MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 20/1973

Gruppen und Geometrien

20.5. - 26.5.1973

Unter der Leitung von Prof. Dr. D.G. Higman (Ann Arbor) und Prof. Dr. H. Salzmann (Tübingen) waren Mathematiker aus acht Ländern zusammengekommen, um Ergebnisse und Methoden aus Gruppentheorie und Geometrie auszutauschen und zu diskutieren. Entsprechend der nun schon mehrjährigen Tradition dieser Tagungsreihe nahmen dabei die Beziehungen der beiden Disziplinen untereinander, die Anwendungen der Ergebnisse der einen auf die andere, einen gewichtigen Platz ein.

Ein großer Teil der gruppentheoretischen Vorträge behandelte Permutationsgruppen (insbesondere neueste Ergebnisse über zweifach transitive Gruppen) und lineare Gruppen, wobei vielfältige Methoden zur Sprache kamen (u.a. auch Graphentheorie, Kodierungstheorie). Einige Vorträge zeigten, wie sich Ergebnisse über endliche Gruppen in geometrischer Sprache deuten und behandeln lassen. Die geometrischen Vorträge handelten, neben der Betrachtung geometrischer Gebilde selbst (Systeme von Unterräumen linearer Räume, Kugeln in affinen Räumen etc.), von den algebraischen Strukturen, die geometrischen Strukturen zugrundeliegen (Algebren, Quasikörper) und von ihren Automorphismen (Kollineationsgruppen endlicher und topologischer projektiver Ebenen, Automorphismengruppen von Blockplänen).

Neben den Vorträgen wurde die Gelegenheit zu Diskussionen und Gesprächen in zwanglosem Rahmen intensiv genutzt, und es ist zu erwarten, daß gerade auch dieser informelle Austausch über den Rahmen des hier Niedergelegten hinaus in der weiteren Arbeit der Beteiligten seine Früchte tragen wird.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

R. Baer, Zürich
A. Barlotti, Bologna
Th. Bedürftig, Tübingen
D. Betten, Tübingen
S. Breitsprecher, Tübingen
L. Bröcker, Kiel
F. Buekenhout, Brüssel
J. Cofman, Tübingen
A. Gardiner, London
H. Hähl, Tübingen
Chr. Hering, Tübingen
D.G. Higman, Ann Arbor
W. Jónsson, Montreal
M.J. Kallaher, Pullman
O.H. Kegel, London
W. Knapp, Tübingen
Christiane Lefevre, Brüssel
R. Lingenberg, Karlsruhe
D. Livingstone, Birmingham
M. Mäurer, Darmstadt
H. Salzmann, Tübingen
J.J. Seidel, Eindhoven
K. Strambach, Erlangen
A. Wagner, Birmingham
H. Wieland, Tübingen

Vortragsauszüge

D. BETTEN: Topologische und endliche Translationsebenen

Sei $(P,\underline{L})$ eine nicht-desarguessche 4-dimensionale Translationsebene, deren Kollineationsgruppe 8-dimensional ist und genau einen Achsenpunkt festhält. Dann wird $(P,\underline{L})$ von folgender Partition des $\mathbb{R}^4$ in 2-dimensionale Teilräume erzeugt:

$$\underline{B} = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ -s^3/3 & s^2+t \end{pmatrix} ; s,t \in \mathbb{R} \right\} \cup \{S\} .$$

Wenn man statt $\mathbb{R}$ geeignete endliche Körper wählt, dann liefert die Partition nicht-desarguessche endliche Translationsebenen.

S. BREITSPRECHER: Erweiterungen von Spiegelungsräumen

Seien $p_E : E \longrightarrow X$, $o_E : X \longrightarrow E$, $p_E \circ o_E = id_X$ Homomorphismen symmetrischer Räume (oder allgemeiner von Spiegelungsräumen) im Sinne von LOOS, derart daß auch die fasernweise Verknüpfung $\perp : E \times_X E \longrightarrow E$ ein Homomorphismus ist. Wenn die punktierten Fasern $(p^{-1}(x), o(x))$, $x \in X$, zu $(\mathbb{R}^n, 0)$ isomorph sind, so sind auch die fasernweise Addition und Skalarmultiplikation Homomorphismen, und E ist ein Vektorraum-Bündel über X. Die Objekte dieser Art, d.h. zerfallende Erweiterungen von X mit vektoriellem Kern, bilden mit den geeigneten Morphismen eine additive Kategorie. Die Erweiterungen mit Kern $(\mathbb{R}^n, 0)$ werden klassifiziert durch die stetigen Abbildungen $\sigma : X \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ mit $\sigma(x)^2 = \mathrm{id}$, $\sigma(x \perp y) = \sigma(x) \circ \sigma(y) \circ \sigma(x)$ für $x, y \in X$. Das Klassifikationsproblem wird daher im Prinzip gelöst durch den folgenden

Satz: Sei X ein zusammenhängender symmetrischer Raum. Unter den Paaren (G, δ), wo G eine (zusammenhängende) Liegruppe und $\delta : X \longrightarrow G$ eine stetige Abbildung mit $\delta(x)^2 = 1$, $\delta(x \perp y) = \delta(x)\delta(y)\delta(x)$ für $x, y \in X$ ist, gibt es ein universelles.

Das universelle Paar $(G(X), \delta_X)$ ist die "natürliche" Bewegungsgruppe von X und ist eine zentrale Erweiterung der von den Punktspiegelungen erzeugten Lieschen Transformationsgruppe von X. Die fraglichen Erweiterungen werden also klassifiziert durch die Darstellungen $G(X) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$.

L. BRÖCKER: Orthogonale Gruppen über pythagoreischen Körpern

Sei K ein Körper, $\mathrm{Char} K \neq 2$; (V, ϱ) ein quadratischer Raum und $O(V)$ die orthogonale Gruppe. Wir betrachten die Kette der Normalteiler:

$$O(V) \supseteq O^+(V) \supseteq O'(V) \supseteq \Omega(V) \supseteq \Omega(V) \cap Z(V) .$$

Nach klassischen Resultaten ist die Struktur der Faktorgruppen aufeinanderfolgender Normalteiler wohlbekannt, wenn der Witt-index von $\varrho \geq 1$ ist. Insbesondere ist $O'(V) = \Omega(V)$ und $\Omega(V)/\Omega(V) \cap Z(V)$ ist einfach für $n \geq 3$, $n \neq 4$. Ist ϱ anisotrop, so sind die entsprechenden Sätze im allgemeinen verletzt, z.B. über lokalen Körpern. Sie gelten aber über $\mathbb{R}$, über algebraischen Zahlkörpern für $n \geqslant 5$, und über euklidischen Körpern mit archimedischer Anordnung. Es wird gezeigt, daß sie auch für pythagoreische Körper gelten, die nur archimedische Anordnungen tragen. Als Hilfsmittel wird das folgende lokal-global-Prinzip benutzt, das über solchen Körpern gilt: Eine quadratische Form ϱ über K ist genau dann isotrop, wenn ϱ bei allen Anordnungen von K indefinit ist.

F. BUEKENHOUT: <u>The geometry of a finite group generated by a class of 3 - transpositions</u>

We start with a finite group G generated by a class D of 3 - transpositions, as defined by B.FISCHER and we discuss the following associated structure:

A point is an element of D ; if x,y are distinct points, the line xy is $\{x,y,xyx\}$. This structure has the following properties:

(1) any two points are on exactly one line

(2) each line has either 2 or 3 points

(3) if p is any point, then the natural symmetry σ_p is a collineation (σ_p maps p on p , maps q on q if the line pq has 2 points and maps q on the third point of pq otherwise)

(4) any 3 non-collinear points generate a subspace which belongs to one of the following 4 types: (a) affine plane of order 3 (b) 6 points with each point on 2 lines of 3 points, (c) 4 points with one line of 3 points, (d) 3 points.

Any structure satisfying (1),(2),(3) is called a Fischer space. These are also characterised by (1),(2),(4). If D is the set of natural symmetries of a finite Fischer space, then D is a class of 3 - transpositions of $G = \langle D \rangle$. FISCHER's methods can be nicely developped in the frame of Fischer spaces.

A. GARDINER: Arc transitivity in graphs

An old theorem of TUTTE states that for an trivalent graph Γ, and a group G of automorphisms of Γ acting transitively on the set of arcs of length s in Γ, we have $s \leq 5$. This motivated SIMS to investigate further permutation groups G on a set Ω, which have a suborbit of length 3. We show that the result of TUTTE extends in a natural way to graphs Γ, with a vertex-transitive group of automorphisms G, having the property that a vertex stabiliser G_α acts doubly primitively on some suborbit $\Gamma(\alpha)$.

H. HÄHL: Automorphismengruppen 4-dimensionaler topologischer Quasikörper

Die Betrachtung von Kollineationsgruppen 8-dimensionaler Translationsebenen erfordert als ersten Schritt eine Dimensionsabschätzung der Standgruppe eines nicht ausgearteten Vierecks; eine solche wird geleistet durch den folgenden

Satz: Die Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe eines 4-dimensionalen topologischen Quasikörpers K wirkt auf der zur Vektorgruppe $\mathbb{R}^4$ isomorphen additiven Gruppe von K linear konjugiert zur Standardwirkung einer Untergruppe von $SO(3)$.
(Zum Beweis betrachtet man die auf K durch

$$\Delta(a) = (\det(x \longmapsto a^{-1}x))^{-1}, \quad o \neq a \in K; \quad \Delta(o) = o$$

definierte "modulare Funktion". Sie erweist sich als stetig und invariant unter den Automorphismen von K und liefert unter der Automorphismengruppe invariante kompakte Nullumgebungen.)

Als Folgerung ergibt sich eine Klassifikation der 4-dimensionalen topologischen Divisionsringe mit 3-dimensionaler Automorphismengruppe: Jeder solche ist (als 4-dimensionale reelle Divisionsalgebra) isotop zu einer Algebra mit Basis $\{1,i,j,k\}$ und Multiplikation $i^2 = j^2 = k^2 = -\varrho$ $(\varrho \in \mathbb{R}, \varrho > o)$; $ij = -ji = k$; $ki = -ik = j$; $jk = -kj = i$.

CHR. HERING: Lineare Gruppen mit irreduziblen Untergruppen von Primzahlordnung

Sei V ein Vektorraum von endlicher Dimension n über einem Körper mit Primzahlordnung p. Weiter sei $\Phi_n(x)$ das n - te zyklotomische Polynom, $f = (n, \Phi_n(p))$, f^α die höchste Potenz von f, die $\Phi_n(p)$ teilt und $\Phi_n^*(p) = \frac{1}{f^\alpha}\Phi_n(p)$. Wir betrachten Gruppen G von linearen Transformationen von V mit der Eigenschaft $(|G|, \Phi_n^*(p)) \neq 1$:

Sei r ein Primteiler von $(|G|, \Phi_n^*(p))$, R eine r-Sylowgruppe von G, S der normale Abschluß von R in G und F die Fittinggruppe von G. Dann gilt der folgende

Satz: Hat G einen Kompositionsfaktor, der zu einer Chevalley-Gruppe isomorph ist und ist $\Phi_n^*(p) \neq n+1, 2n+1$ und $(n+1)(n+2)$, so ist SF/F isomorph zu einer der Gruppen $A_n(q)$, ${}^2A_n(q)$, ${}^2B_2(q)$, $C_n(q)$, ${}^2D_n(q)$ oder $G_2(q)$, wobei jeweils $|V| = q^{n+1}$, q^{n+1}, q^4, q^{2n}, q^{2n} bzw. q^6 ist.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich alle endlichen zweifach transitiven Gruppen mit regulärem Normalteiler klassifizieren, die einen Kompositionsfaktor haben, der zu einer bekannten nichtabelschen einfachen Gruppe isomorph ist.

D.G. HIGMAN: Weights

We study the family of algebras defined by coherent weights on a coherent configuration, exploiting the fact that these are semisimple algebras of matrices over $\mathbb{C}$ and that the Hadamard product gives a map $A_1 \times A_2 \longrightarrow A_3$ for some triples A_1, A_2, A_3 of such algebras.

W. JÓNSSON: The threefold covering group of the Mathieu group M_{22}

Joint work with Jahn M^c KAY was presented. Generators and defining relations für M_{22} and its threefold covering group, six by six unitary matrices with coefficients in GF(4) generating a group isomorphic to the threefold covering of M_{22} and the character table of the full covering group of M_{22} have been computed.

M.J. KALLAHER: Translation Planes with Affine Central Collineations

Let π be a translation plane of order p^r. An affine central collineation of π is a central collineation whose axis is an affine line; it is an affine elation if it is an elation, an affine homology if it is a homology. C.HERING and T.G.OSTROM have determined the nature of groups generated by elations. OSTROM also has investigated groups generated by affine homologies. Except for special cases such groups must contain affine elations if the plane has non-square order. The next step naturally is to investigate collineation groups of finite translation planes containing both affine elations and affine homologies. This talk describes such an investigation.

Let H be a group of homologies with center P and axis σQ, where P and Q are points on ℓ_∞, σ is an affine point and assume that at least one point R on ℓ_∞ is the center of a non-trivial affine elation. There are just three possibilities: (1) R is unique and either $R = P$ or $R = Q$; (2) R is not unique and both P and Q are centers of affine elations; (3) R is not unique and neither P nor Q are centers of affine elations. This gives us three types of planes (with respect to H). For each of these types we investigate the orbit decomposition on ℓ_∞. Also we show that type (3) planes with respect to H cannot exist in planes of non-square order.

O. KEGEL: Amalgams of Steiner systems

A (partial) Steiner system of type (k,n), $2 \leq k \leq n$, k finite and n any cardinal, is an incidence structure of points and blocks so that every k-tuplet of points is incident with (at most) one block and every block is incident with (at most) n points. If one identifies isomorphic closed substructures of two disjoint partial Steiner systems of type (k,n), the resulting amalgam is again of type (k,n). Since the technique of free extensions also works for partial Steiner systems of type (k,n), every such partial Steiner system embeds into a Steiner system of the same type. Using these two observations and the amalgam of copies of a given Steiner system with respect to the tree of some free group one can prove that to any Steiner system $\underset{\sim}{S}$ of type (k,n) there exists a Steiner system $\underset{\sim}{T}$ of the same type which contains $\underset{\sim}{S}$ as a substructure and so that $\mathrm{Aut}\ \underset{\sim}{S} \subseteq \mathrm{Aut}\ \underset{\sim}{T}$, $\mathrm{Aut}\ \underset{\sim}{T}$ acts transitively on the blocks of $\underset{\sim}{T}$, and the stabilizer of a block of $\underset{\sim}{T}$ induces the full symmetric group on the points of this block.

W. KNAPP: <u>On primitive extensions of some solvable doubly transitive permutation groups.</u>

A proof for the following was given:

<u>Theorem.</u> Suppose (G,Ω) is a finite primitive permutation group, having an orbital Δ of length 2^q (where q is an odd prime) such that $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ is doubly transitive and solvable for $\alpha \in \Omega$.

Then exactly one of the following assertions holds:

(1) (G,Ω) is primitive solvable and not doubly transitive.

(2) $(G,\Omega) \cong (PSL(2,2^q), \Pi_{2^q+1})$ or $(G,\Omega) = (P\Gamma L(2,2^q), \Pi_{2^q+1})$, the action of the linear groups being the natural one on the projective line Π_{2^q+1}.
In particular (G,Ω) is triply transitive.

(3) $q = 3$ and $G_\alpha^{\Delta(\alpha)} \cong \Gamma(8)$.
$(G,\Omega) \cong (G,G:N_2)$ where N_2 is a Sylow 2-nomalizer maximal in G. (G,Ω) is not doubly transitive. $S = \mathrm{soc}\ G$ is a simple group of Janko-Ree-Type.

Either (i) $G = S$ and $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ faithful
or (ii) $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ is not faithful, $G = [S]H$, $G_\alpha = S_\alpha \times H$
with $S_\alpha \cong \Gamma(8)$, $H = G_{\Delta(\alpha)} \cong [Z_7]Z_3$.

H acts as a noncyclic group of outer automorphisms on S, centralizing a Sylow 2-nomalizer S_α of S.

Remark: (3i) does occur, an example being provided by $G = J_{175,560}$. All other known simple groups of Janko-Ree-Type cannot occur. Case (3ii) implies that S is a simple group of Janko-Ree-Type which is hitherto unknown. The occurrence of (3ii) seems to be unlikely.

CHRISTIANE LEFEVRE: An application of coding theory to imprimitive rank 3 groups of block length 2.

Let G be a rank 3 imprimitive group having n blocks of length 2. G possesses a normal subgroup $N \simeq \mathbb{Z}_2^k$ fixing each block and G induces a doubly transitive group M on the set of blocks.

It is possible to consider N as a binary linear code $C(nk)$ of length n and dimension k of which M is an automorphism group. For little values of n, for instance for $n \leq 10$, the groups M are known by the classification of doubly transitive groups and we can determine, for each M, all codes $C(nk)$ of which M is an automorphism group. Then, given a pair $(M, C(nk))$, where M is an automorphism group of $C(nk)$, it is possible to build all groups G which induce M on the set of blocks and of which the normal subgroup N is the code $C(nk)$. And so we classify the imprimitive rank 3 groups of block length 2 and degree less than 20.

H. MÄURER: Eine Kennzeichnung der Kugeln

Ist A ein mindestens 3-dimensionaler affiner Raum von Charakteristik $\neq 2$, so wird die Menge der Kugeln (definiert als die Menge der Quadriken in A, die auf der uneigentlichen Hyperebene eine feste elliptische Polarität induzieren) durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

a) Jede Kugel ist ein Ovoid
b) Haben die verschiedenen Kugeln α,β wenigstens 2 Punkte gemein, so existiert eine Hyperebene h mit $\alpha\cap\beta = \alpha\cap h$
c) Durch je 4 nicht in einer Ebene liegende Punkte geht wenigstens eine Kugel.
d) Zu jedem Punkt P einer beliebigen Hyperebene h und jedem Punkt $Q\notin h$ existiert genau eine Kugel α mit $Q\in\alpha$ und $\alpha\cap h = \{P\}$
e) Die Familie der Kugeln ist invariant gegenüber Punktspiegelungen.

H. SALZMANN: <u>4-dimensional planes</u>

Let $\mathcal{P}$ be a topological projective plane with compact 4-dimensional pointset. If the collineation group $\Gamma_{\mathcal{P}}$ has dimension 8 (this implies that $\mathcal{P}$ is non-arguesian) then $\mathcal{P}$ is a translation plane or its dual, and Γ fixes exactly one elelement or exactly one flag. In the latter case, $\mathcal{P}$ is the unique plane constructed by BETTEN (cf. p. 2).

J.J. SEIDEL: <u>Equi-isoclinic subspaces</u>

Two subspaces are isoclinic whenever their angles are all equal. We pose the problem of finding the maximum number $v_\lambda(n,r)$ of equi-isoclinic n-subspaces in Euclidean r-space with the angle $\arccos\sqrt{\lambda}$. Results: $(n-r\lambda)\cdot v_\lambda(n,r)\leq r(1-\lambda)$; $v_\lambda(1,r)\leq v_\lambda(n,rn)$. The values of $v_\lambda(n,2n)$ are determined. For n=1 there are relations to certain finite simple groups. (Joint work with P.W.H. LEMMENS, to be published in Proc. Ned.Akad.Wetensch.).

Karl STRAMBACH: <u>Zur Existenz von Quasikörpern</u>

Es wurden alle (nichtkommutativen) Algebren A vom Rang 4 über einem Körper K einer Charakteristik $\neq 2$ bestimmt, die eine quadratische Erweiterung C von K als Unterkörper so enthalten, daß sie über C ein Bimodul sind und außerdem für alle $x\in C$ sowie $\alpha,\beta\in A$ die Beziehungen $(\alpha x)\beta = \alpha(x\beta)$

und $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ gelten. Es wurden die Automorphismengruppen dieser Algebren gefunden und die Divisionsalgebren aus dieser Klasse ausgesondert.

H. WIELANDT: Beschränkung der Fixpunktzahl in Permutationsgruppen

Gegeben sei eine Permutationsgruppe G auf einer Menge X (beide endlich) und eine natürliche Zahl n. Wir schreiben $(G,X) \in F_n$, wenn jedes Element von G, welches n verschiedene Fixpunkte in X hat, gleich $1 \in G$ ist.
Frage: Für welche Normalteiler N von G gilt $(G/N, X/N) \in F_n$?
(Dabei bedeutet X/N die Menge der Bahnen von N auf X).
Antwort: Hinreichend, aber nicht notwendig ist, daß N alle Elemente von G enthält, welche mindestens n Fixpunkte in X haben.
Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend dafür, daß für jede Untergruppe H von G gilt:
$(H/H \cap N, X/H \cap N) \in F_n$.

Th.Bedürftig (Tübingen), H.Hähl (Tübingen)