MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 23/1973

Numerische Methoden der Approximationstheorie

3.6. bis 9.6.1973

Die letzte Tagung über Numerische Probleme der Approximationstheorie in Oberwolfach fand vor zwei Jahren statt. Daher hatte die jetzige Veranstaltung unter der Leitung von Professor Collatz (Hamburg) und Professor Meinardus (Erlangen) das Ziel, den in der Zwischenzeit erreichten Fortschritt auf diesem Gebiet durch ausgewählte Vorträge erkennen zu lassen. Die große Zahl der Vorträge, sowie die Fülle der behandelten Themen zeigte die wachsende Bedeutung, die diesem Gebiet auch in der Zukunft für die Anwendungen zukommt und machte deutlich, daß Tagungen dieser Art künftig in kürzeren Zeitabständen stattfinden sollten.

Hervorzuheben ist, daß neben approximationstheoretischen Vorträgen und solchen aus der Optimierung auch neue Fragestellungen aus der Praxis (vgl. etwa die Vorträge der Herren Kubik und Gutknecht) vorgetragen wurden, die z.T. noch einer exakten mathematischen Form bedürfen. Hieraus können sich fruchtbare Impulse sowohl für theoretische Untersuchungen als auch für die eng mit der Praxis verbundene wissenschaftliche Tätigkeit ergeben.

In einer Diskussion über das Selbstverständnis der Angewandten Mathematik waren sich die Tagungsteilnehmer darüber einig, daß für die Effizienz der Forschung in der Angewandten Mathematik der Bezug zur Praxis unabdingbar ist.

Die 49 Teilnehmer, darunter aus Rumänien, Großbritannien, U S A , Schweiz, Niederlande, Frankreich, Bulgarien, Kanada, Ungarn, Belgien konnten durch den regen Gedankenaustausch viele Anregungen für ihre wissenschaftliche Arbeit gewinnen.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

J. Albrecht, Clausthal-Zellerfeld
R. Ansorge, Hamburg
H.-P. Blatt, Erlangen
D. Braess, Münster
K.W. Brodlie, Dundee (Schottland)
B. Brosowski, Göttingen
E.W. Cheney, Austin (USA)
L. Collatz, Hamburg
D. Gaier, Gießen
C. Geiger, Hamburg
M. Gutknecht, Zürich
K.P. Hadeler, Tübingen
R.P. Hettisch, Enschede (Niederlande)
K.-H. Hoffmann, München
W. Hofmann, Hamburg
M. Hollenhorst, Erlangen
Kolumban, I. Cluj (Rumänien) - Hamburg
H.J. Kornstaedt, Berlin
W. Krabs, Darmstadt
U. Krug, Gießen
K. Kubik, den Haag (Niederlande)
P.J. Laurent, Grenoble (Frankreich)
F. Lempio, Hamburg
H.L. Loeb, Eugene (USA) - Bonn
J.T. Marti, Zürich (Schweiz)
G. Meinardus, Erlangen
G. Opfer, Hamburg
A.M. Ostrowski, Certenago
B. Penkov, Sofia (Bulgarien)
V. Popov, Sofia (Bulgarien)
E. Popoviciu, Cluj (Rumänien)
T. Popoviciu, Cluj (Rumänien)

R. Schaback, Münster
G. Schmeißer, Erlangen
E. Schmidt, Calgary (USA)
R. Schmidt, Berlin
L.L. Schumaker, Austin (USA)
B. Sendov, Sofia (Bulgarien)
D.D. Stancu, Cluj (Rumänien)
H. Strauß, Erlangen
J. Szabados, Budapest (Ungarn)
A. Talbot, Uxbridge (England)
H.-J. Töpfer, Berlin
H. Voß, Hamburg
H. Werner, Münster
J. Werner, Göttingen
W. Wetterling, Enschede (Niederlande)
L. Wuytack, Antwerpen (Belgien)
R. Zielke, Tübingen

Vortragsauszüge

H.-P. BLATT: Konstruktion einer Minimallösung bei linearer Simultanapproximation.

B sei eine abgeschlossene Teilmenge des Intervalls $[a,b]$, V ein n-dimensionaler Haar'scher Unterraum von $C[a,b]$, f^+ sei eine auf B oberhalbstetige und f^- eine auf B unterhalbstetige Funktion mit $f^+ \geq f^-$. Wir suchen ein $v_o \in V$, da die Zahl $\Delta(v) := \max\{||f^+ - v||, ||f^- - v||\}$ bezüglich $v \in V$ minimiert. Dabei verstehen wir unter $||\cdot||$ die Tschebyscheff-Norm über B.

Der bekannte Austauschalgorithmus von Remez wird so verallgemeinert, daß

(1) das Verfahren auch im Ausartungsfall, d.h. wenn $\inf_{v \in V} \Delta(v) = \frac{1}{2} ||f^+ - f^-||$ ist, anwendbar bleibt,

(2) jeder Iterationsschritt aus der Berechnung einer "strikten Minimallösung" über n+1 Punkten besteht.

Es wird gezeigt, daß die im Verfahren konstruierte Folge von Näherungslösungen eine Teilfolge enthält, die gegen eine Minimallösung konvergiert, wenn f^+ und f^- stetig sind oder V ein ET-System der Ordnung 3 ist.

D. BRAESS: Theorie kritischer Punkte bei der nichtlinearen Tschebyscheff-Approximation.

Es wird das Problem behandelt, die Anzahl der lokal besten Approximationen bei der nichtlinearen Tschebyscheff-Approximation abzuschätzen. Die klassische Morsetheorie ist nicht verwendbar, weil die Abstandsfunktion i.a. nicht differenzierbar ist. Deshalb wird hier ein Punkt n in einer Menge M als kritisch für f bezeichnet, wenn 0 eine b.A zu $f-n$ im Tangentialkegel $C_n M$ ist. Falls mit $a<b$ (unter geeigneten technischen Voraussetzungen) die Menge $\{n \in M, a \leq ||f-n|| \leq b\}$ kompakt ist und keine kritischen Punkte enthält, ist $M^a := \{u \in M , ||f-n|| \leq a\}$ Retrakt von M^b. Folglich enthält eine kompakte, zusammenhängende Menge M^a einen kritischen Punkt, der nicht lokal beste Approximation ist, wenn in M^a wenigstens zwei strikt lokale Minima enthalten sind. Dies ist bei der Tschebyscheff-Approximation wegen "strenger, lokaler Eindeutigkeit" nicht möglich und wir erhalten Eindeutigkeit. Für die Exponentialapproximation mit N Termen schließt man daraus konstruktiv, daß höchstens $N!$ lokal beste Approximationen vorliegen.

K.W. BRODLIE: An algorithm for unconstrained minimization without evaluating derivatives.

We present some joint work with M.J.D. Powell (AERE, Harwell, England) on a new algorithm for unconstrained minimization which does not require the evaluation of derivatives. The algorithm carries out linear searches along successive sets of orthonormal directions, which are modified as the algorithm proceeds. In the special case of the minimization of the quadratic function

$$Q(\underline{x}) = \frac{1}{2} x^T A \underline{x} + \underline{b}^T x + c ,$$

where A is a symmetric positive definite matrix, we show that the successive direction sets converge to the set of eigenvectors of A, that is, the set of principal axes of Q. This is proved by observing the relationship between the algorithm and Jacobi's method for finding the eigensystem of a real symmetric matrix. Some numerical experience with the algorithm on well-known test problems is reported.

B. BROSOWSKI: Beste Approximation durch Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten und Anwendungen.

Zur besten Approximation reeller, stetiger Funktionen auf einem Intervall wurden Mengen V_c approximierender Funktionen mit Hilfe von Rechenschemata definiert, die eine gegebene Komplexität c nicht übersteigen. Unter einem Rechenschema versteht man eine Abbildung $R : [1:n] \to \Omega N^*$, die gewissen Bedingungen genügt (Ω eine Menge von Operationssymbolen). Als Maß für die Komplexität eines Rechenschemas wurde die Operationszeit gewählt, die bei gegebener Operationszeit der Elemente aus Ω unter Berücksichtigung von Verzweigungen und unter Verwendung eines Prozessors definiert wurde. Das Approximationsproblem bezüglich V_c führte in den betrachteten

Fällen auf die Approximation durch Polynome, bei denen einige Koeffizienten nur ganzzahlige Werte annehmen können, bzw. auf ein Problem der Segmentapproximation mit derartigen Polynomen. Es wurde gezeigt, daß die betrachteten Mengen V_c keine Tschebyscheff-Mengen und auch keine Sonnen sind. An Hand eines Beispiels wurde die praktische Verwendbarkeit diskutiert.

E.W. CHENEY: Numerical Determination of Optimal Operators.

It is an open problem in approximation theory to determine the linear projection P of $C[-1,1]$ onto the subspace Π_n of polynomials of degree n for which

$$||P|| = \min !$$

A numerical method for solving this problem will be described.

L. COLLATZ: Bemerkungen zur verketteten Approximation.

Die Aufgabe, eine gegebene Funktion $f(x_j)$ durch eine Funktion $w(x_j,a_\nu) = w(x_1,\ldots,x_n, a_1,\ldots,a_p)$ einer gegebenen Klasse W zu approximieren, heiße "verkettete Approximation", wenn in dem analytischen Ausdruck für w ein oder mehrere der Parameter a_ν an mindestens zwei Stellen vorkommen, ohne daß dies durch eine eineindeutige Transformation der Parameter vermieden werden kann. Beispiel: $f(x)$ durch $w = a_1 + \frac{x}{a_1}$ approximieren: verkettet durch $w = (a_1 + a_1{}^3)x$ approximieren: nicht verkettet.

Bei den Anwendungen treten sehr häufig verkettete Approximationen auf, wie an Beispielen aus anderen Vorträgen dieser Tagung, am Beispiel einer inversen Differentialgleichungsaufgabe (Schwingungsaufgabe) und an der Iteration bei einer nichtlinearen elliptischen Randwertaufgabe (stationäre Temperaturverteilung) gezeigt wird. Daher verdient die verkettete Approximation wohl eine stärkere Beachtung, als bisher.

Als methodisches Hilfsmittel steht die Theorie der H-Mengen zur Verfügung.

M. GUTKNECHT: Ein Abstiegsverfahren für Tschebyscheff-Approximation und seine Anwendung auf den Entwurf digitaler Filter.

Es wird ein Abstiegsverfahren skizziert, das auf eine große Klasse von nichtlinearen Tschebyscheff-Approximationsproblemen anwendbar ist. Im Prinzip kann damit eine beliebige stetige Abbildung eines kompakten Raumes in einen Hilbertraum approximiert werden. Im wesentlichen wird nur vorausgesetzt, daß die Familie der Approximierenden so parametrisiert ist, daß die Parameter eine geeignete Teilmenge einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit bilden und nach ihnen differenziert werden kann. Die Konvergenz des Verfahrens nach einem stationären Punkt des Fehlerfunktionals - der in der Regel ein lokales Minimum sein wird - kann bewiesen werden. Das Verfahren geht in seiner einfachsten Version unmittelbar aus einer bekannten Verallgemeinerung des Kolmogoroff'schen Kriteriums hervor. Es wurde praktisch erprobt am Entwurf digitaler Filter.

K.P. HADELER: Über die Betragssumme der Nullstelle eines Polynoms.

Es wird eine kurze Übersicht über Einschließungen von Polynomnullstellen gegeben. Insbesondere kann eine Bemerkung von J. Albrecht, daß die singulären Zahlen der Begleitmatrix eines Polynoms sich explizit durch die Koeffizienten darstellen lassen, dazu benutzt werden, Abschätzungen für die Betragssumme der Nullstellen zu gewinnen.

R.P. HETTICH: Kriterien erster und zweiter Ordnung für lokal beste Approximationen.

Das Problem der Tschebyscheff-Approximation auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ wird aufgefaßt als ein Optimierungsproblem der Gestalt: Bestimme

$x^o \in M := \{x \mid f(x,y) \le 0 \ , \ y \in Y\} \le \mathbb{R}^n$, so daß $F(x^o) \ge F(x)$

für alle $x \in M$. Y ist dabei eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Die für solche Probleme bekannten notwendigen, resp. hinreichenden Kriterien erster und zweiter Ordnung für optimale Lösungen lassen sich so modifizieren, daß die "constraint qualifications", die man braucht, um die notwendigen Kriterien anwenden zu können, bei der diskreten Approximation stets und bei der kontinuierlichen unter einer einfach zu prüfenden Zusatzbedingung erfüllt sind. Hierbei muß die Bedingung, daß die mit der Lagrangefunktion gebildete quadratische Form $\xi^T L'' \xi$ (semi-) definit ist, auf einem gewissen linearen Raum ersetzt werden durch die Bedingung, daß es zu jedem ξ aus einem gewissen Kegel Lagrange-Multiplikatoren gibt, so daß diese Form negativ, resp. nicht positiv wird.

K.KOLUMBÁN: Über die nichtlineare trigonometrische Approximation.

Es sei $w := (a_o, a_1, \dots, a_n; \ \alpha_1, \dots, \alpha_n; \ \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{3n+1}$

und $F(w)(x) := a_o + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(\alpha_k x + \beta_k)$. Charakterisierungs- und Eindeutigkeitssätze werden für die Lösung der Tschebyscheff-Approximationsaufgabe

$$\| f - F(w) \|_{C[0,1]} = \min_w \ , \qquad f \in C[0,1]$$

gegeben. Es wird gezeigt, daß die Menge aller Funktionen $F(w)$ im Raum aller auf $\mathbb{R}$ beschränkten Funktionen bezüglich der Norm

$$||g|| := \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$$

abgeschlossen ist.

W. KRABS: Optimale Fehlerabschätzungen bei linearen Integralgleichungen.

Vorgegeben seien zwei lineare Integralgleichungen der Form $x - A(x) = y$ und $x - \hat{A}(x) = \hat{y}$ in einem geeignet normierten Funktionenraum E, wobei A und $\hat{A}$ Integraloperatoren auf E sind mit $||A|| < 1$ und $||\hat{A}|| < 1$. Für die eindeutigen Lösungen $x_{y,A}$ und $x_{\hat{y},\hat{A}}$ dieser beiden Gleichungen gilt dann die Abschätzung

$$||x_{y,A} - x_{\hat{y},\hat{A}}|| \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{||y||}{(1-||A||)(1-||\hat{A}||)} \, ||A-\hat{A}|| + \dfrac{||y-\hat{y}||}{1-||\hat{A}||} , \\ \\ \dfrac{||\hat{y}||}{(1-||A||)(1-||\hat{A}||)} \, ||A-\hat{A}|| + \dfrac{||y-\hat{y}||}{1-||A||} \end{array} \right\} .$$

Diese Abschätzung legt zur Gewinnung von Näherungslösungen für die Gleichung $x - A(x) = y$ zwei Vorgehensweisen nahe:

1) Man ersetzt den Operator A durch den Operator $\hat{A}$ in einer geeigneten Klasse von Operatoren derart, daß man die Gleichung $x - \hat{A}(x) = y$ leicht lösen kann und $||A - \hat{A}||$ möglichst klein ausfällt. Dadurch erhält man ein Approximationsproblem für lineare Operatoren.

2) Man wählt $\hat{x}$ in einer Klasse von Funktionen in E so, daß der Defekt $||\hat{x} - A(\hat{x}) - y|| := ||\hat{y} - y||$ $(A = \hat{A})$ möglichst klein ausfällt. Man erhält dann ein Approximationsproblem im Funktionenraum E, das im allgemeinen einfacher ist als das in 1), und gewinnt überdies auch noch leicht eine untere Schranke für $||x_{y,A} - x_{\hat{y},A}||$.

Bestimmt man nun in 1) die Näherungsoperatoren $\hat{A}$ für A dadurch, daß man den Kern von A durch entartete Kerne ersetzt, so läßt sich zeigen, daß man die Vorgehensweise 1) durch 2) ersetzen kann und dadurch höchstens bessere Abschätzungen erhält.

K. KUBIK: Zur Formulierung von Approximationsproblemen.

Es wird das folgende Problem betrachtet: Es sei eine Funktion $z(x)$, $x = \{x_1 \ldots x_n\}$ zu approximieren, von welcher eine Anzahl von Funktionenwerten $z(x_\alpha) = z_\alpha$, $\alpha=1\ldots m$, (1), aus Messungen und ein Modell - z.B. von der Form $Lz(x) = 0$, (2) L linearer Differentialoperator - mit gewisser Betraubarkeit bekannt seien. Ein Rand und Randbedingungen im üblichen Sinn für (2) sind i.a. nicht bekannt. Von der Approximationsfunktion $u(x)$ aus der Menge aller reellen Funktionen oder einer Teilmenge daraus wird gefordert, daß sie den Bedingungen der Messungen und des Modells im Mittel genügt:

$$J(u) = \int_\Omega (Lu)^2 dx + P \sum_\infty (u(x_\alpha) - z_\alpha)^2 \to \min! \quad P \text{ skalar} \quad (3).$$

Falls die Funktion $u(x)$ durch (3) noch nicht eindeutig bestimmt ist, kann man noch zusätzliche Bedingungen an die Glattheit der Funktion u zu J, (3) hinzunehmen, z.B. von der Form $Q \cdot \int (Mu)^2 dx$, M = (produ) oder Δu, $Q<<$. Auf diese Weise wird versucht, eine "plausible" Lösung des Problems zu erhalten. An Hand von Beispielen wird die Methode der numerischen Lösung und der Genauigkeitsberechnung erklärt und die Analogie zu der Prediktionsmethode aufgezeigt.

P.J. LAURENT: Remes algorithm for convex minimization problems.

We consider the following minimization problem

$$(P) \qquad \alpha = \inf_{\substack{g(x)\leq 0 \\ x\in\overline{V}}} f(x)$$

when f and g are convex functionals and V is an n-dimensional subspace of a l.c.l.t.s. X'. One dual problem of (P) is:

$$(Q) \qquad \beta = \sup_{\substack{\eta > o \\ y' + \eta \bar{z}' \in V^o}} - (f^*(y') + \eta\, g^*(z'))$$

We solve (P) by an algorithm of the Reinês type which cousists in replacing P by :

$$(P^\nu) : \alpha^\nu = \inf_{\substack{gx\ V \\ g^\nu(x) \leq o}} f^\nu(\lambda)$$

where f^ν and g^ν are supremum of a finite number of affine functionals. We show that

$\alpha^\nu = -(f^*(y'^\nu) + \eta^\nu f^*(z'^\nu)$, with $\eta^\nu \geq o$, $y'^\nu + \eta^\nu z'^\nu \in V^o$,

and that α^ν is a increasing sequence with limet α. The convergence is proved without Haar condition but with a weaker condition on the "iterativeness" of the algorithm. If this conditions is not satisfied, a modification of the algorithm is given, in order to oltain the convergence. Several examples are given (inparticular L_1 bestapproximation problems).

H.L. LOEB: <u>Optimal Integration Formulas for Analytic Functions.</u>

In a joint work with R.B. Barrar and H. Werner are consider the problem of obtaining optimal integration formulas for the Hardy Space H_2 of analytic functions over regions which can be mapped conformally onto the unit disk. In our class of formulas we allow multiple and complex nodes and optimize allowing both the nodes and coefficients to vary. Our main results are that an optimal formula always exists and any optimal formula is of the form

$\sum_{i=1}^{n} a_i\, f(y_i)$ where $a_i > 0$, $y_i \neq y_j$ $(i \neq j)$ and

$y_i \in (\alpha,\beta)$ where $[\alpha,\beta]$ is the real interval of integration.

J.T. MARTI: A method for the numerical computation of best L_1-Approximations of continuous functions.

Let f be an arbitrary element of $C[0,1]$ and $\{g_1,\dots,g_n\}$ a Markhoffsystem in $C[0,1]$. We consider $C[0,1]$ as a subset of $L_1[0,1]$. Due to a known Theorem of D. Jackson there is a unique best (L_1-) Approximation g for f in the span of $\{g_1,\dots,g_n\}$. Until now the convergence of an algorithm for the numerical computation of g could be proved only for conditions on the function f and the system $\{g_1,\dots,g_n\}$ which are fairly restrictive and difficult to verify (K.H. Usow, 1967). Therefore, an algorithm has been set up to construct g and its convergence has been proved without further assumptions on f and the functions $g_1,\dots,g_n$, i.e. without any assumptions guaranteeing the differentiability of the norm of the error function. The algorithm has been programmed and numerical examples are given.

G. MEINARDUS: Zerlegung linearer Funktionale, Markov-Systeme und dividierte Differenzen.

Für $\nu = 1,2,\dots,n$ sei $V_\nu = \mathrm{sp.}\ \{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_\nu\}$ ein linearer Teilraum von $C[a,b]$, der die Haar'sche Bedingung erfüllt. Mit den Zahlen x_μ ,

$$a \leqq x_1 < x_2 \quad \dots < x_{n+1} \leqq b$$

werden die linearen Funktionale

$$L_\nu^k\,(f) = \sum_{j=\nu}^{\nu+k} \lambda_j^{\nu k}\, f(x_j) \quad , \quad \lambda_\nu^{\nu k} > 0 \; ,$$

gebildet mit

$$L_\nu^k(\varphi_\mu) = 0\;, \quad \mu=1,\dots,k$$

$$\sum_{j=\nu}^{\nu+k} |\lambda_j^{\nu k}| = 1\;.$$

Dann kann man in eindeutiger Weise zu der Zerlegung

$$L_\nu^k(f) = \sum_{j=\nu}^{\nu+k-r} \lambda_{jr}^{\nu k} L_j^r(f)$$

gelangen, wobei

$$\operatorname{sgn} \lambda_{jr}^{\nu k} = (-1)^{\nu+j} \quad \text{und} \quad \sum_j |\lambda_{jr}^{\nu k}| = 1 \quad \text{ist.}$$

Hieraus folgt eine Verallgemeinerung der Schranken von De La Valleé Poussin und Remez für die Minimalabweichung bei der Approximation von f durch Funktionen aus V_n. Es ergibt sich weiter eine Rekursionsformel für dividierte Differenzen bezüglich eines Markov-Systems. - Eine weitere Zerlegung eines linearen Funktionals im Zusammenhang mit Splines wird angedeutet.

G.OPFER: Über die Approximation der Identität im Komplexen.

Bei den üblichen Approximationsproblemen betrachtet man die Approximation einer Klasse von Funktionen durch eine bestimmte Untermenge, beispielsweise

$$||f - g_n|| = \min\;, \quad f \in G \to \mathbb{C},\; g_n \in \Pi_n\;. \tag{1}$$

Dabei ist $f \in F$ aus einer vorgegebenen Klasse F, z.B. $F = CG$ und $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir betrachten hier Probleme der folgenden Art:

$$R_+ \;\; ||z - g_n(z)|| = \min\;, \quad g_n \in \Pi_n\;, \quad g(0) = g'(0) = 0. \tag{2}$$

Es ist bekannt, daß für $n \to \infty$ die Lösung eindeutig bestimmt ist und das vorgegebene Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ auf einen Kreis mit

Radius R schlicht und konform abbildet. Es gibt ein zu (2) im funktionentheoretischen Sinn duales Problem, nämlich

$$R_- = \inf_{z \in \partial G} |z - g_n(z)| = \max, \quad g_n \in \Pi_n, \quad g(o) = g'(o) = 1 \qquad (3)$$

Es gilt der Satz: $R_- \leq R \leq R_+$. Gleichheit wird genau dann angenommen, wenn g_n die oben erwähnte Kreisabbildung bedeutet. Schreibt man die Probleme (2) und (3) in reeller Form auf, entstehen quadratische, konvexe Optimierungsprobleme mit unendlich vielen Ungleichungen als Nebenbedingungen. Neben den Problemen (2) und (3) ist das Problem $R_+ - R_- = \min$ interessant. Es wird ein Beispiel vorgeführt.

A.M. OSTROWSKI: Fehler à posteriori.

Es wurde eine Methode entwickelt, die es gestattet, in vielen Fällen aus einer relativ groben Abschätzung à priori eine relativ gute Abschätzung à posteriori zu erhalten. Im Anschluß daran wurden die Fehler à posteriori in Iterationsverfahren mit einer konstanten Matrix diskutiert. Ausführliche Darstellung erscheint im SIAM Journal for Num. Analysis 1973 unter dem Titel "A posteriori error estimates in iterative procedures"

B. PENKOV: A Test for Convergency of Density Estimators.

Necessary and sufficient conditions for asymptotic unbiasedness of positive operator estimators for probability densities are given.

V.A. POPOV: Direct and converse Theorems for Spline-Approximations with free knots.

Let $S(k,n)$ be the class of spline-functions of the order k with n knots in the interval $[0,1]$. For every f we define the best uniform approximation of f by means of spline-functions from $S(k,n)$ by

$$\varepsilon_n^k\ (f) = \inf_{s \in S(k,n)} \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - s(x)|$$

There are found classes of functions which are characterized with their best approximations. For example classes, that are characterized with

$$\varepsilon_n^k\ (f) = O(n^{-\alpha}),\ 0 < < < 1\ .$$

Some numerical methods for obtaining spline-approximations of convex functions and figurs are considered.

E. POPOVICIU: Rechenaufgaben in der Theorie der besten Approximation.

1. Unter den Rechenaufgaben, welche in der Theorie der besten Approximation vorkommen, können folgende beide interessanten Probleme betrachtet werden:
   a) Sind die Werte einer Funktion f in den voneinander verschiedenen Punkten x_i, $i=1,2,\dots,m$ gegeben, so bestimme man die kleinste nichtnegative ganze Zahl n derart, daß es ein Polynom P, n-ten Grades gebe, für welches $\max\limits_i |f(x_i) - P(x_i)|$ nicht größer als eine gegebene positive Zahl μ sei.
   b) Ist f eine auf dem endlichen und abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetige Funktion, d.h. $f \in C[a,b]$, so betrachte man das Funktional $A : C[a,b] \to \mathbb{R}$. Es sei $\mathfrak{F}$ eine Menge des Typus $I_n\{[a,b]\}$. Man bestimme die Bedingungen, welchen das Funktional A genügen muß, um die Existenz und die Eindeutigkeit des Elements der besten Approximation der Funktion f aus der Menge der Funktionen $\varphi \in \mathfrak{F}$, für welche $A(f) = A(\varphi)$ gilt, zu sichern. Wir haben also ein Approximationsproblem, in welchem verlangt wird, das Infimum in

$$\inf_{\varphi \in \mathfrak{F}^*} \{ \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \}$$

anzunehmen, wobei $\mathfrak{F}^*$ die Menge der Funktionen $\varphi \in \mathfrak{F}$ ist, für welche $A(f) = A(\varphi)$ gilt.

2. In dieser Arbeit wird ein Satz von Helly in der Untersuchung des Problems a) angewandt und ein Resultat bezüglich des Problems b) angegeben.

T. POPOVICIU: Über die Verwendung der Tabellen spezieller Funktionen.

Unter der Voraussetzung, daß f eine im Intervall $[a,b]$ stetige und konkave Funktion sei, werden die Approximationen von der Form $L + \lambda$ dieser Funktion untersucht, wobei L das Polynom (1. Grades) ist, welches die Werte der Funktion f in den Endpunkten a und b annimmt und λ eine positive Konstante ist. Unter den Polynomen $L + \lambda$ findet sich auch das Polynom der besten Approximation (1.Grades) im Tschebyscheffschen Sinne.

Die Theorie wird auf die Interpolation in Logarithmentafeln angewendet.

G. SCHMEISSER: Optimale Quadraturformeln mit semidefiniten Kernen.

Es werden Quadraturformeln betrachtet, die für $f \in C^{2k}(0,1)$ die Gestalt

$$(1) \qquad \int_0^1 f(x)dx = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu f(x_\nu) + c_{kn} f^{(2k)}(\xi) \quad , \quad \xi \in (0,1)$$

besitzen, wobei das Vorzeichen von c_{kn} (Fall a: $c_{kn} > 0$, Fall b: $c_{kn} < 0$) vorgeschrieben ist.Zunächst wird geklärt, für welche Paare (k,n) optimale Formeln der Gestalt (1) existieren. Dann werden für feste äquidistante Knoten Einschließungen für die optimalen Größen c_{kn} gewonnen. Dabei ergeben sich Trapezregeln mit Endkorrekturen, die der Gleichung

(1) genügen und für großes n der Genauigkeit der optimalen Formeln beliebig nahe kommen. Diese "fastoptimalen" Quadraturformeln besitzen eine Reihe interessanter Eigenschaften.

E. SCHMIDT: <u>Tschebyscheff-Approximation mit Summen von Logarithmus-Funktionen.</u>

Es wird das Tschebyscheff Approximationsproblem für die Anpassung stetiger Funktionen auf einem Intervall $[0,\beta]$ durch Elemente der folgenden Familie untersucht:

$$V_n := \{h \in C(x) \ , \ h(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=o}^{m_i} a_{ij} \left[1 + \log(1 + t_i x)\right]^{(j)}$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R} \ , \ t_i x > -1 \ , \ t_i \text{ distiuct, reell}, \quad t_1 = 0 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} (m_i + 1) \leq u \ \}$$

Die Menge enthält Polynome, Logarithmus-Funktionen und gewisse rationale Funktionen. Man kann die Elemente als γ-Polynome ansehen, die durch den Kern $\gamma(t,x) = 1 + \log(1 + tx)$ erzeugt werden. Die Restriktion, daß einer der nichtlinearen Parameter t_i gleich Null sei, ist notwendig, um ein Haarsches System zu erhalten. Mit klassischen Schlüssen, basierend auf der lokalen Haarschen Bedingung, werden Alternantenkriterien hergeleitet, analog zu den Ergebnissen für Descartes-Familien (Braess), aber modifiziert durch die Restriktion $t_1 = 0$. Eine Kompaktheitsaussage (gleichmäßige Konvergenz im Innern), ähnlich einer für Exponentialsummen, wird bewiesen, welche die Existenz einer besten Approximierenden impliziert. Die Ergebnisse enthalten die von Dunham, der die Tschebyscheff-Approximation mit Funktionen der Form $a + b \log(1 + cx)$ untersucht.

L.L. SCHUMAKER: A spline solution to linear initial- and two-point boundary value problems.

M. Golomb recently discussed a method for solving linear two-point boundary value problems which makes optimal use of the available information (i.e., is best in the sense of Golomb/Weinberger and Sard). The method produces a certain g-spline. We discuss here a numerical implementation of the method based on a factorization algorithm for computing g-splines. Examples and numerical results are included.

B. SENDOV: Simultaneous Approximation of All Real Zeroes of an Algebraic Polynomial.

Let $f(x)$ be an algebraic polynomials of k-th degree and let m be an integer. Let us denote $(1 + x)^m f(x) = \sum_{\nu=o}^{m+k} a_{m,\nu} x^{\nu}$. The communication contains a method enabling us to find simultaneously approximations for all real positive roots of $f(x) = 0$ by means of the sign changes positions of the sequence $\{a_{m,\nu}\}_{\nu=o}^{m+k}$. An estimate for the degree of approximation as well as some numerical examples are given too.

D.D. STANCU: Evaluation of the remainders in certain approximation procedures by Meyer-König and Zeller-type operators.

One considers the sequence of operators $(W_m^{<\alpha>})_{m=1}^{\infty}$, depending on a non-negative parameter , defined by

$$(W_m^{<\alpha>} f)(x) = \sum_{k=o}^{\infty} W_{m,k}^{<\alpha>}(x)\, f\left(\frac{k}{m+k}\right),$$

associated to a function $f : [0,1] \to \mathbb{R}_1$ where

$$W_{m,k}^{<\alpha>}(x) = \binom{m+k}{k} \frac{x(x+\alpha)\dots(x+\overline{k-1}\alpha)(1-x)(1-x+\alpha)\dots(1-x+m\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\dots(1+\overline{m+k}\alpha)}.$$

It includes as a special case ($\alpha = 0$) the Operator M_m of Meyer-König and Zeller, who introduced their operator by using the Pascal probability distribution. The operator $W_m^{<\alpha>}$ can also be constnuting by a probabilitic method by using a variation of the Pascal win scheme in the sende in which Markov and Polya hare generalized the bernoulli win scheme. Some results

$$(W_m^{<\alpha>} f)(x) = \frac{1}{B\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{1-x}{\alpha}\right)} \int_0^1 t^{\frac{x}{\alpha}-1} (1-t)^{\frac{1-x}{\alpha}-1} (M_m f)(t)dt ,$$

($\alpha > 0$, $0 < x < 1$)
B- beta-function

$$(W_m^{<\alpha>} f)(0) = 0 , \quad (W_m^{<\alpha>} f)(1) = \lim_{x\uparrow 1} (W_m^{<\alpha>} f)(x) = f(1)$$

$$||f - W_m^{<\alpha>} f|| \leq \frac{3}{2} \cdot \omega \left(f; \sqrt{\frac{1+\alpha m}{m+\alpha m}}\right) ,$$

$$f(x) = (W_m^{<\alpha>} f)(x) - \frac{x(1-x)(1-x+m\alpha)}{2m(1+\alpha)} f''(x) + O\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$f(x) = (W_m^{<\alpha>} f)(x) + (R_m^{<\alpha>} f)(x) ,$$

$$(R_m^{<\alpha>} f)(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+k\alpha)(1-x+m\alpha)}{(m+k+1)(1+m+k\alpha)} W_{m-1,k}^{<\alpha>}(x) \left[x, \frac{k}{m+k}, \frac{k+1}{m+k+1}; f\right] =$$

$$= - \frac{x(1-x)(1-x+m\alpha)}{(m-1)(1+\alpha)} (1 + \rho_m^{<\alpha>}(x)) \left[\xi_{m_0}, \xi_{m_1}, \xi_{m_2}; f \right]$$

$$(R_m^{<\alpha>} f)(x) = \int_0^1 G_m^{<\alpha>}(t;x) f''(t)dt ,$$

$$G_m^{<\alpha>}(t;x) = (R_m^{<\alpha>} \rho_x)(t) , \quad \rho_x(t) = \frac{x-t + |x-t|}{2} .$$

H. STRAUSS: L$_1$-Approximation mit Spline Funktionen.

Gegeben ist der Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen $C[a,b]$ über dem Intervall $[a,b]$. Auf $C[a,b]$ ist die L_1-Norm erklärt

$$||f|| = \int_a^b |f(x)|dx$$

Weiterhin ist der Raum der Tschebyscheffschen Splinefunktionen $S_{n,\kappa} \subset C[a,b]$ vom Grad n zu den festen Knoten $a = x_o < x_1 < \ldots < x_{\kappa+1} = b$ vorgegeben.

Dann lassen sich folgende beide Sätze zeigen:

(1) Wenn $s_o \in S_{n,\kappa}$ Minimallösung an $f \in C[a,b]$ bezüglich der L_1-Norm ist, dann gibt es eine Punktmenge $\{t_i\}_{i=1}^{n+\kappa+1} \subset C[a,b]$ mit den Eigenschaften

$$(t - s_o)(t_i) = 0 \qquad i=1,\ldots,n+\kappa+1$$

$$t_i < x_i < t_{i+n+1} \qquad i=1,\ldots,\kappa$$

Daraus läßt sich folgern:

(2) Jede stetige Funktion besitzt eine eindeutig bestimmte Minimallösung aus $S_{n,\kappa}$.

J. SZABADOS: On parametric approximation.

It was B. Sendov who introduced the notion of parametric approximation. Given a continuous function $f(x)$ in $[-1,1]$ we may transform the argument x by $x = P_m(y)$ where $P_m(y)$ is a polynomial of degree $\leq m$ such that $P_m(-1) = -1$, $P_m(1) = 1$, and $P_m'(y) \geq 0$ $(|y| \leq 1)$. The best polynomial approximation to $f(P_m(y))$ by algebraic polynomials $Q_n(y)$ of degree $\leq n$ is called the best parametric approximation to $f(x)$ of degree (m,n) . Various estimates for this kind of approximation and some numerical aspects /together with and example/ are considered.

W. WETTERLING: Approximationsmethoden zur Einschließung von Menbraneigenwerten.

Für die Grundfrequenz einer eingespannten Menbran sollen nach dem Quotienteneinschließungssatz obere und untere Schranken bestimmt werden. Hierzu braucht man Ansatzfunktionen, für die auf dem Rand des betrachteten Gebietes außer $u = 0$ auch $\Delta u = 0$ gilt. Für Gebiete, die durch $f(x,y) > 0$ mit viermal stetig differenzierbarem f beschrieben sind, kann man solche Ansatzfunktionen von der Form $u = vf + wf^2$ konstruieren.

Die Parameter im linearen Ansatz sollen dann so bestimmt werden, daß die Eigenwertschranken möglichst eng werden. Hierfür werden zwei Approximationsprinzipien und ein Optimierungsprinzip angegeben. Die numerische Bestimmung der Parameter geschieht auf dem Wege über a) Kollokation, b) überbestimmte Eigenwertaufgaben, c) eine nichtlineare Optimierungsaufgabe, die auf eine Folge von linearen Optimierungsaufgaben zurückgeführt werden kann.

L. WUYTACK: <u>Eigenschaften eines Algorithmus zur rationalen Interpolation.</u>

Einige Eigenschaften und Anwendungen eines neuen Algorithmus zur rationalen Interpolation ("An algorithm for rational interpolation similar to the qd-algorithm", Numer. Math. 2o (1973), 418 - 424) werden besprochen.

Zuerst werden einige Beziehungen mit dem qd-Algorithmus gegeben. Die Interpolationsformel für den Fall, wobei gewisse Interpolationspunkte zusammenfallen, werden abgeleitet.

Anschließend werden einige Beziehungen mit der Theorie über Spline-Funktionen angegeben.

R. ZIELKE: <u>Zur Existenz und Struktur von Markov-Systemen.</u>

Es sei M eine totalgeordnete Menge und V ein n-dimensionaler linearer Raum von auf M definierten reellwertigen Funktionen. V heißt ein orientierter Haarscher Raum, wenn für jede Basis $f_1,\ldots,f_n$ von V $\det(f_i(t_j))$ konstantes Vorzeichen $\neq 0$ hat für alle $t_1,\ldots,t_n \in M$ mit $t_1<\ldots<t_n$. Äquivalent hierzu ist, daß jedes $f \in V$ höchstens $(n-1)$-mal stark das

das Vorzeichen wechselt. M habe Eigenschaft (B) bzw. (E), wenn $\bigwedge_{\substack{a,b\in M\\ a<b}} \bigvee_{x\in M} a < x < b$ bzw. $\bigwedge_{a\in M} \bigvee_{x,y\in M} x < a < y$.

Unter anderem werden folgende Sätze angegeben:

1) Hat M die Eigenschaften (B) und (E) , so enthält jeder n-dimensionale orientierte Haarsche Raum V einen ebensolchen der Dimension $n - 1$. Außerdem gibt es ein $g : M \to R$, so daß $\operatorname{span}\{V,g\}$ ein $(n+1)$-dimensionaler orientierter Haarscher Raum ist. Für reelle Intervalle M und $U \subset C(M)$ kann $g \in C(M)$ gewählt werden.

2) Hat M Eigenschaft (B) und ist V ein n-dimensionaler orientierter Haarscher Raum, der die Konstanten enthält, so gibt es i-dimensionale orientierte Haarsche Räume V_i mit $\{\text{const. Fu.}\} = V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$ genau dann, wenn für kein $f \in V$ mehr als n Punkte $t_1 < \ldots < t_m$ existieren mit $\operatorname{sign} (-1)^i \,[f(t_i) - f(t_{i+1})] = \text{const.} \neq 0$ für $i = 1,\ldots,m - 1$.

W.Hofmann (Hamburg)