MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 21/1973

Arbeitstagung über Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener nilpotenter Gruppe

26. bis 27.Mai 1973

Seit langem bestand der Wunsch, die Arbeiten von Šafarevič über die Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe auf einer Tagung genauer kennen zu lernen. In seiner noch nicht veröffentlichten Arbeit "Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie" stellt J.Neukirch Hilfsmittel bereit, die den Zugang zu diesen Arbeiten wesentlich erleichtern und hoffen lassen, daß man mit ihnen bei ähnlichen Problemen einer Lösung näher kommen wird.

Auf die Initiative von Herrn Frey traf sich der Kreis um P.Roquette, erweitert um Teilnehmer aus Erlangen, Karlsruhe und Regensburg. Aufgegliedert in einzelne Vorträge wurde der Beweis über die Existenz von Zahlkörpern mit gegebener p-Gruppe an Hand der neuen Ergebnisse von Neukirch vorgetragen.

Obgleich für die Tagung nur zwei Tage zur Verfügung standen, war sie doch besonders deshalb sehr erfolgreich, weil sie die Teilnehmer mit neuen Methoden bei der Konstruktion von Zahlkörpern vertraut machte.

Leiter der Tagung war P.Roquette.

Teilnehmer

Brandis, Heidelberg
Frey, Heidelberg
Geyer, Erlangen
Göhner, Heidelberg
Hain, Erlangen
Jarden, Heidelberg
Köhn, Erlangen
Leicht, Heidelberg
Martens, Heidelberg
Matzat, Karlsruhe
Neukirch, Regensburg
Pank, Heidelberg
Rehm, Karlsruhe
Ritter, Heidelberg
Roquette, Heidelberg
Schneider, Erlangen
Sehgal, Heidelberg
Strubel, Regensburg
Transier, Heidelberg
Zimmer, Karlsruhe

Vortragsauszüge

NEUKIRCH: Übersicht über den Beweisgang

Problem: Gegeben ist ein endlicher Zahlkörper k und es sei $\mathfrak{G}$ die Galoisgruppe des algebraischen Abschlusses von k über k. Zu vorgegebener Gruppe G der Ordnung p^{α}

ist ein Körper K zu konstruieren, dessen Galoisgruppe über k isomorph zu G ist.

Bei der Lösung des Problems beschränkt man sich auf die Konstruktion von Scholzschen Körpern. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $G = G_\delta^c$ von δ Elementen frei als p-Gruppe der p-Nilpotenzklasse $c-1$ erzeugt.

Man führt Induktion über c aus.

Ist zu jedem δ ein Scholzscher Körper K_δ^c mit $G(K_\delta^c/k) \simeq G_\delta^c$ gefunden, so ist das Einbettungsproblem

$$(*) \quad \begin{tikzcd} & & & \mathfrak{G} \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G_\delta^{c+1} \arrow[r] & G_\delta^c \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

so zu lösen, daß ψ einen Scholzschen Körper definiert. Im Allgemeinen ist dieses Problem über K_δ^c nicht lösbar. Es gibt aber zu jedem δ ein $d > \delta$ und einen surjektiven Homomorphismus $S : G_d^c \longrightarrow G_\delta^c$, so daß über dem durch S definierten Unterkörper K^S von K_d^c das Einbettungsproblem (*) eine Scholzsche Lösung hat.

PANK: <u>Die Theorie des Einbettungsproblems</u>

Ist $\mathfrak{G}_\mathfrak{p}$ eine zu $\mathfrak{p}$ gehörende Zerlegungsgruppe, so gibt es zu jedem globalen Einbettungsproblem

$$\begin{tikzcd} & & & & \mathfrak{G} \arrow[d, "\varphi"] & \\ \mathcal{E}(\mathfrak{G}) \; : \; 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[rr, "j"'] & & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

die lokalen Einbettungsprobleme

$$\begin{tikzcd} & & & \mathfrak{G}_p \arrow[d] & \\ \mathcal{E}(\mathfrak{G}_p) \; : \; 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & E_p \arrow[r] & G_p \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \quad ,$$

wobei $G_p := \varphi(\mathfrak{G}_p)$ und $E_p := j^{-1}(G_p)$ ist .

<u>Lokal-Global-Prinzip</u>: Falls A im Zentrum von E liegt, ist das globale Einbettungsproblem genau dann lösbar, wenn alle lokale Einbettungsprobleme lösbar sind.

Gewisse Lösungsmengen L_p von $\mathcal{E}(\mathfrak{G}_p)$ bilden eine <u>lokale Vorgabe</u> $L = \prod_p L_p$. Eine Lösung von $(\mathcal{E}(\mathfrak{G}),L)$ ist eine Lösung $\psi : \mathfrak{G} \longrightarrow E$, für die $\psi_{|\mathfrak{G}_p} \in L_p$ ist.

<u>Satz</u>: Ist $\mathcal{E}(\mathfrak{G})$ lösbar, so ist jedem Einbettungsproblem mit lokaler Vorgabe $(\mathcal{E}(\mathfrak{G}),L)$ ein Hindernis $\eta(L)$ in einer gewissen Hindernisgruppe Δ zugeordnet, dessen Verschwinden gleichbedeutend mit der Lösbarkeit von $(\mathcal{E}(\mathfrak{G}),L)$ ist.

RITTER: <u>Dualitätssätze</u>

Aus den Dualitätssätzen von Tate und Poitou läßt sich die folgende Verallgemeinerung gewinnen: Ist A ein $\mathfrak{G}$-Modul, so sei $A'=\mathrm{Hom}(A,\mu)$ der zu A duale Modul. Zu einer offenen Untergruppe Λ von

$\prod_p H^q(\mathfrak{G}_p,A)$ ist $\rho_\Lambda : H^q(\mathfrak{G},A) \longrightarrow \prod_p H^q(\mathfrak{G}_p,A)/\Lambda$

komponentenweis durch die Restriktion definiert und es seien

$\Delta^q(\mathfrak{G},A,\Lambda) := \mathrm{Koker}\,\rho_\Lambda$ und $\nabla^q(\mathfrak{G},A,\Lambda) := \mathrm{Ker}\,\rho_\Lambda/\mathrm{Ker}\,\rho_0$.

<u>Satz</u>: Für $q = 0,1,2$ stehen $\Delta^q(\mathfrak{G},A,\Lambda)$ und $\nabla^q(\mathfrak{G},A',\Lambda^\perp)$ in Dualität. Dabei ist $\Delta^1(\mathfrak{G},A,\Lambda)$ die "Hindernisgruppe".

NEUKIRCH: <u>Scholzsche Einbettungsprobleme</u>

$K|k$ heißt <u>Scholzsch</u> <u>hinsichtlich</u> n, wenn für $m = n\cdot[K:k]$

1) alle Primstellen $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}/m\cdot\infty$ voll zerfallen

2) alle verzweigten Primstellen rein verzweigt und voll zerlegt in $k(\zeta_m)/k$ sind.

<u>Satz</u>: Ist G die Galoisgruppe von K/k, dann besitzt jedes zentrale Einbettungsproblem mit Kern A eine Lösung, falls K/k Scholzsch hinsichtlich $\#A$ ist.

Ist K/k Scholzsch hinsichtlich p^{α} mit der p-Gruppe G, so gibt es eine lokale Vorgabe L zum Einbettungsproblem $\mathcal{E}(\mathfrak{G})$ mit Kern $A = \underbrace{\mathbb{Z}/p \times \ldots \times \mathbb{Z}/p}_{r\text{-mal}}$, so daß jede Lösung von $(\mathcal{E}(\mathfrak{G}),L)$ eine hinsichtlich $p^{\alpha-r}$ Scholzsche Körpererweiterung mit der Galoisgruppe E definiert. Über das Hindernis $\eta(L)$ gibt der folgende Satz Auskunft:

<u>Satz</u>: a) Falls K/k Scholzsch ist, gibt es eine bilineare Abbildung $(\ ,\ ) : H^1(G,\mathbb{Z}/p) \times H^2(G,\mathbb{Z}/p) \longrightarrow \mathbb{Z}/p$ und eine lineare Abbildung $(\ )_h : H^1(G,\mathbb{Z}/p) \longrightarrow \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ mit der Eigenschaft: Ist $(X)_h = 0$ und $(\chi,X) = 0$ für alle $\chi \in H^1(G,\mathbb{Z}/p)$, so verschwindet das Hindernis $\eta(L)$. Dabei ist X durch die Gruppenerweiterung $1 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$ definiert.

b) Falls k die p-ten Einheitswurzeln nicht enthält, ist $\eta(L) = 0$.

STRUBEL: <u>Funktionen von Homomorphismen</u>

An Stelle von G betrachtet man die Gruppen G_d^c, die von d Elementen als p-Gruppe der p-Nilpotenzklasse $c-1$ frei erzeugt sind und zeichnet für $d \geq \delta$ gewisse surjektive Homomorphismen $S : G_d^c \longrightarrow G_\delta^c$ als "kanonisch" aus. Ein solcher Homomorphismus definiert eine Inflationsabbildung $H^q(G_\delta^c, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow H^q(G_d^c, \mathbb{Z}/p)$, wobei das Bild der Klasse x mit x^S bezeichnet wird. Die "Invarianten" (χ^S, X^S) und $(X^S)_h$ sind auf diese Weise "Funktionen von Homomorphismen" mit Werten in einer endlichen abelschen Gruppe, für die ein Grad definiert ist. Rein kombinatorisch beweist man den

Satz: Sind $f_1, \ldots, f_k$ Funktionen von kanonischen Homomorphismen $G_d^c \longrightarrow G_\delta^c$ vom Grad $\leq n$, so nehmen sie gemeinsam auf mindestens einem Homomorphismus den Wert 0 an, vorausgesetzt, daß d groß genug ist.

GEYER: Die Invarianten (χ, X), $(X)_h$ als Funktionen von Homomorphismen

Die Gruppen G_d^c gewinnt man als Faktorgruppe der freien von d Elementen erzeugten Gruppe F nach einem geeigneten Normalteiler F_c. Unmittelbar ergibt sich daraus die Isomorphie von $H^2(G_d^{c-1}, \mathbb{Z}/p)$ und $H^1(F_c/F_{c+1}, \mathbb{Z}/p)$. Weiter ist nach einem Ergebnis von Skopin F_c/F_{c+1} isomorph zum $\mathbb{F}_p$-Modul $\mathcal{L}_d$ der Liepolynome in d Variabeln von Grad $\leq c$, also daß $X \in H^2(G_d^{c-1}, \mathbb{Z}/p)$ als Charakter von $\mathcal{L}_d$ aufgefaßt werden kann. Jedem dieser Charaktere ist eine Ordnung bezüglich einer Variablen x_δ zugeordnet und es zeigt sich, daß die Charaktergruppe von $\mathcal{L}_d$ eine Basis besitzt, die nur aus Charakteren der Ordnung $\leq c$ besteht.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Lemma: Ist X von der Ordnung $\leq n$ in x_δ , so ist die Funktion $f(S) = X^S$ eine Funktion vom Grad $\leq n$.

Satz: Ist X von der Ordnung $\leq n$ in x_δ , so sind die Invarianten $f(S) = (X^S)_h$ und $f_i(S) = (\bar{X}_i^S, X^S)$ (für $i \leq \delta$) Funktionen vom Grad $\leq n+1$.

HAIN: Existenz von Körpern mit gegebener p-Gruppe

Lemma: Zu vorgegebenem δ gibt es ein $C(\delta)$, so daß für jedes $d \geq C(\delta)$ und für jede Scholzsche Erweiterung $K|k$ mit $G(K|k) \cong G_d^{(c)}$ ein surjektiver Homomorphismus $S : G_d^c \longrightarrow G_\delta^c$ existiert, so daß auf dem durch S definierten Körper K^S alle Invarianten verschwinden.

Hauptsatz: Ist k ein endlicher Zahlkörper und G eine endliche Gruppe der Ordnung p^α , dann gibt es eine Körpererweiterung $K|k$ mit $G(K|k) \cong G$.

W. Strubel (Regensburg)