MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 17/1973

Intervallrechnung

2.5. bis 5.5.1973

Die diesjährige Tagung über Intervallrechnung wurde geleitet von K. Nickel (Karlsruhe), E. Nuding (Heidelberg), und P. Wißkirchen (St. Augustin-Birlinghoven).

Während bei der vorherigen Tagung überwiegend neue Algorithmen referiert wurden, zeichnete sich auf der diesjährigen Tagung der Trend ab, die bisherigen Forschungsergebnisse auf dem Gebiet der Intervallanalysis unter allgemeinen Gesichtspunkten zu sichten, um neue erfolgversprechende Forschungsrichtungen in Angriff zu nehmen. Der Schwerpunkt der Vorträge lag auf den Gebieten

- algebraische und analytische Grundlagen der Intervallanalysis
- lineare und nichtlineare Gleichungssysteme.

Auf großes Interesse stießen Fragen der Konvergenz numerischer Algorithmen und der Verallgemeinerung von Intervallarithmetiken.

Der Umfang der Arbeiten auf dem Gebiet der Intervallanalysis ist inzwischen so groß geworden, daß eine Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse notwendig erscheint. Die Tagungsteilnehmer diskutierten intensiv über verschiedene Klassifikationsschemata. Mit Zustimmung wurde zur Kenntnis genommen, daß in Karlsruhe eine zentrale Literaturstelle eingerichtet wird.

Teilnehmer

R. Albrecht	Innsbruck
W. Appelt	St. Augustin-Birlinghoven
H. Beeck	München
F. Bierbaum	Karlsruhe
K. Böhmer	Karlsruhe
R. Dussel	Karlsruhe
H. Fischer	München
H. Focke	Porz-Wahn
A. Geul	Stuttgart
W. Glaser	Heidelberg
G. Glatz	Karlsruhe
R. Gorenflo	Aachen
M. Hauenschild	Bochum
W. Haußmann	Bochum
M. Hebgen	Heidelberg
M. Heidt	Karlsruhe
W. Junginger	Stuttgart
H. Kääb	Konstanz
I. Kahlert-Warmbold	Erlangen
K. Kansy	St. Augustin-Birlinghoven
R. Krawczyk	Clausthal-Zellerfeld
Th. Kreifelts	St. Augustin-Birlinghoven
O. Kreß	Karlsruhe
N. Krier	Ulm
J. G. Lührs	Darmstadt
H. Maier	München
K. Nickel	Karlsruhe
E. Nuding	Heidelberg
H. Ratschek	Düsseldorf
J. Rokne	Calgary (Kanada)
B. Rothmeier	Karlsruhe
N. Salentin	Aachen
B. Schmitt	Karlsruhe
G. Schröder	Karlsruhe
P. Thieler	Bonn
P. Wißkirchen	St. Augustin-Birlinghoven
P. Wongwises	Karlsruhe

Vortragsauszüge

H. FISCHER: Hypernormbälle als abstrakte Schrankenzahlen

In linearen Räumen werden mittels eines verallgemeinerten Normbegriffes gewisse Teilmengen ausgezeichnet, die Hypernormbälle. Sie stellen eine Verallgemeinerung von NICKEL's Schrankenzahlen dar. Sodann wird untersucht, wie mit diesen Hypernormbällen gerechnet werden kann.

M. HAUENSCHILD: Über Ansätze zur komplexen Kreisarithmetik

Für die bei der Multiplikation komplexer Kreise entstehenden Mengen wird der relevante Teil der Randkurve berechnet und der Radius des kleinsten die Produktmenge enthaltenden Kreises mit vorgegebenem Mittelpunkt auf der Symmetrieachse angegeben. Drei Ansätze werden verglichen und die durch sie induzierte Struktur untersucht: Die Produktmenge enthaltenden Kreise mit minimalem Radius 1) ohne Zusatzbedingung, 2) der maximale Nullabstand darf sich nicht vergrößern und 3) wird das Produkt der Mittelpunkte als Mittelpunkt vorgegeben.

W. GLASER: Arithmetik für verallgemeinerte Intervalle

Die arithmetischen Operationen +,-,* führen, wie man weiß, nicht aus der Menge der reellen Intervalle heraus. Doch ist die Division durch Nullintervalle nicht erklärt. Um eine Division durch beliebige Intervalle definieren zu können, werden verallgemeinerte Intervalle eingeführt und die arithmetischen Operationen +,-,* ,/ auf die Menge der verallgemeinerten Intervalle erweitert.

Th. KREIFELTS: Optimale Basiswahl für eine Gleitkomma-Intervallarithmetik

Bei der Auswahl einer internen Gleitkomma-Darstellung für einen binären Computer mit vorgegebener Wortlänge sind vom numerischen Standpunkt aus zwei Gesichtspunkte maßgebend: erstens die Größe des zulässigen Zahlbereichs und zweitens die Genauigkeit der zugehörigen Gleitkomma-Arithmetik. Verwendet man Intervallarithmetik, so interessiert man sich für die Genauigkeit der zugehörigen Gleitkomma-Intervallarithmetik. Der Begriff Genauigkeit wird definiert über ein statistisches Rundungsfehlermodell für Intervallarithmetik. Dann wird gezeigt, daß bei binären Computern Gleitkomma-Intervallarithmetik mit üblicher Außenrundung zur Basis 4 durchschnittlich kleinere Intervallbreiten liefert als alle anderen Gleitkomma-Intervallarithmetiken zu einer Basis 2^k bei gleicher Größe des zulässigen Zahlbereichs.

K. NICKEL: Die numerische Konvergenz von Intervalliterationen

Zunächst werden allgemeine (numerische) Algorithmen eingeführt und die Begriffe der Konsistenz, der (lokalen und globalen) Stabilität und der (numerischen) Konvergenz definiert. Die bisher bekannten Sätze der folgenden Art werden mitgeteilt: Aus Konsistenz, lokaler Stabilität und einem passenden Abbrechkriterium folgt Konvergenz (Sätze von Ritter-Nickel, Krawczyk und B. Schmitt). Zwei neue Sätze dieser Art in einem halbgeordneten Raum werden mitgeteilt für die Klasse der monotonen Algorithmen. Die Anwendung dieser Sätze auf die Intervallanalysis liefert numerische Konvergenz unter dem "üblichen" Abbrechkriterium: Stop, wenn die numerisch berechneten Intervalle sich nicht weiter zusammenziehen.

H. RATSCHEK: Mittelwertsätze für Intervallfunktionen

Mittelwertsätze für reelle Funktionen f: R→R werden für verschiedene Überlegungen in der Intervallarithmetik herangezogen, wie zum Beispiel die einschließende Approximation von reellen Funktionen, intervallarithmetische Newton-Verfahren für reelle Funktionen, die einschließende Abschätzung eines bestimmten Integrals, usw. -
Derartige Überlegungen können auf Intervallfunktionen F: R→I(R) ausgedehnt werden, wenn man Mittelwertsätze für Intervallfunktionen als Grundlage benutzt. Unter Heranziehung einer geeigneten intervallanalytischen Differenzierbarkeitsversion ist es möglich, brauchbare Mittelwertsätze zu entwickeln, die formal den Mittelwertsätzen für vektorwertige Funktionen ähnlich sind. Um zu optimalen Abschätzungen zu kommen, ist die Einführung einer Verknüpfung zweckmäßig, die von den herkömmlichen intervallarithmetischen abweicht.

J. ROKNE: Reducing the degree of an interval polynomial

Interval polynomial iterations for integral equations result in interval polynomials of increasing degree . Krückeberg has suggested a method for reducing the degree of an interval polynomial thus limiting the degree in the above iterations. We propose an improvement over his method that is not much more complicated, but gives substantially better results. The two methods are compared on an integral equation and it turns out that the limiting accuracy also has been improved.

K. KANSY: Ableitungsverträgliche Intervallpolynome

Ableitungsverträgliche Polynomeinschließungen dienen zur bequemen Darstellung von Funktionen und ihren Ableitungen. Während die Eigenschaft "ableitungsverträgliche Einschließung" bei der Addition, Subtraktion und Multiplikation von Intervallpolynomen erhalten bleibt, gilt dies nicht mehr für alle Realisierungen der Substitution.

Ableitungsverträgliche Polynomeinschließungen kann man als Lösungsmenge einer intervallarithmetischen Taylor-Interpolationsaufgabe auffassen. Betrachtet man die Lösungsmenge einer intervallarithmetischen Hermite-Interpolationsaufgabe, so wird man auf verallgemeinerte ableitungsverträgliche Intervallpolynome geführt. Diese erlauben eine bequeme Darstellung von komplizierten Funktionen und deren Ableitungen, die wesentlich schärfer ist als eine entsprechende Darstellung durch die üblichen Intervallpolynome.

H. BEECK: <u>Gelöste und ungelöste Probleme bei linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten</u>

Wirkungsvolle automatische Rundungsfehlererfassung bei linearen "Punktgleichungssystemen" und möglichst scharfe Außen- bzw. Innenabschätzungen der Lösungsmenge von linearen "Intervallgleichungssystemen" sind die Hauptthemen zahlreicher vorwiegend intervallanalytischer Veröffentlichungen. In diesem Vortrag wird neben kurzen Diskussionen von verschiedenen Lösungsbegriffen sowie Innenabschätzungen vorwiegend auf die Problematik der Hüllenbestimmung der Lösungsmenge eingegangen. Es zeigt sich, daß Hüllenbestimmung nur in Spezialfällen möglich ist. Neben einem kritischen Überblick über bisher bekannte Methoden werden Ansatzpunkte bei ungelösten Problemen diskutiert.

E. NUDING: <u>Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen</u>

Es mag als eines der zentralen Anliegen der Intervallrechnung angesehen werden, Algorithmen daraufhin zu überprüfen, unter welchen Voraussetzungen sie zu einer optimalen Intervalleinschließung [X] der gesuchten Lösung X führen. Der GAUSS'sche Algorithmus, sowie das GAUSS-JORDAN-Verfahren führen zur optimalen Intervalleinschließung der Lösungsmenge von $Ax = b$, sofern A ein M-Matrixintervall, der Intervallvektor $b \geq 0$ oder $0 \in b$ ist.

Für iterative Verfahren gilt ein allgemeiner Fixintervallsatz: Isotone Intervallfunktionen F, die einen vollständigen Verband X_o in sich abbilden, besitzen ein Fixintervall $\hat{X}$. Die Iteration $X_{n+1} := [F(X_n)]$ konvergiert gegen $\hat{X}$.

M. HEBGEN: PIVOT - Suche bei Intervallmatrizen

Bei dieser intervallarithmetischen Pivotsuche wird ein Intervall mit maximalem Abstand von Null und gleichzeitig minimaler Spanne gesucht. Beide Forderungen werden durch ein Maß M und ebenso durch die χ-Funktion von RATSCHEK (Computing 6) erfaßt, welche die Intervalle in disjunkte Äquivalenzklassen einteilt. Die so definierte Pivotsuche ist invariant gegenüber der Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer reellen Zahl. Numerische Ergebnisse an 2 Testserien zeigen, daß diese Pivotsuche eine wesentliche Genauigkeitsverbesserung liefert.

M. HEBGEN: Ein Iterationsverfahren, welches die optimale (=engste) Intervalleinschließung des Inversen eines M-Matrixintervalls liefert

Unter Verwendung einiger Eigenschaften für M-Matrizen (insbesondere: Spektralradius $\rho(E-AB^{-1}) < 1$ für $A \leq B$, A,B M-Matrizen, E Einheitsmatrix) kann für dieses Verfahren allgemeine Konvergenz bewiesen werden. Die Iterationsfunktion ist eine nichtnegative und isotone Intervallfunktion und liefert die optimale Lösung.

P. WISSKIRCHEN: Vergleich des intervallarithmetischen Einzelschrittverfahrens mit dem Gesamtschrittverfahren

Bei gleicher Wahl des Ausgangsvektors für die Iteration führen das intervallarithmetische Einzelschrittverfahren und das Gesamtschrittverfahren in gerundeter Intervallarithmetik mit dem Computer zum gleichen Ergebnis, falls bis zum Stillstand iteriert wird. Dies ist insofern überraschend, als zwei verschiedene Algorithmen, die im allgemeinen während der Rechnung verschiedene numerische Zwischenwerte liefern, zum gleichen numerischen Resultat führen. Vorausgesetzt ist hierbei, daß die Maschinen-Intervallarithmetik inklusionsmonoton ist. Dies ist bei üblichen Realisierungen (z.B. bei optimaler Außenrundung) erfüllt.

O. KRESS: Iterative Verbesserung von Einschließungen von Eigenvektoren und Eigenwerten beliebiger Matrizen

Das angegebene Iterationsverfahren ist unter gewissen Voraussetzungen linear konvergent. Man kann ein hinreichendes Konvergenzkriterium angeben, dessen Erfülltsein garantiert, daß die Spannen der Einschließungsintervalle streng monoton gegen Null streben. Dadurch läßt sich auch ein sinnvolles Abbruchkriterium wählen. Der Rechenaufwand, der zur Durchführung eines Iterationsschrittes bei beliebiger $n \times n$ Matrix erforderlich ist, ist proportional zu n^2. Als Beispiel wird die Anwendung des Verfahrens auf eine nichtsymmetrische, reelle Matrix gezeigt.

R. KRAWCZYK: Fehlerabschätzung bei nichtlinearen Gleichungssystemen

Für eine Lösung x^* eines nichtlinearen Gleichungssystems $f(x) = 0$ wird eine Fehlerabschätzung bezüglich einer Halbordnung angegeben. Gleichzeitig kann auch eine Aussage über die Eindeutigkeit der Lösung gemacht werden. Die Ergebnisse werden auf Differenzengleichungen und auf ein algebraisches Eigenwertproblem angewandt.

W. APPELT: Bikubische Intervall-Splines

Von Carlson und Hall wurde ein Verfahren zur Berechnung bikubischer Spline-Funktionen in rechtwinkligen Polygonen angegeben. Die die Spline-Funktion beschreibenden Polynomkoeffizienten werden als Lösungen linearer Gleichungssysteme erhalten. Bei der numerischen Berechnung dieser Koeffizienten auf einer Rechenanlage werden dabei jedoch Rundungsfehler gemacht; die mit diesen Näherungswerten aufgestellte Spline-Funktion ist deshalb im allgemeinen nicht mehr zweimal stetig differenzierbar. Zur Behebung dieser Schwierigkeit wird die Einführung bikubischer Intervall-Splines vorgeschlagen. Es läßt sich ein Verfahren angeben, zu einer vorgegebenen Spline-Funktion einen Intervall-Spline zu konstruieren, der eine zweifach ableitungsverträgliche Einschließung darstellt.

Diese Intervall-Splines lassen sich zur Fehlerabschätzung bei einer Klasse elliptischer Randwertaufgaben im R^2 mittels eines Defektverfahrens verwenden, bei dem sämtliche Verfahrens- und Rundungsfehler erfaßt werden. Als Ergebnis erhält man eine Intervallfunktion, die die exakte Lösung der Randwertaufgabe einschließt.

H. MAIER: Ein Kollokationsverfahren zur Lösung nichtlinearer Integralgleichungen mit Methoden der Intervallrechnung

Man benutzt Intervallarithmetik um Fehlerabschätzungen für Näherungslösungen von HAMMERSTEIN'schen Integralgleichungen zu erhalten. Mittels "verallgemeinerter" Kollokation erhält man als endliches Analogon der Integralgleichung ein nichtlineares Gleichungssystem, welches mit dem NEWTON'schen Verfahren gelöst wird. Auf der Grundlage von Arbeiten von KANTOROWITSCH und MYSOVSKIH erhält man Abschätzungen des Diskretisierungsfehlers. Die intervallmäßige Durchführung des NEWTON-Verfahrens geschieht aufgrund von Arbeiten von ROKNE und LANCASTER, ALEFELD und HERZBERGER sowie HERZBERGER. Numerische Ergebnisse werden angegeben.

W. Appelt
K. Kansy
(St. Augustin-Birlinghoven)