MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 16/1973

Spline-Funktionen

29.4. bis 2.5.1973

Spline-Funktionen bilden eine Klasse von Funktionen mit hervorragenden approximationstheoretischen Eigenschaften. Sie sind in den letzten 10 - 15 Jahren sehr intensiv erforscht worden.

Die erste Tagung über Spline-Funktionen stand unter der Leitung von K.Böhmer, Karlsruhe, G.Meinardus, Erlangen und W.Schempp, Bochum. Leider konnte die Einladung zu dieser Tagung erst recht spät verschickt werden, so daß nicht allzu viele ausländische Gäste an der Konferenz teilnehmen konnten. Trotzdem waren die Hauptforschungsrichtungen durch Vorträge vertreten.

<u>Teilnehmer</u>

K.Böhmer, Karlsruhe
D.Braess, Münster
F.-J.Delvos, Bochum
H.Ehlich, Bochum
L.Elsner, Erlangen
H.Engels, Jülich
M. von Golitschek, Würzburg
W.Haußmann, Bochum
G.Heindl, München
H.-J.Hochfeld, Wolfsburg
K.Jetter, Tübingen
V.Klotz, Erlangen
H.-B.Knoop, Bochum
F.Locher, Tübingen
H.Loeb, Bonn, Eugene (Oregon)
G.Meinardus, Erlangen
G.Merz, Erlangen
H. ter Morsche, Eindhoven
H.J.Münch, Bochum
F.Natterer, Hamburg
J.Nitsche, Freiburg
J.Rokne, Calgary
A.Sard, La Jolla
R.Schaback, Münster
E.Schäfer, München
E.Scheffold, Bochum
W.Schempp, Bochum
K.Scherer, Aachen
K.-H.Schlosser, Bochum
F.Schurer, Eindhoven
W.Sippel, Erlangen
H.Späth, Nürnberg
H.Strauß, Erlangen
H.Werner, Münster
K.A.Wittenbrink, München

Vortragsauszüge *)

K.BÖHMER: Über die stetige Abhängigkeit von Splines, Vergleich von Ausgleichssplines und Ausgleichspolynomen

Unter der Voraussetzung

X, Y, Z Hilberträume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $A \in \mathcal{L}(X,Z)$,

$TX = Y$, $AX = Z$, $\ker A + \ker T$ abgeschlossen in X

$\emptyset \neq K$ = konvexe abgeschlossene Teilmenge von Z

werden Existenz- und Eindeutigkeitsresultate für Interpolationssplines, für Splines auf K und Ausgleichssplines mitgeteilt. Interpoliert $s(z)$ das Element $z \in Z$ bzw. approximiert der Ausgleichsspline $s_\rho(z)$ $z \in Z$ ($\|Ts_\rho\|^2 + \rho\,\|As - z\|^2$ = min.), so ist

$$\|s(z)-s(\bar z)\| \leq k\,\|z-\bar z\|,\quad \|s_\rho(z)-s_\rho(\bar z)\| \leq k\,\|z-\bar z\|$$

und für $\dim(\ker A^\perp \cap \ker T^\perp) < \infty$

$$\|s(z)-s_\rho(z)\| \leq k\,\frac{\|z\|}{\rho},\quad \|s_\rho(z) - s_{\bar\rho}(\bar z)\| \leq k\left(\|z-\bar z\| + \left|\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\bar\rho}\right|\right).$$

Numerische Experimente zeigen, daß man bei bekannten Näherungswerten für Funktionswerte einer zu approximierenden Funktion i.a. bessere Ergebnisse mit Ausgleichssplines als mit Ausgleichspolynomen erzielt.

F.-J.DELVOS: Die Blending-Methode für Spline-Systeme

Mittels zweier Spline-Systeme, deren Spline-Projektoren nach der Methode von Sard konstruiert sind, wird ein neues Spline-System definiert: das Blending-Schema.

Dieser Zugang ermöglicht es, die charakteristischen Minimaleigenschaften von Spline-Funktionen aus den Minimaleigenschaften des Spline-Systems herzuleiten.

Als Beispiel wird die blended-lineare Interpolation sowie die Konstruktion von damit zusammenhängenden optimalen Quadraturformeln untersucht.

*) Soweit die den Vorträgen zugrunde liegenden Arbeiten nicht bereits erschienen sind, werden sie in einem Tagungsband des Bibliographischen Instituts Mannheim von den Tagungsleitern herausgegeben.

H.ENGELS: Richardson-Extrapolation mittels kubischer Splines

Statt mit polynomialer oder rationaler Interpolation wird die Richardson-Extrapolation mittels kubischer, interpolierender Splines ausgeführt. Man erhält einen einfachen Algorithmus und Konvergenz unter sehr schwachen Bedingungen. Anwendung bei der Quadratur liefert ein Quadraturverfahren von fester Fehlerordnung mit positiven Gewichten. Die Fehlerordnung ist je nach Wahl der Randbedingungen des Splines gleich der Fehlerordnung der Trapez-Regel oder der Simpson-Regel. Analoge Resultate bringt die Anwendung dieser Art Richardson-Extrapolation bei der numerischen Differentiation.

G.HEINDL: Über Interpolationsfunktionen, die bei vorgegebener Lipschitzkonstante für die n-te Ableitung extremale Integrale besitzen

Ist V eine durch linear unabhängige Interpolationsbedingungen der Form

$$l_i(f) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=1}^{r} a^i_{\nu\mu} f^{(\nu)}(x_\mu) = c_i, \quad i = 1,\dots,m,$$

charakterisierte Hyperebene in $E := \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R}\colon f^{(n)} \in \mathrm{Lip}[a,b]\}$ und $M > \inf\{p(f) := \inf\{L \in \mathbb{R}\colon |f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)| \leq L|y-x|$ für alle $x,y \in [a,b]\}$, $f \in V\}$, so ist

$l_o\colon f \mapsto \int_a^b f(t)dt$, $f \in E$, auf $K := \{f \in V\colon p(f) \leq M\}$ (genau dann) beschränkt, wenn l_o auf $\{f \in E\colon p(f) = 0\} = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R}\colon f$ Polynom vom Grad $\leq n\}$ von $l_1,\dots,l_m$ linear abhängig ist. Unter dieser Voraussetzung wird gezeigt, daß es eine Spline-Funktion $f_{+(-)}$ gibt mit den Eigenschaften: 1) $f^{(n)}_{+(-)}$ ist unbestimmtes Integral einer Treppenfunktion $\varphi_{+(-)}$ von konstantem Betrag M. 2) $\{f \in K\colon l_o(f) = \sup(\inf) l_o K\} = \{f_{+(-)} + g\colon g$ Polynom vom Grad $\leq n$ und $l_i(g) = 0$ für alle $i = 1,\dots,m\}$. Die Bestimmung von $\varphi_{+(-)}$ kann auf die Lösung eines Systems von $k \leq m$ (nicht linearen) Gleichungen für die (nicht hebbaren) Sprungstellen von $\varphi_{+(-)}$ zurückgeführt werden. Dabei sind Bedingungen für Anzahl und Lage dieser Sprungstellen, die sich aus der Voraussetzung $M > \inf\{p(f)\colon f \in V\}$ ergeben, zu berücksichtigen.

K.JETTER: Splines und Quadraturformeln

Es werden Quadraturformeln des Typs

$$(1)\qquad \int_{-1}^{+1} f(x)dx = Qf + Rf\ ,$$
$$Rf = 0 \text{ für } f \in S = S_{m-1}[z_1,\dots,z_k;m_1,\dots,m_k]$$

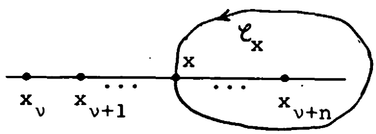
betrachtet. Dabei sei S die Gesamtheit der Splines vom Grad m-1 mit Knoten z_i $(z_i \in (-1,+1))$ der maximal zulässigen Vielfachheit m_i $(i = 1,\dots,k)$. Ist $Qf = \sum_{i=0}^{m-m^1-1} a_0^{(i)} f^{(i)}(-1) + \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) + {}$ $+ \sum_{i=0}^{m-m^2-1} a_{n+1}^{(i)} f^{(i)}(+1)$, und gilt $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < +1$, so gibt es unter der Voraussetzung $m^1 + m^2 + \sum_{i=1}^{k} m_i = m + 2n$

genau eine Quadraturformel vom Typ (1), die der geforderten Exaktheitsbedingung genügt.
Die Q.F. besitzt maximalen Exaktheitsgrad.
Die Gewichte $a_0^{(0)}, a_1,\dots,a_n, a_{n+1}^{(0)}$ sind nicht-negativ.

G.MEINARDUS: Zur Theorie der B-Splines

Ausgehend von einer komplexen Integraldarstellung der Schoenberg-Curry-schen B-Splines n-ter Ordnung

$$B_n(x;x_\nu,x_{\nu+1},\dots,x_{\nu+n}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_x} \frac{n(z-x)^{n-1}dz}{(z-x_\nu)(z-x_{\nu+1})\dots(z-x_{\nu+n})}$$



wird gezeigt, daß sich alle bekannten Eigenschaften, insbesondere die Basiseigenschaft (Vielfachheiten der Knoten eingeschlossen), in einfacher Weise gewinnen lassen. Auch Basisprobleme bei endlich vielen Knoten sind leicht zu behandeln. Offene Fragen ergeben sich im Zusammenhang mit Abschätzungen des Maximums der B-Splines.

G.MERZ: Zur Konstruktion periodischer Interpolationssplines mit äquidistanten Knoten

Ist $s(x)$ der periodische Interpolationsspline vom Grad $2k+1$ mit $s(x_\nu) = y_\nu$ und bezeichnet $p_\nu(x)$ die Restriktion von $s(x)$ auf das Intervall $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, so gilt im Fall äquidistanter Knoten mit

$q_\nu(t) = p_\nu[x_{\nu-1} + t(x_\nu - x_{\nu-1})]$, $q(t) = (q_\nu(t))_0^{N-1}$, $y = (y_\nu)_0^{N-1}$,

$\zeta = \exp(2\pi i/N)$, $W = \frac{1}{\sqrt{N}}((\zeta^{\mu\nu}))_0^{N-1}$, $Q(t) = \mathrm{diag}(1-\zeta^\mu)^{2k+2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta^{\mu\nu}(t+\nu)^{2k+1}$,

$\mu = 0(1)N-1$,

$$q(t) = W^* Q(t) Q^{-1}(1) W y.$$

Zur Berechnung von Wy wird im Fall $N = 2^m$ ein Verfahren angegeben, das mit $N \log_2 N$ Multiplikationen auskommt und auf der folgenden rekursiven Berechnung des durch $Q_N(\zeta^\mu) = Ny_{N-\mu}$, $\mu = 0(1)N-1$, festgelegten Polynoms $Q_N(z) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \alpha_\nu z^\nu$ beruht: Mit $\alpha = (\alpha_\nu)_0^{N-1}$ ist zunächst $\frac{1}{\sqrt{N}} \alpha = Wy$. Setzt man jetzt für $\nu = 0(1)N-1$ $P_{\nu,0} = y_{N-\nu}$ sowie für $\mu = 0(1)m-1$ und $\nu = 0(1)2^{m-\mu-1}-1$

$$P_{\nu,\mu+1}(z) = P_{\nu,\mu}(z)(1+\zeta^{-\nu\cdot 2^\mu} z^{2^\mu}) + P_{\nu+2^{m-\mu-1},\mu}(z)(1-\zeta^{-\nu\cdot 2^\mu} z^{2^\mu}),$$

so gilt $P_{0,m}(z) = Q_N(z)$. (G.Meinardus und G.Merz)

H. TER MORSCHE: On the existence and convergence of a Class of Interpolatory Splines of arbitrary degree

Let $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 1$ be a uniform subdivision of the interval $[0,1]$. We consider a 1-periodic spline of degree m, with mesh-points $y_0, y_1, \ldots, y_n$, that interpolates a given 1-periodic function f $(f(0) = f(1))$ in the interpolationpoints $x_i = y_i - \lambda h$, where $h = 1/n$ and λ a fixed real number $0 \leq \lambda < 1$.
It is shown that a 1-periodic interpolatory spline φ of odd degree always exists if $\lambda \neq 1/2$; in case the spline is of even degree existence is guarenteed for all values of λ except $\lambda = 0$.
Moreover, we establish an estimate for the difference $\max_{x\in[0,1]} |f^{(m-1)}(x) - \varphi^{(m-1)}(x)|$. This estimate depends on λ and

the modulus of continuity of the function $f^{(m-1)}$, i.e. we have

$$\max_{x\in[0,1]} |f^{(m-1)}(x) - \varphi^{(m-1)}(x)| \leqq \left(\frac{2m}{|P_m(-1,\lambda)|} + 1\right)\omega(f^{(m-1)},\tfrac{1}{n}).$$

Here $P_m(-1,\lambda)$ is a polynomial of degree m, generated by

$\frac{d}{d\lambda} P_m(-1,\lambda) = 2P_{m-1}(-1,\lambda)$, $P_o(-1,\lambda) = 2\lambda-1$ and with

$P_m(-1,0) = 0$ if m is even, $P_m(-1,\frac{1}{2}) = 0$ if m is odd.

F.NATTERER: Verwendung verallgemeinerter Splines für die numerische Behandlung singulärer Randwertaufgaben

Zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Singularitäten, wie sie etwa in der Quantenmechanik oder in der Diffusionstheorie auftreten, wurden in letzter Zeit häufig Projektionsverfahren mit verallgemeinerten Splines als Ansatzfunktionen vorgeschlagen. Es wird ein kurzer Überblick über diese Arbeiten gegeben. Sodann wird das Verfahren im Falle eines singulären Systems der Art

$$y' - \frac{1}{x}U\,y + W(x)y = f\,,\quad 0 < x < 1\,,$$

$$\lim_{x\to 0} Ax^{-U}\,y(x) + B\,y(1) = 0$$

erläutert. Hier ist U eine konstante und W(x) eine etwa stetige Matrix. Es wird gezeigt, daß durch geeignete Wahl der Splines und der Unterteilung eine von der Singularität unabhängige Konvergenzordnung erreicht werden kann.

A.SARD: Approximation based on nonscalar observations

Suppose that we wish to approximate a mathematical object x on the basis of observations of x. We group the observations together and call them Fx. The observation Fx is to determine our approximation of x, but Fx need not determine x itself. We posit the existence of a coobservation Ux with natural properties: Fx and Ux determine or overdetermine x; Fx and a bound on $||Ux||$ determine an appraisal of the error in our approximation.

Where the observation Fx is a finite number of scalars, it cannot convey much information about x. In the present theory we allow Fx to be an element of an infinite dimensional space. We define splines relative to F, U under minimal hypotheses. One may now treat applications which formerly were inaccessible.

R.SCHABACK: Zur Konstruktion von Spline-Interpolierenden

Ausgehend von einer Verallgemeinerung der Taylorformel wird für die M-Spline-Interpolierenden nach LUCAS (1972) für endlich viele Funktionale mit einer gewissen Kommutierbarkeitseigenschaft ein Konstruktionsverfahren angegeben, welches durch verallgemeinerte B-Splines bei geeigneter Wahl abstrakter Differenzenquotienten die als günstig bekannten Methoden zur Spline-Interpolation enthält. Unter zusätzlichen Symmetrie- und Positivitätsvoraussetzungen lassen sich die üblichen elementaren Minimaleigenschaften interpolierender Spline-Funktionen ableiten; die entsprechenden Aussagen über beste Approximation linearer Funktionale durch Spline-Interpolierende folgen aus dem Vortrag des Verfassers vom Oktober 1971. Außerdem ergibt sich auf einfache Weise eine Verallgemeinerung des Satzes von PEANO über die Restglieddarstellung linearer Funktionale. Als Anwendungen werden singuläre Spline-Funktionen nach JEROME & PIERCE (1972) sowie mehrdimensionale Spline-Funktionen behandelt; letztere lassen sich ohne Voraussetzungen über die Lage der Stützstellen im Grundgebiet konstruktiv angeben und zur Erzeugung optimaler Näherungsformeln in mehrdimensionalen Gebieten verwenden.

E.SCHEFFOLD: Über das Spline-Problem

Anhand einer kleinen, abstrakten Spline-Theorie wird ein allgemeines Spline-Problem behandelt. Für die dabei eingeführten "T-Spline-Elemente" werden die für die natürlichen Spline-Funktionen ungerader Ordnung bekannten Optimalitätseigenschaften bewiesen.

W.SCHEMPP: Zur Theorie der Spline-Systeme

Es wird der Begriff des (reellen) Spline-Systems eingeführt, die zugehörigen Minimaleigenschaften (Minimierungen im Grundraum, duale Minimierung) angegeben und der Zusammenhang mit den Sard-Systemen dargelegt. Konkrete Beispiele für Spline- und für Sard-Systeme sollen der Illustration dienen.

K.SCHERER: Charakterisierung von Lipschitz-Klassen durch die beste Approximation durch Splines

Es werden verallgemeinerte Lipschitz-Räume (Besov-Räume) durch das Konvergenzverhalten der besten Approximation durch eine Folge von Spline-Unterräumen charakterisiert. Polynomiale Splines werden betrachtet und direkte und inverse Sätze angegeben, die Abschätzungen nach oben bzw. unten durch Stetigkeitsmoduli beinhalten. Während die direkten Sätze sich für beliebige Verteilungen der Knoten beweisen lassen, geht bei den inversen Sätzen die spezielle Form der Verteilungen ein. Dies wird besonders an Hand des Grenzfalles der Saturation diskutiert.

K.-H.SCHLOSSER: Tensorproduktschema von Spline-Systemen

Mittels zweier Spline-Systeme, deren Spline-Projektoren nach der Methode von Sard konstruiert sind, wird ein neues Spline-System definiert: das Tensorproduktschema.
Dieser Zugang ermöglicht es, die bekannten charakteristischen Minimaleigenschaften der konkreten Tensorprodukt-Spline-Funktionen aus den Minimaleigenschaften des Spline-Systems herzuleiten.
Als Beispiel wird die bilineare Interpolation sowie, damit zusammenhängend, die Konstruktion optimaler Quadraturformeln behandelt.

H.SPÄTH: Verallgemeinerte kubische Spline-Interpolation

Die Spline-Interpolation mit kubischen Polynomen hat gegenüber dem Polygonzugverfahren (Spline ersten Grades) den Vorteil der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit und den Nachteil einer möglicherweise unerwünscht starken Schwankung in gewissen Intervallen.
Bei der verallgemeinerten kubischen Spline-Interpolation können die Vorteile beider Verfahren intervallabhängig gewichtet kombiniert werden.
Beispiele sind die bereits bekannte exponentielle und eine rechentechnisch vorzuziehende, spezielle rationale Spline-Interpolation.
Die Übertragung auf zwei und mehr Dimensionen bringt keine Schwierigkeiten.

H.WERNER: Nichtlineare Splinefunktionen

Zu gegebenem abgeschlossenen Intervall $I = [\alpha,\beta]$ und festen Knoten $\alpha = x_o < x_1 < \ldots < x_m = \beta$ kann man nichtlineare Splines der Ordnung k definieren durch

$$\mathcal{T} := \{ s \mid s \in C^k(I),\ s|_{I_j} = p_j(x)+t_j(x) \text{ für } j = 1,\ldots,m\}.$$

Dabei sei $I_j = [x_{j-1},x_j]$ und $t_j(x) \in \mathcal{T}_j$ mit in I_j zweiparametrischen k-mal stetig differenzierbaren Funktionenklassen, die regulär, steif und steil in den Randpunkten sind, $p_j(x)$ sind Polynome vom Grade k-1.
Es wird ausgeführt, welche Entartungen die Grenzfunktionen gleichmäßig konvergenter Folgen aus $\mathcal{T}$ haben können. Damit ist für die Tschebyscheff-Approximation stetiger Funktionen die Existenzmenge beschrieben.
Zur Charakterisierung der besten Approximierenden wird eine hinreichende Bedingung angegeben.

H.L.LOEB: An Algorithm for Computing Best Uniform Approximations for Spline Functions with Free Knots

A numerical method is described for obtaining best uniform approximations to a continuous function from the family of spline functions with free knots. The algorithm is based on a result of Barrar and Loeb which states that such a family can be regarded as the limit of a sequence of varisolvent systems. For varisolvent systems the Remez algorithm can be applied to obtain best approximations.

(H.Hilgers und H.L.Loeb)

K.Böhmer (Karlsruhe)