MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 24/1973

Geometrische Maßtheorie

12.6. bis 15.6.1973

Die Arbeitstagung über "Geometrische Maßtheorie" stand unter der Leitung von S. Hildebrandt (Bonn), W. Jäger (Münster) und K. Steffen (Bonn). Die Tagung folgte im wesentlichen Chapter 4 von H.Federers Buch "Geometric Measure Theory" und sollte den Teilnehmern Gelegenheit zum Einarbeiten in die Theorie der Ströme geben. Dabei sollten die Anwendungen der Theorie auf geometrische Variationsprobleme, insbesondere auf das höherdimensionale Plateauproblem, untersucht werden und Beziehungen zu der von E. De Giorgi und M.Miranda entwickelten Theorie der Mengen von lokal endlichem Perimeter hergestellt werden.

Teilnehmer

H.W.Alt, Münster
W.Alt, Münster
G.Bertellini, Pisa/Italien
R.Böhme, Göttingen
C.Gerhardt, Mainz
K.Goldhorn, Mainz
K.Gornik, Bonn
F.P.Harth, Bonn
S.Hildebrandt, Bonn
E.Hölder, Mainz
W.Jäger, Münster
H.Jarausch, Münster
H.Kaul, Bonn
H.Schmidt, Münster
E.Sperner, Bonn
K.Steffen, Bonn
F.Tomi, Münster
H.Wente, Toledo/Ohio

Vortragsauszüge

K. STEFFEN : Fundamentale Klassen von Strömen

Ein m-dimensionaler Strom T auf dem R^n $(0 \le m \le n)$ ist eine Distribution auf dem Testraum $\mathcal{D}^m(R^n)$ der C^∞-Differentialformen vom Grade m mit kompaktem Träger. Die Masse von T ist definiert durch

$M(T) := \sup\{T(\varphi) : \varphi \in \mathcal{D}^m(R^n), \|\varphi\| \leq 1$ auf $R^n\}$, der Rand ∂T ist der (m-1)-dimensionale Strom mit $\partial T(\psi) = T(d\psi)$ für $\psi \in \mathcal{D}^{m-1}(R^n)$. Es wurden eingeführt die Klassen $\mathcal{N}_{m,K}(R^n) = \{T :$ T ist Strom, $\dim T = m$, $\operatorname{spt} T \subset K$ kompakt, $M(T)+M(\partial T) < \infty\}$ der normalen Ströme, $\mathcal{R}_{m,K}(R^n) :=$ M-Abschluß von $\mathcal{N}_{m,K}(R^n)$ der regulären Ströme und $\mathcal{F}_{m,K}(R^n) :=$ $\{R + \partial S : R \in \mathcal{R}_{m,K}(R^n), S \in \mathcal{R}_{m+1,K}(R^n)\}$ der flachen Ketten. Weiter wurden behandelt die Klasse $\mathscr{R}_{m,K}(R^n)$ der rektifizierbaren Ströme (das sind M-Limites von Lipschitzflächen der Dimension m), die Klasse $\mathscr{I}_{m,K}(R^n) = \{T \in \mathscr{R}_{m,K}(R^n), \partial T \in \mathscr{R}_{m-1,K}(R^n)\}$ der ganzen Ströme und die Klasse $\mathscr{F}_{m,K}(R^n) = \{R + \partial S : R \in \mathscr{R}_{m,K}(R^n), S \in \mathscr{R}_{m+1,K}(R^n)\}$ der ganzen flachen Ketten. Außer den grundlegenden Eigenschaften dieser Ströme wurden einige Tatsachen über das Glätten von Strömen bewiesen und daraus Darstellungssätze für die Elemente von $\mathcal{F}_{m,K}(R^n)$ bzw. $\mathcal{R}_{m,K}(R^n)$ durch Lebesgue-integrierbare m-Vektorfelder hergeleitet.

H.SCHMIDT : Charakterisierung rektifizierbarer Ströme

Es wurden charakteristische Eigenschaften rektifizierbarer m-Ströme hergeleitet und gezeigt, daß sich diese als M-Limites von beschränkten Lipschitzflächen auffassen lassen. Ferner wurde ein Darstellungssatz bewiesen, wodurch die rektifizierbaren Ströme als Integrale von Differentialformen über rektifizierbaren Mengen mit Orientierung charakterisiert werden können. Schließlich wurde aus einer Verallgemeinerung des Konstanzsatzes ein Satz vom Gauß-Greenschen Typ für offene Teilmengen des R^n mit zusammenhängendem C^1-Rand hergeleitet.

W.ALT : Deformationssatz für normale Ströme

Mit Hilfe einer geeigneten Projektion auf eine Würfelzerlegung des R^n wird der Deformationssatz bewiesen, der beschreibt, wie normale m-Ströme in m-dimensionale Polyederketten transformiert werden können. Als Folgerung wird eine isoperimetrische Ungleichung für geschlossene ganze Ströme hergeleitet : $T \in \mathscr{I}_m(R^n)$, $\partial T = 0 \Rightarrow$

$\exists\, S \in \mathscr{I}_{m+1}(R^n), \partial S = T$ mit $M(S)^{m/(m+1)} \leq \gamma\, M(T)$.

F.TOMI : Abschließungs- und Kompaktheitssätze für ganze und normale Ströme

Es wird ein Abschließungssatz bewiesen, dessen wichtigste Aussage lautet: Die ganzen Ströme sind in der Menge der normalen Ströme bezgl. der flachen Norm abgeschlossen. Des weiteren wird ein Kompaktheitssatz bewiesen, der besagt, daß eine Menge von normalen (bzw. ganzen) Strömen mit gleichmäßig beschränkter N-Norm (d.h. gleichmäßig beschränkter Masse + Randmasse) in der flachen F_K-Norm (bzw. $\mathcal{F}_K$-Norm) kompakt ist.

H.W.ALT : Das allgemeine isoperimetrische Theorem

Es wird ein allgemeines isoperimetrisches Theorem bewiesen, welches folgendes besagt: Sind A,B Lipschitz-Retrakte im R^n und U und V gewisse Umgebungen von A und B, so gibt es eine von der geometrischen Situation und von m , $m \leq n$, abhängende Konstante C, so daß gilt: Zu jedem m-dimensionalen rektifizierbaren Strom X im R^n, welcher relativer Zyklus der Raumpaares (A,B) und relativer Rand des Raumpaares (U,V) ist, gibt es einen (m+1)-dimensionalen ganzen Strom Y mit den Eigenschaften $\operatorname{spt} Y \subset A$, $\operatorname{spt}(X-\partial Y) \subset B$ und

$$M(Y)^{m/(m+1)} + M(X-\partial Y) \leq C\, M(X) .$$

Weiter werden Approximationssätze behandelt, welche es gestatten, ganze Ströme und ganze flache Ketten durch Polyederketten zu approximieren.

H.KAUL : Slicing (Zerlegen eines Stromes in Scheiben)

Sei $U \subset R^k$ offen, $f: U \to R^n$ eine Lipschitzabbildung und $T \in \mathbb{F}_{m,K}(U)$, $m \geq n$, eine flache m-dimensionale Kette. Dann definiert man für fast alle $y \in R^n$ den (m-n)-dimensionalen Strom $\langle T,f,y\rangle$ auf U, die "Scheibe" von T in $f^{-1}\{y\}$, mit $\operatorname{spt}\langle T,f,y\rangle \subset \operatorname{spt} T \cap f^{-1}\{y\}$ durch Approximation mit Strömen $T \llcorner f^{\#}\varphi_j$,wo $\varphi_j \in \mathcal{D}^n(R^n)$ eine Approximation der "δ-Funktion" sind. Es werden einige wichtige Eigenschaften dieser Scheiben bewiesen.

F.P.HARTH : Eigenschaften von Scheiben m-dimensionaler Ströme

Es wird bewiesen, daß Scheiben von ganzen bzw. rektifizierbaren Strömen ebenfalls ganz bzw. rektifizierbar sind. Unter der Voraussetzung einer gewissen Wachstumsbedingung wird gezeigt, daß die Scheibe $\langle T,f,\cdot\rangle$ Hölderstetig in der F-Norm ist, falls der Strom T normal ist. Dies ist eine Verallgemeinerung der Tatsache, daß die Funktionen mit p-integrablen schwachen Ableituungen Hölderstetig sind, falls p genügend groß ist.

K.GOLDHORN : Das allgemeine Gauß-Green-Theorem

Es werden Teilmengen des R^n von lokal endlichem Umfang (Perimeter) definiert und diese als Teilklasse der lokal ganzen flachen n-Ketten charakterisiert. Sodann werden aus dem allgemeinen isoperimetrischen Theorem einige Folgerungen hergeleitet, die es ermöglichen, von der $\mathcal{F}_K$-Konvergenz der Ränder lokal ganzer Ströme auf die $\mathcal{F}_K$-Konvergenz der Ströme selbst zu schließen. Im Anschluß an die Definition der äußeren Normalen, des wesentlichen und orientierten Randes von Teilmengen des R^n wird dann das allgemeine Gauß-Green-Theorem formuliert, mit dessen Hilfe sich die Mengen von lokal endlichem Umfang charakterisieren lassen. Schließlich wird gezeigt, daß eine Menge die Voraussetzungen des Gauß-Green-Theorems erfüllt, wenn der Durchschnitt ihres wesentlichen Randes mit beliebigen kompakten Mengen endliches (n-1)-dimensionales integralgeometrisches Maß hat.

R.BÖHME : Struktur der lokal normalen Ströme im R^n

Es wird gezeigt: Ist $f \in L^1_{loc}(R^n)$ und der mit f assoziierte n-dimensionale Strom $T = E^n \llcorner f$ auf R^n lokal normal (d.h. die Distributionsableitungen erster Ordnung von f sind Maße), so hat die Menge $G = \{(x,z) \in R^{n+1} : z \leq f(x)\}$ lokal endlichen Umfang. Der Graph $S = \partial G$ von f ist daher "im wesentlichen" rektifizierbar. Das Variationsmaß verschiedener Projektionen von S kann durch T abgeschätzt werden.

Man kann daher den Rand von T als Integral über Scheiben des Graphen S darstellen und damit auch das Variationsmaß $\|\partial T\|$ als Integral über die Maße jener Scheiben ausdrücken.

W.JÄGER : Eigenschaften lokal integrierbarer Funktionen auf R^n

Sei $E^n \llcorner f$, $f \in L^1_{loc}(R^n)$, ein lokal normaler Strom. Dann ist die Menge E aller Sprungstellen von f bis auf eine $\mathcal{H}^{n-1}$-Nullmenge eine abzählbare Vereinigung von Mengen, die Lipschitzstetige Bilder beschränkter Mengen des R^{n-1} sind. Man führt den wesentlichen Graphen C von f ein und betrachtet die Menge G , die unter diesem Graphen liegt. Es wird die Existenz von Normalen an G untersucht, insbesondere in den Punkten über E. Der Strom $S = (-1)^n \partial(E^{n+1} \llcorner G)$ wird studiert und gezeigt, daß das Variationsmaß von S die Einschränkung des Hausdorffmaßes $\mathcal{H}^n$ auf C ist. Es wird nachgewiesen, daß f bis auf eine $\mathcal{H}^{n-1}$-Nullmenge im wesentlichen endlich ist. Mit Hilfe der isoperimetrischen Ungleichung werden Abschätzungen für f vom Typ der Sobolevschen Ungleichung bewiesen.

E.SPERNER : Approximative Differenzierbarkeit lokal integrierbarer Funktionen

Der normale Strom $T = E^n \llcorner f$ besitzt $\mathcal{H}^n$-fast überall eine approximative Ableitung. Das Differential berechnet sich aus den Variationsmaß $\|\partial T\|$, seiner Distributions-Ableitung und der Normalen an den wesentlichen Graphen. Genau dann liegt f in $H_1^{1,loc}(R^n)$, wenn das Variationsmaß $\|\partial T\|$ $\mathcal{H}^n$-stetig ist. Äquivalent hierzu ist die Absolutstetigkeit im Sinnen von Calkin-Morrey. Für die approximative Stetigkeit $\mathcal{H}^{n-1}$-fast überall ist notwendig und hinreichend, daß das $\|\partial T\|$ -Maß jeder Menge endlichen $\mathcal{H}^{n-1}$-Maßes verschwindet.

K.STEFFEN : Isoperimetrische Ungleichung für lokal normale n-dimensionale Ströme im R^n

Ist $f \in L^1_{loc}(R^n)$ und sind die partiellen Ableitungen von f im Distributionssinne Maße, so gilt die folgende isoperimetrische (bzw. Sobolevsche) Ungleichung

$$\left\{ \int | f(x) - c |^{n/(n-1)} \, d\mathcal{L}^n x \right\}^{(n-1)/n} \leq$$

$$\leq n^{-1} \alpha(n)^{-1/n} \text{ (Totalvariation von Df)}$$

Dabei ist $c \in R$ (von f abhängig) und $\alpha(n) = \mathcal{L}^n \{ x \in R^n : |x| \leq 1 \}$.
Ist $f \in L^1(R^n)$, so ist $c=0$. Ist $f(R^n) \in \mathbb{Z}$, so ist $c \in \mathbb{Z}$.
Insbesondere kann man für f die charakteristische Funktion einer Menge A von endlichem Perimeter wählen. Dann ergibt sich die klassische isoperimetrische Ungleichung.

K. Goldhorn (Mainz)