithmetic where $<$ is an ordering of type ω^α and b is a function of $\mathcal{E}^3$($\mathcal{E}^2$ if α is finite). This uses the fact that the type and complexity (i.e. the ordinal of the level in the hierarchy in which b first occurs) of (*) are interchangeable. (See J.S.L. 37/1 for further details and proofs).

W. POHLERS: Ein starker Normalisationssatz für die intuitionistische einfache Typentheorie

Es sei IT eine Sprache der intuitionistischen einfachen Typentheorie, wobei wir Herleitungsterme mittels des "Curry-Howard-Isomorphismus" als Terme der Sprache betrachten. Wir erhalten damit einen λ-Kalkül mit Typen, die entweder Formeln oder Typen im üblichen Sinne der Typentheorie sind. Jedem Term a von IT ordnen wir einen Term $\bar{a}$ eines typenfreien λ-Kalküls λK zu, indem wir im wesentlichen die Typen weglassen. Man zeigt dann leicht, daß aus der Fundiertheit von $\bar{a}$ die Fundiertheit von a folgt. Auf den Termen von λ-K werden für jeden Grundtyp τ Fundierungsprädikate definiert, die als neue Konstanten zur Sprache IT hinzugefügt werden. Für jeden geschlossenen Ausdruck t dieser erweiterten Sprache FIT definieren wir $|t|$ als einstelliges Prädikat auf λK. Wir weisen nach, daß $|t|$ ein Fundierungsprädikat des Typs von t ist und beweisen den Satz: Für jeden geschlossenen Term a von FIT, dessen Typ eine Formel A ist, gilt $\bar{a} \in |A|$. Daraus folgt die Fundiertheit von $\bar{a}$ und folglich auch die von a. Somit ist jeder Term von IT fundiert. *

W. BUCHHOLZ: Ein ausgezeichnetes Modell für die intuitionistische Typenlogik

Es wird ein algebraisches Modell $M=(Q,(I^{\tau})_{\tau},W)$ angegeben, so daß eine Formel A genau dann in M gültig ist, wenn sie in einem schnittfreien System IT der int. Typenlogik herleitbar ist. Daraus folgt die Zulässigkeit der Schnittregel für IT. Mittels einer geeigneten $\neg\neg$-Übersetzung erhält man auch den Hauptsatz für die klassische Typenlogik. - $(Q,\subseteq)$ ist ein vollständiger Pseudo-Boolescher Verband. Die Elemente von Q sind gewisse Mengen von endlichen Formelmengen. Das maximale Element 1 von Q ist die Menge aller endlichen Formelmengen. Für jeden Typ τ ist I^{τ} der Grundbereich der Objekte vom Typ τ. W ist eine Abb., die jeder geschl. Formel A ein $WA \in Q$ so zuordnet, daß $\vdash_{IT} \Gamma \rightarrow A$ für alle $\Gamma \in WA$ gilt. Ist A gültig in M (d.h. $WA = 1$), so folgt also $\vdash_{IT} A$ wegen $\emptyset \in 1$.

* (erschienen in "manuscr. math. 4(1973)")

H. BRÄMIK: Ein Kompliziertheitsmaß für gewisse Herleitungen in einem intuitionistischen Sequenzenkalkül

Mit Hilfe des angegebenen intuitionistischen Sequenzenkalküls läßt sich eine Erweiterung der Grzegorczyk-Hierarchie beweistheoretisch charakterisieren. Zugelassen sind Formeln mit einfach geschachtelter Implikation. Den Sequenzen einer Herleitung werden "Ordinalzahlterme" (OzT) zugeordnet, die aus Variablen und Ordinalzahlen (Oz) gebildet werden. Damit erhalten Herleitungen von implikationsfreien Formeln eine Oz als Kompliziertheit.

$\mathfrak{B}_\alpha$ bestehe aus den zahlentheoretischen Funktionen, die mit einer Kompliziertheit $< \omega^{\alpha+1}$ beweisbar total sind.

$\mathcal{E}_\alpha$ sei der elementare Abschluß $\mathcal{E}(F_\alpha)$ $[F_0(a)=a,$

$$F_{\alpha+1}(a) = F_\alpha{}^a(a),\ F_\lambda(a) = F_{\lambda[a]}(a)$$

$\mathfrak{P}$: primitiv rekursive Funktionen.

Dann gilt:

$$\bigcup_{\alpha<\omega} \mathfrak{B}_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega} \mathcal{E}_\alpha [=\mathfrak{P}]\ ,\ \mathcal{E}_\alpha = \mathfrak{B}_\alpha\ :\ \omega \leq \alpha < \omega^{(\omega^\omega)}$$

Der Beweis bedient sich in einer Richtung eines Reduktionsverfahrens ($\approx$ Gentzen), das via Gödelisierung zahlentheoretisch als Berechnungsverfahren gedeutet wird. Um dazu die OzT in eine geeignete Gestalt zu bringen, werden Rechenregeln für die "natürliche" Oz-Arithmetik angegeben.

J. R. BÜCHI: Skolem Rings

Skolem (or Brouwerian) semilattices (S.s.l.) $\langle A,\vee,0\rangle$ may be defined as those which admit a symetric difference $x+y$=smallest u, $x\vee u=y\vee u$. Define $x*y=(x\vee y)+y)+x$ and $x\cdot y=(x*y)\vee(y*x)$. One can recover $\vee$ from $+,\cdot$ by $x\vee y=(x+y)+(x\cdot y)$. So the structures $\langle A,\vee,0,+\rangle$ and $\langle A,+,\cdot,0\rangle$ are equal in the equational sense. We call these the Skolem rings (S.R.) It is well known that S. lattices naturally occur in intuitionism and topology. More natural still is the notion of S.s.l. We add a further reason for studying these structures. Th. 1: The semilattice $\mathfrak{A}=\langle A,\vee,0\rangle$ admits a nice representation, Idl $\mathfrak{A} \cong$ Cgr $\mathfrak{B}$, just in case $\mathfrak{A}$ is

Skolem. In this case the representation is given by $x \equiv y(U)$.≡. $x+y \in U$, and the algebra $\mathfrak{B} = \langle A,+,\cdot,0\rangle$ will do. Here "nice" means that 1. $\mathfrak{B}$ is on A, 2. U must be the class of 0 modulo $\equiv(U)$, and 3. $\equiv(U) \in \mathrm{Cgr}\langle A,\vee\rangle$. - As a contribution to the equational study of S.R. we offer:

Th 2: S.R. form a variety; an equational axiomsystem consist of axioms for semi lattices with 0, and $x+y \leq (x+z)\vee(y+z)$, $x+0=x$, $x+(x\vee y) \leq y$. These axioms may be translated to the primitives $+,\cdot,0$. A better axiomsystem for $+,\cdot,0$ ought to be found. Th 3: $\cdot$ associative S.R. = subdirect product of chains = variety generated by $[2,3,4,\ldots\ldots]$ = S.R. in which $\cdot$ becomes $\wedge$.

C. RAUSZER: Some Remarks About a Certain Type of Non-Classical Logic

By H-B logic we'll understand a certain type of non-classical logic. The language of this logic we obtain from the language of intuitionistic logic by adding two connectives: explication $\dot{-}$ and Brouwerian negation $\ulcorner$. The connective explication is dual to intuitionistic implication, and the connective $\ulcorner$ is dual to intuitionistic negation. We can prove the following theorem: for every formula α, if α does not contain the connectives explication and Brouwerian negation, then α is a H-B tautology iff it is an intuitionistic propositional tautology. An analogeous theorem for the formalized theories of H-B logic is not true.

Characteristic algebras for this logic are - so called - semi-Boolean algebras. In order to develop the theory of semi-Boolean algebras a kind of lattice - called bi-topological Boolean algebras - is examined. These algebras play an analogeous role for semi-Boolean algebras like topological Boolean algebras for pseudo-Boolean algebras.

The system of the Gentzen type is constructed for the H-B propositional calculus. One can give the following application of semi-Boolean algebras. Let $\langle A,\tau\rangle$ be a machine, i.e. $A \neq 0$, and τ is a one-argument partial operation. It can be proved that the set of all submachines of machine $\langle A,\tau\rangle$ is a complete semi-Boolean algebra.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

E. BÖRGER: Reduktion des Entscheidungsproblems auf Klassen von Kromformeln mit einer Prädikatenkonstanten und Funktionszeichen

Die Klasse Kr aller Kromformeln besteht aus den Ausdrücken der PL1 in pränexer konjunktiver Normalform mit Alternationen der Länge 2. $P((n_1,n_2,\dots),\ [m_1,m_2,\dots])$ sei die Klasse aller erststufigen abgeschlossenen pränexen Ausdrücke ohne = mit Präfix P und für alle i höchstens n_i Prädikaten- und m_i Funktionskonstanten der Stellenzahl i. Satz 1: A^{∞} $((\infty,\infty),\ [1]) \cap$ Kr hat ein rekursiv lösbares Entscheidungsproblem bzgl. Erfüllbarkeit. (Nach Yu.Sh.Gurevich ist AA $((1),\ [0,1])$ und AA $((0,1),\ [1])$ ein konservativer Reduktionstyp.(cf.Algebra y Logika 8 (1969)). Satz 2: Die Klassen AA $((0,1),\ [2]) \cap$ Kr, AA $((1),\ [1,1]) \cap$ Kr, AAA $((1),\ [0,1]) \cap$ Kr sowie AAA $((0,0,0,1),\ [1]) \cap$ Kr, E^{∞}AEA $(0,0,1) \cap$ Kr und EAA $((0,0,1),\ [1]) \cap$ Kr sind Reduktionstypen bzgl. Erfüllbarkeit. (Vgl. Orevkovs Reduktionsklassen AA $((0,1,2),\ [\infty]) \cap$ Kr, AA $((k,l),\ [2]) \cap$ Kr für nicht genauer spezifizierte natürliche Zahlen k,l sowie $E^{\infty}AEA^{4}$ $(0,0,0,0,0,2,4,0,1) \cap$ Kr in "Studies in constr.math. and math.logic", vol. II und Gurevich loc. cit. für die Entscheidbarkeit von $E^{\infty}AE^{\infty}((\infty,\infty,\dots),\ [\infty,\infty,\dots]))$. Die Entscheidungsprobleme der Klassen AAA $((0,0,1),\ [1]) \cap$ Kr und AA $((1),\ [0,1]) \cap$ Kr sind noch offen.

W. SCHWABHÄUSER: Axiomatisierungsprobleme für spezielle Theorien in der schwachen zweiten Stufe

In Beantwortung einer Frage von Mostowski konstruierte Vaught Theorien in der (Logik der) schwachen zweiten Stufe (kurz SL_{II}-Theorien) im Sinne des Ansatzes von Tarski (mit endlichen Folgen), die ein rekursives, aber kein endliches Axiomensystem besitzen (s. Verf., Arch.math.Logik Grundlagenforsch. 10, S. 94 ff). Problem 1: Man finde weitere solche SL_{II}-Theorien, die aber aus anderen Zusammenhängen bekannt und damit "mathematisch motiviert" sind. Seien P_1 bzw. R_1 die SL_{II}-Theorien, die auf dem (in der ersten Stufe formulierten)

Peanoschen Axiomensystem bzw. dem Tarskischen Axiomensystem für die reellen Zahlen beruhen. P_2 bzw. R_2 seien die Verschärfungen, die entstehen, wenn man in das Schema der Induktionsaxiome bzw. der Stetigkeitsaxiome Formeln der schwachen zweiten Stufe einsetzt. P_2 und R_1 erweisen sich (wie eine Reihe anderer SL_{II}-Theorien) schon als endlich axiomatisierbar. Problem 2: Sind P_1 und R_2 Theorien der in Problem 1 gewünschten Art?

A. PRESTEL: Über eine Klasse formal-reeller Körper

Ein Körper K heißt formal-reell (f.r.), falls -1 keine Quadratsumme ist, euklidisch, falls jedes Element oder sein Negatives ein Quadrat ist, und erblich euklidisch (e.e.), falls K und jeder f.r. algebraische Oberkörper euklidisch sind (z.B. ist jeder reell abgeschlossene Körper e.e.).

Satz:

Ein Körper K ist genau dann e.e., falls für jeden f.r. algebraischen Funktionenkörper K_1 über K mit $[K_1:K(x)]<\infty$ das folgende "Hasse-Prinzip" gilt: Jede quadratische Form $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ mit $n\geq 3$, die bei jeder Anordnung von K_1 indefinit ist, ist isotrop (d.h. es gibt eine nicht-triviale Lösung von $\Sigma a_i x_i^2=0$).

Dieses Hasse-Prinzip wurde 1937 von E. Witt für $K=\mathbb{R}$ bewiesen.

Satz:

(a) die Klasse $\mathcal{E}$ der e.e. Körper ist elementar, d.h. $\mathcal{E}=\mathrm{Mod}(\Sigma)$ für eine Aussagenmenge Σ.

(b) Theorie ($\mathcal{E}$) ist rekursiv axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar.

R.O. GANDY: Saturated Models and Homogeneous Universal Structures

In order to construct homogeneous universal structures element by element (as one naturally does for saturated models) it is necessary to be able to handle subsets of structures. Given a category $\mathfrak{M}$ of structures and morphisms (taken, as usual in model theory, to be mono morphisms) we introduce the category S of located subsets whose objects are $(X,\mathfrak{A})$ where $\mathfrak{A}\in\mathfrak{M}$ ord $X\subseteq A$, and whose morphisms are maps f for which there exist morphisms g,h, which make the following diagram commute.

$$\begin{tikzcd} X \subseteq \mathfrak{A} \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ & \mathfrak{C} \\ Y \subseteq \mathfrak{B} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

If $\mathfrak{M}$ satisfies the joint embedding and amalgamation properties, the morphisms compose. A morphism is an isomorphism $(\simeq_s)$ if f is a bijection; in effect one works with the corresponding equivalence classes. A <u>place</u> w.r.t $(X,\mathfrak{A})$ is the equivalence class of some $(Y\cup\{b\},\mathfrak{B})$ where $(Y,\mathfrak{B}) \simeq_s (X,\mathfrak{A})$, and it is realised, for example, by b in $\mathfrak{B}$. A <u>fully occupied</u> structure $\mathfrak{A}$ is one such that if $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{A}}$, then every place w.r.t $(X,\mathfrak{A})$ is realised in $\mathfrak{A}$. For $\mathfrak{M}$ = the models of a complete theory with <u>elementary</u> embedding as monomorphisms this notion coincides with 'saturated'; for $\mathfrak{M}$ = structures with embeddings as morphisms, the notion coincides with 'homogeneous universal'. The proofs for any $\mathfrak{M}$ satisfying appropriate conditions of the existence of fully occupied structures in appropriate cardinals, and the derivation of their properties are extremely simple.

R. FITTLER: <u>Kategorien und Ultraprodukte</u>

Eine Kategorie $\mathbb{M}$ mit unterliegendem Mengenfunktor $U: \mathbb{M} \to S$ ist äquivalent zur Kategorie $\mathbb{M}(T)$ aller Modelle einer geeigneten "speziellen" Theorie T genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathbb{M}$ enthält eine U-dichte U-Unterkategorie $\mathbb{N}$
2. U ist U-darstellbar durch ein U-Objekt aus $\mathbb{N}$
3. Ultraprodukte von U-kodarstellbaren Funktoren sind wieder U-kodarstellbar
4. Kontravatiante Funktoren die eine U-kodarstellbare Ultrapotenz besitzen, sind selber U-kodarstellbar.

Die Begriffe: U-Objekte, U-Unterkategorien, U-dicht, U-darstellbar, U-kodarstellbar sind Verallgemeinerungen der üblichen Begriffe der Funktortheorie.

Die Klasse der speziellen Theorien kann (bis zu einem gewissen Grade) syntaktisch charakterisiert werden. Sie ist eine echte Oberklasse der Klasse aller universalen Horntheorien.

M. ZIEGLER: <u>Nullstellensätze für lokale Körper</u>

<u>Satz 1</u> (Sabbagh)

Sei R reell abgeschlossen und $I \lhd R[x]$ ein Ideal im Polynomring, dann sind äquivalent:

1.) I besitzt eine Nullstelle in R

2.) Für alle $h_i \in R(x)$ ist
$1+\Sigma h_i^2 \notin I$

Der Beweis benutzt Hilbert 17 und läßt sich auf den Fall p-adisch abgeschlossener Körper verallgemeinern:

<u>Def</u>. (Kochen) p Primzahl

$$\gamma_p(x) = \frac{1}{p}\left(x^p - x - \frac{1}{x^p - x}\right)^{-1}$$

K_p der von allen $\gamma(x)$, $x \in K$ erzeugte unitäre Ring

<u>Satz</u>:

Sei K ein p-adisch abgeschlossener Körper und $I \lhd K[x]$ ein Ideal. Dann sind äquivalent.

1.) I besitzt eine Nullstelle in K

2.) Für alle $h, g \in K(x)_p$ $\frac{1+ph}{g} \notin I$

Der Beweis benützt Sätze von P. Roquette (1970)

H. SCHWICHTENBERG: <u>Imprädikative Definitionen primitiv-rekursiver Funktionale</u>

T sei Gödel's Theorie primitiv rekursiver Funktionale (also quantorenfrei) in Spector's extensionaler Version. T_α sei T+α-Rek + α-Ind. ($\alpha \leq \varepsilon_0$). T^n, T^n_α entstehen aus T, T_α, wenn man nur Variable von Typenstufen $\leq n$ zuläßt.

Satz 1: (Elimination von Imprädikativitäten in Definitionen von T). Zu jeder Konstanten F von T^{n+m} gibt es eine Konstante F^* in T^n_α, $\alpha < \omega_{m+1}$ ($\omega_0 := 1$, $\omega_{m+1} := \omega^{\omega_m}$ so daß $T^{n+m}_\alpha \vdash Fx_1 \ldots x_n = F^* x_1 \ldots x_n$.

T_∞ wird entsprechend zu T definiert, mit unendlichen Termen (nach Tait) anstelle von endlichen Termen und der ω-Regel anstelle der Induktionsregel; T^n_∞ wie oben.

Satz 2: (Elimination von Imprädikativitäten in T_∞-Beweisen). Jede Formel von T^n_∞, die in T^{n+m}_∞ beweisbar ist, ist auch in T^n_∞ beweisbar. Hat der Ausgangs-Beweis eine Ordinalzahl $<\varepsilon_0$ und ist das Supremum der Ordinalzahlen der in ihm vorkommenden Terme $<\varepsilon_0$, so gilt dies auch für den entstehenden T^n_∞-Beweis.

Mit Hilfe von Satz 2 zeigt man

Satz 3: In T_{ε_0} ist das Reflexionsprinzip für T beweisbar (also insbesondere die Widerspruchsfreiheit von T).

Aus Satz 3 ergibt sich mit einer Methode von Kreisel/Levy

Satz 4: Keine widerspruchsfreie Erweiterung von T_{ε_0} läßt sich in der Form T+Ax erhalten mit einer Axiomenmenge Ax beschränkter Kompliziertheit, d.h. $Ax \subseteq T^n$.

S. KOPPELBERG: Freie Subalgebren von vollständigen Booleschen Algebren

Für jede vollständige Boolesche Algebra definiert man

$$\tau(B) = \min\{\bar{\bar{X}} \mid X \subseteq B,\ X \text{ erzeugt } B \text{ vollständig}\}$$

$$t(B) = \sup\{\bar{\bar{D}} \mid D \subseteq B,\ D \text{ disjunkt}\}$$

für $b \in B$, $b > 0$ $\quad B|b = \{x \in B \mid x \leq b\}$

B heißt τ-homogen, falls für alle $b > 0$ $\tau(B|b) = \tau(B)$.

Dann gelten

Satz 1 Ist B vollständig, unendlich, und ist für jedes $b > 0$ in B, für das $B|b$ τ-homogen ist, $t(B|b)$ nicht schwach unerreichbar, so hat B eine freie Subalgebra F mit $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{B}}$.

Satz 2 (GCH) Ist B vollständig, unendlich, und ist $\bar{\bar{B}}$ nicht schwach unerreichbar, so hat B eine freie Subalgebra F mit $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{B}}$.

Korollar Unter den Voraussetzungen von Satz 1 oder 2 hat B genau $2^{\bar{\bar{B}}}$ Ultrafilter.

Satz 3 Ist B vollständig und unendlich, so hat B eine freie Subalgebra, die B vollständig erzeugt.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

D. S. SCOTT: Reflexive Domains

Objective: To study recursive definitions in syntax and semantics in a uniform manner, investigating not only the form of the definition but also what is required for proofs of properties of recursively defined functions.

Motivation: Recursive definitions for semantics of Computer Languages are very complicated. In the attempt to simplify and explain them the effort is made to replace whenever possible purely syntactical constructions by conceptual and semantical notions. In doing this, recursions of a higher type which involve "reflexive" (i.e. self-applied) objects seem necessary. This requires partial functions, and part of the motivation is the desire to have a general understanding of partial functions of higher types.

Method: Spaces of partial objects seem to be conveniently represented by T_0 spaces having a completeness property that makes them injective in the category of all T_0 spaces and continuous maps. These spaces have been characterized as generalizations of algebraic lattices in my paper "Continuous Lattices" which also gives an inverse limit construction of infinite type spaces that are models for the λ-Calculus. During the conference I realized that since all continuous lattices with a countable base are embeddable as subspaces in $P\omega$ with the weak topology, there must be a simpler construction - at least for the non-extensional λ-Calculus. This is it: Let $\{\varepsilon_n | n\in\omega\}$ be an enumeration of all finite subsets of ω. For $x,y\in P\omega$ define:

$$x(y) = \bigcup\{\varepsilon_m | \varepsilon_n \subseteq y \wedge 2^n \cdot 3^m \in x\}.$$

For any λ-term $\varphi(x)$, possibly with other free variables, define:

$$\lambda x.\varphi(x) = \{2^n \cdot 3^m | \varepsilon_m \subseteq \varphi(\varepsilon_n)\}.$$

This gives α,β-reduction, and every continuous function $f: P\omega^k \to P\omega$ is representable by an element $a \in P\omega$ so that for $x_0, \dots, x_{n-1} \in P\omega$

$$f(x_0,\dots,x_{n-1}) = a(x_0)(x_1)\dots(x_{n-1}) .$$

By the method of retracts and fixed points, many other models can be constructed without using inverse limits.

D. SCHMIDT: Grenzen für die Nützlichkeit von satten monotonen aufsteigenden Funktionen von Ordinalzahlen

Definitionen. f ist eine n-stellige Funktion von Ordinalzahlen wenn $f : \Omega^n \to \Omega$ (Ω ist die erste überabzählbare Ordinalzahl).

f ist monoton wenn $\alpha_i \leq \beta_i (\forall i \leq n) \Rightarrow f\alpha_1 \dots \alpha_n \leq f\beta_1 \dots \beta_n$.

f ist aufsteigend wenn $\alpha_i \leq f\alpha_1 \dots \alpha_n$ für alle $i \leq n$. Ist $M \subseteq \Omega$, so ist $Cl_f(M)$ der Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{M}$ mit (i) $M \cup \{0\} \subseteq \mathfrak{M}$; (ii) $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathfrak{M} \Rightarrow f\alpha_1\dots\alpha_n \in \mathfrak{M}$. f ist satt wenn $\alpha \in \Omega \Rightarrow Cl_f(\alpha) \in \Omega$.

Satz. Ist f eine n-stellige satte monotone aufsteigende Funktion von Ordinalzahlen, so ist $Cl_f(0) \leq \psi\binom{1}{n}$. *

Dieses Ergebnis ist scharf für $n>2$, nicht aber für $n=2$.

Satz (D. H. de Jongh). Ist f eine 2-stellige satte monotone aufsteigende Funktion von Ordinalzahlen, so ist $Cl_f(0) \leq \varepsilon_0 (< \psi\binom{1}{2} = \Gamma_0)$.

* wobei $\binom{1}{n}$ ein Klammersymbol von Schütte und $\psi = \lambda\alpha \cdot \omega^\alpha$ ist.

W. SCHÖNFELD: Normalformen mit Quantorenblöcken vorgegebener Längen

In einer Sprache der Prädikatenlogik der 1. Stufe mit endlich vielen Relationskonstanten werde definiert ($n \in N$):

$$\forall_{(n)} := \exists_{(n)} := \{\varphi(\overset{n}{\mathfrak{X}}) \mid \varphi \text{ quantorenfrei } \}$$

$$(\mathfrak{B},\overset{n}{b}) \leq_{(n)} (\mathfrak{A},\overset{n}{a}) :\Leftrightarrow \{(a_\nu,b_\nu) \mid \nu=1\dots n\} \text{ part. Isomorphismus zwischen } \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B}$$

Durch Induktion über r (= Anzahl der Quantorenblöcke), wobei $n_0, n_1, \dots, n_\nu \in N$,

$$\forall(n_0,n_1\ldots n_\nu)' = \{\forall \overset{n_1}{x} \bigvee_{k=1}^{k} \varphi_k \mid k \geq 1,\ \varphi_k \in \exists(n_0+n_1,n_2,\ldots,n_\nu)\}$$

$$\exists(n_0,\ldots,n_\nu)' = \{\bigwedge_{k=1}^{k} \exists \overset{n_1}{x} \varphi_k \mid k \geq 1,\ \varphi_k \in \forall(n_0+n_1,n_2,\ldots,n_\nu)\}$$

$(\mathfrak{A},\overset{n_0}{a}) \leq_{(n_0,\ldots,n_\nu)} (\mathfrak{B},\overset{n_0}{b})$: <=> für alle $\overset{n_1}{a} \in \mathfrak{A}$ ex $\overset{n_1}{b} \in \mathfrak{B}$ mit $(\mathfrak{B},\overset{n_0}{b} \cup \overset{n_1}{b}) \leq_{(n_0+n_1,n_2\ldots,n_\nu)} (\mathfrak{A},\overset{n_0}{a} \cup \overset{n_1}{a})$

$N: = (n_0\ldots n_\nu)$

Satz: $(\mathfrak{A},\overset{n_0}{a}) \leq_N (\mathfrak{B},\overset{n_0}{b}) \Leftrightarrow$ f.a. $\varphi \in \exists_N (\mathfrak{A} \models \varphi[\overset{n_0}{a}] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\overset{n_0}{b}])$

$\Leftrightarrow$ f.a. $\varphi \in \forall_N (\mathfrak{B} \models \varphi[\overset{n_0}{b}] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\overset{n_0}{a}])$

Sei $\sigma_{(n)}(\mathfrak{A},\overset{n}{a})$ die Tarskiformel der Folge $\overset{n}{a}$ in $\mathfrak{A}$

$$\sigma_{(n_0,\ldots,n_\nu)}(\mathfrak{A},\overset{n_0}{a}): = \forall \overset{n_1}{x} \bigvee_{\tau\in\Gamma} \tau \wedge \bigwedge_{\tau\in\Gamma} \exists \overset{n_1}{x} \tau \quad \text{mit}$$

$$\Gamma = \{\sigma_{(n_0+n_1,\ldots,n_\nu)}(\mathfrak{A},\overset{n_0}{a} \cup \overset{n_1}{a}) \mid \overset{n_1}{a} \in \mathfrak{A}\}$$

C_N: = Menge solcher "Scottformeln"

Satz: Jedes $\alpha \in \forall_N \cup \exists_N$ ist logisch äquivalent einer Disjunktion aus C_N

B.-J. KOPPELBERG: <u>Große Kardinalzahlen</u>

Es wurde ein Überblick über die Resultate für schwach kompakte, meßbare, stark kompakte und superkompakte Kardinalzahlen zusammengestellt. Dabei wurde unter anderem neben neueren Ergebnissen von Magidor und Menas über die Beziehungen zwischen meßbaren, stark kompakten und superkompakten Zahlen der folgende Satz angegeben:
Consis ZFC + $\exists\kappa(\kappa$ stark kompakt$)$ $\Rightarrow$ Consis ZFC + $\forall\alpha\in On(\exists\kappa\geq\alpha(\kappa$ meßbar$))$.

A. Prestel (Bonn)