MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 25/1973

Lifting- und Fortsetzungsprobleme

17. 6. bis 23. 6. 1973

Die zum zweiten Male stattfindende Tagung über Lifting- und Fortsetzungsprobleme wurde wieder von H. Bauer (Erlangen) und D. Kölzow (Erlangen) geleitet.
Die Vielfalt der von den Teilnehmern vertretenen Gebiete der Funktionalanalysis erlaubte es, Probleme und Fragestellungen im Zusammenhang mit Lifting und Fortsetzung unter verschiedensten Gesichtspunkten zu studieren.
Der relativ kleine Rahmen bot die Möglichkeit zu besonders ausgiebigen Diskussionen.

Teilnehmer

J.P.R. Christensen, Kopenhagen (Dänemark)
G. Dankert, Erlangen
P. Dodds, Bedford Park (Australien)
P. Georgiou, Athen (Griechenland) z.Zt. Tübingen
S. Graf, Regensburg
A. Ionescu Tulcea, Evanston (U.S.A.)
D.A. Kappos, Athen (Griechenland)
H.G. Kellerer, München
H. Kollmer, Erlangen
A. Lazar, Tel-Aviv (Israel)
G. Mägerl, Erlangen
D. Maharam-Stone, Rochester (U.S.A.)
G. Maltese, Maryland (U.S.A.) z.Zt. Münster
H. Millington, Erlangen
G. Nürnberger, Erlangen

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

C. Portenier, Erlangen
H. Reay, Erlangen
St. Simons, Santa Barbara (U.S.A.)

Vortragsauszüge

J.P.R. CHRISTENSEN: Measurability properties of liftings, some results and problems.

Der Vortrag brachte die beiden folgenden Resultate, durch die einerseits mögliche Meßbarkeitseigenschaften von Liftings scharf umrissen werden, andrerseits der Unterschied zwischen Souslin-Abschluß und universeller Vervollständigung einer σ-Algebra etwas beleuchtet wird : Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum mit separablem, separierten $\mathcal{S}$, $L^\infty := L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ mit der schwachen Topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ versehen und $\mathfrak{A}$ die gröbste σ-Algebra auf L^∞ die $\sigma(L^\infty, L^1)$ enthält und gegen die Souslinoperation abgeschlossen ist. (1) Ist $\mu(\{x\}) = o$ für alle $x \in X$ und $\varphi : L^\infty \to \mathcal{L}^\infty$ ein lineares Lifting, so ist für μ-fast alle $x \in X$ die Linearform: $f \mapsto (\varphi f)(x)$ nicht $\mathfrak{A}$-meßbar. (2) Nimmt man die Kontinuumshypothese an, so ex. stets ein lineares Lifting $\varphi : L^\infty \to \mathcal{L}^\infty$, derart, daß die reelle Funktion $(f,x) \longmapsto (\varphi f)(x)$ universell meßbar auf dem Produktraum ist.

P. GEORGIOU : Eine Halbgruppenstruktur im Raum der Liftings.

Es seien: T ein kompakter Raum, μ ein pos. Radonmaß auf T mit supp μ = T, $\mathcal{T}$ die σ-Algebra der μ-meßbaren Teilmengen, $\Lambda = \Lambda(T,u)$ die Menge der Liftings von $L^\infty(T,u)$, $(\Psi, \circ)$ die Halbgruppe der $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}$-meßbaren und maßtreuen Abbildungen von T in sich mit der Komposition als Verknüpfung. Auf Λ wurde eine Verknüpfung $*$ eingeführt, derart, daß gilt: (1) $(\Lambda, *)$ ist Halbgruppe. (2) $r_o \in \Lambda$ ist genau dann ein starkes Lifting, wenn r_o eine Rechtseins von $(\Lambda, *)$ ist. (3) Es ex. ein Homomorphismus h: $(\Lambda, *) \longrightarrow (\Psi, \circ)$, derart, daß $h(\Lambda)$ dicht ist in Ψ bzgl. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf T. (4) Ist r_o ein starkes Lifting, so gilt für alle $r \in \Lambda$: $h(r_o * r) = h(r)$.

D. MAHARAM-STONE : On compact measure spaces.

Sei S kompakter T_2-Raum, μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) auf S, I das abgeschlossene Einheitsintervall und ν_n das Lebesguemaß

auf I^n ($n\in\mathbb{N}$). (1) Ist S eine Baire Teilmenge von I^n, μ ein Bairemaß, so ex. $m\in\mathbb{N}$, sodaß $(S\times I^m,\mu\otimes\omega)$ isometrisch zu (I^m,ν_m).
(2) Ist μ reguläres Borelmaß, so ex. $m\in\mathbb{N}$, sodaß $(S\times I^m,\mu\otimes\omega)$ pseudoisometrisch zu (I^m,ν_m). (Eine Pseudoisometrie unterscheidet sich von einer Isometrie dadurch, daß sich das Bild einer meßbaren Menge um eine Nullmenge von einer meßbaren Menge unterscheiden darf.)
(3) Ist R ein weiterer kompakter T_2-Raum, $\Theta:S\to R$ eine stetige Surjektion und λ das Bildmaß von μ unter Θ. Dann ex. Mengen A,B, $B\subseteq A$, und Pseudoisometrien $\Phi_s:S\times I^A\to I^A$, $\Phi_r:R\times I^B\to I^B$, sodaß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S\times I^A \arrow[r, "\Phi_s"] \arrow[d, "\Theta\times\pi"'] & I^A \arrow[d, "\pi"] \\ R\times I^B \arrow[r, "\Phi_r"] & I^B \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. (wo $\pi:I^A\to I^B$ die kanonische Projektion)

Weiter wurden Anwendungen auf Liftings, starke Liftings und Desintegrationen angegeben.

A. IONESCU-TULCEA : <u>Measurability and the separation property.</u>

Sei $(E,\mathcal{E},\mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{L},\tau)$ der lokalkonvexe Raum der reellen, $\mathcal{E}$-meßbaren Funktionen auf E mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{L}$ hat SP (separation property), falls : $\forall f,g\in\mathcal{X}:(f=g$ μ-fast überall $\Rightarrow f(x)=g(x)\ \forall x\in E)$.
SP charakterisiert in gewisser Weise die Metrisierbarkeit kompakter Teilmengen von $(\mathcal{L},\tau)$: Sei $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{L}$ kompakt. (1) $\mathcal{X}$ metrisierbar $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists E_0\in\mathcal{E}$: supp $\mu\subseteq E_0$, $\mathcal{X}|_{E_0}$ hat SP. (2) $\mathcal{X}$ konvex, $\mathcal{X}$ hat SP $\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{X}$ metrisierbar. Weiter macht SP gerade den Unterschied zwischen starker und schwacher Meßbarkeit vektorwertiger Abbildungen aus:
Sei X ein Banachraum; für $f:E\to X$ sei $\mathcal{X}_f:=\{x'\circ f\mid x'\in X'\}$
(1) $f:E\to X$ schwach meßbar, $\mathcal{X}_f$ hat SP $\Rightarrow f$ stark meßbar.
(2) $f:E\to X$ stark meßbar $\Rightarrow \exists E_0\in\mathcal{E}$: supp $\mu\subseteq E_0$, $\mathcal{X}_{f|_{E_0}}$ hat SP.

Weiter können die beschränkten Teilmengen von $\mathcal{L}$, deren Abschluß (bzgl. τ) kompakt ist, mit Hilfe von Gleichstetigkeit in der Liftingtopologie eines Liftings von $\mathcal{L}^\infty$ charakterisiert werden.

S. GRAF : <u>Schnitte Boole'scher Korrespondenzen und ihre Dualisierungen.</u>

Seien X,Y kompakte, total unzusammenhängende Räume, $F:X\to\mathfrak{F}(Y):=$ $=\{F\subseteq Y\mid F$ abgeschlossen, nicht leer$\}$, in folgendem Sinn stetig : $\forall A\subseteq Y$: A abgeschlossen und offen $\Rightarrow F_{-1}(A)$:= $=\{x\in X\mid F(x)\cap A\neq\emptyset\}$ offen und abgeschlossen. Weiter existiere eine Basis $\mathcal{B}$ von Y aus offen-abgeschlossenen Mengen, derart, daß für jedes offen-abgeschlossene $A\subseteq Y$ und jede Kardinalzahl k, mit

$k < \left| \{ B \in \mathcal{B} \mid F_{-1}(B) \cap F_{-1}(Y \setminus B) \neq \emptyset \} \right|$ und jedes k-abgeschlossene $S \subseteq$ $\subseteq F_{-1}(A) \cap F_{-1}(Y \setminus A)$ der offene Kern $\mathring{S}$ abgeschlossen ist. Dann ex. ein stetiger Schnitt von F.
Dieser Satz impliziert einen Liftingsatz von VON NEUMANN-STONE und den SIKORSKI'schen Ausdehnungssatz für Boole'sche Algebren.

G. MÄGERL : Stetige und meßbare Schnitte für Korrespondenzen.

Der Vortrag brachte in einer Übersicht einige Resultate zu dem obigen Thema. Nach allgemeinen Untersuchungen der Meßbarkeit und Stetigkeit von Korrespondenzen wurde zunächst eine Verallgemeinerung des MICHAEL'schen Satzes über die Existenz stetiger Schnitte zu nach unten halbstetigen Korrespondenzen bewiesen und auf Anwendungen auf die Fortsetzung stetiger Abbildungen hingewiesen. Weiter wurde eine Verallgemeinerung eines Satzes von HIMMELBERG und VAN VLECK über die Existenz meßbarer Schnitte zu analytischen Korrespondenzen gezeigt. Als Anwendungen dieses Satzes erhielt man einerseits ein ∞-dimensionales Analogon zum FILIPPOV-Lemma, andrerseits - als Verallgemeinerung und Ergänzung eines Resultats von CASTAING - eine Charakterisierung von "extremalen meßbaren Schnitten" und von Extremalpunkten konvexer Mengen meßbarer Abbildungen.

G. NÜRNBERGER : Schnitte für die metrische Projektion.

Sei E metrischer Raum, $G \subseteq E$, sodaß $e \mapsto P_G(e) := \{ g \in G \mid d(e,g) = d(e,G) \}$ eine Abbildung von E in $\mathcal{P}(G) \setminus \{\emptyset\}$ ist. (mengenwertige metrische Projektion). (1) Hinreichend für die Existenz eines BOREL-meßbaren Schnittes zu P_G sind : (a) G separabel, σ-kompakt. (b) G separabel, approximativ kompakt. (c) E normierter Raum, G separabler Teilraum, $P_G^{-1}(o) := \{ e \in E \mid o \in P_G(e) \}$ "boundedly compact".
(2) Sei speziell $E = C(X)$, X kompakt, $P_G(e)$ endlich-dimensional für alle $e \in E$, und es existiere ein stetiger Schnitt zu P_G. Dann gilt : (a) $\forall f \in P_G^{-1}(o)$: $\bigcap_{g \in P_G(f)} g^{-1}(\{o\})$ ist offen. (b) P_G oberhalbstetig $\Rightarrow P_G$ unterhalbstetig. (c) X zusammenhängend $\Rightarrow$ $\Rightarrow P_G(f)$ ist einelementig für alle $f \in E$. (3) Ist E normierter Raum, G ein Teilraum von E, so ex. ein "quasiadditiver" und homogener Schnitt zu P_G.

G. MALTESE : An extension theorem for states in Banach spaces.

Sei B komplexer Banachraum, $C_B \subseteq B$ mit $\lambda C_B \subseteq C_B$ für alle $\lambda \geq o$. Es existiere $u \in B$, sodaß für alle $f \in B'$ mit $f_{C_B} \geq o$ $f(u) = \|f\|$ gilt.

Man nennt die Elemente von $P_B := \{f \in B' \mid f_{|C_B} \geq 0\}$ <u>Zustände auf B</u> (bzgl. C_B), die Extremalpunkte von P_B <u>reine Zustände.</u> Sei weiter $A \subseteq B$ ein abgeschlossener Unterraum von B mit $u \in A$, $C_A \subseteq A$ mit $\lambda C_A \subseteq C_A$ für alle $\lambda \geq 0$ und $C_A \subseteq C_B$. Zustände und reine Zustände auf A seien entsprechend definiert. Dann gilt: Ein reiner Zustand f auf A kann genau dann zu einem reinen Zustand auf B fortgesetzt werden, wenn es eine lineare Fortsetzung $F \in B'$ von f gibt, mit $F_{|C_B} \geq 0$.

Als Anwendung erhält man den folgenden Fortsetzungssatz für maximale Ideale: Sei B komplexe, kommutative Banachalgebra mit Identität u und stetiger Involution $*$, $A \subseteq B$ eine abgeschlossene $*$-Unteralgebra mit $u \in A$. Mit $C_B := \{x^* x \mid x \in B\}$ und $C_A := \{x^* x \mid x \in A\}$ erhält man: Eine positive, multiplikative Linearform auf A kann genau dann zu einer positiven, multiplikativen Linearform auf B fortgesetzt werden, wenn sie eine positive, lineare Fortsetzung besitzt.

C. PORTENIER : <u>Prolongements extrêmaux des formes linéaires positives.</u>

Sei F geordneter Vektorraum, E Teilraum von F, τ positive Linearform auf E und P_τ^F die (konvexe) Menge aller positiven, linearen Fortsetzungen von τ auf F. <u>Satz</u>: μ ist Extremalpunkt von $P_\tau^F \Longleftrightarrow$
$\forall f \in F \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists e \in E,\; h \in F_+ : e \geq f-h,\; \mu(h) \leq \varepsilon,\; \mu(e) \leq \mu(f) + \varepsilon$.
Man betrachtet weiter die Elemente von P_τ^F, die durch transfinite Anwendung eines Prozesses der folgenden Art gewonnen werden:
$H \supseteq E$ sei ein (maximaler) konvexer Kegel mit der Eigenschaft, daß durch $h \mapsto \tau_*(h) := \sup\{\tau(e) \mid e \in E,\; e \leq h\}$ eine additive Abbildung $\tau_* : H \to \mathbb{R}$ definiert wird. τ_H sei dann die positive, lineare Fortsetzung von τ_* auf $H - H$. Alle derartigen Elemente von P_τ^F sind Extremalpunkte von P_τ^F und heißen <u>(maximale) reguläre Extremalpunkte</u>. Es gilt der folgende Satz vom KREIN-MILMAN-Typ :
Ist E cofinal in F, so ist P_τ^F die $\sigma(F^*, F)$-abgeschlossene, konvexe Hülle seiner (maximalen) regulären Extremalpunkte.

A. LAZAR : <u>Extensions of compact operators.</u>

Nach einem Resultat von GROTHENDIECK (1955) sind für einen Banachraum X äquivalent: (1) X^* ist ein $L_1(\mu)$-Raum für ein Maß μ.
(2) Für je zwei Banachräume Y,Z mit $Y \subseteq Z$, jedes $\varepsilon > 0$ und jeden kompakten Operator $T: Y \to X$ ex. eine kompakte Fortsetzung $\tilde{T}: Z \to X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq (1+\varepsilon)\|T\|$. LINDENSTRAUSS (1964) zeigte, daß X polyedral sein muß, wenn (2) auch für $\varepsilon = 0$ gilt. (Ein Banachraum heißt nach

KLEE polyedral, falls die Einheitskugel eines jeden seiner endlichdimensionalen Teilräume ein Polyeder ist.) Mit Hilfe eines Schnittsatzes und eines Resultats von ZIPPIN über isometrische Einbettungen von c konnte die folgende, schärfere Aussage gezeigt werden: Für einen Banachraum X sind äquivalent: (1) X^* ist ein $L_1(\mu)$-Raum und X ist polyedral. (2) Für je zwei Banachräume Y,Z mit $Y\subseteq Z$ und jeden kompakten Operator $T: Y \to X$ ex. eine kompakte Fortsetzung $\tilde{T}: Z \to X$ mit $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

H. BAUER : <u>KOROVKIN's theorem and Choquet boundary.</u>

Der Vortrag brachte Sätze vom KOROVKIN-Typ in der folgenden Situation: Sei X ein lokalkompakter Raum, $\mathcal{X}$ ein (im Sinne von Choquet) adaptierter Teilraum von $C(X)=C(X,\mathbb{R})$, $\mathcal{X}_0 := \{f\in C(X) \mid \exists h\in\mathcal{X}: |f|\le h\}$ und $(L_i)_{i\in I}$ ein Netz monotoner Abbildungen von $\mathcal{X}_0$ in $\mathbb{R}^X$ derart, daß für jedes $h\in\mathcal{X}$ $(L_i h)_{i\in I}$ punktweise - bzw. lokal gleichmäßig - gegen h konvergiert. Man interessiert sich dann für die Funktionen $f\in\mathcal{X}_0$, für die $(L_i f)_{i\in I}$ ebenfalls punktweise - bzw. lokal gleichmäßig - gegen f konvergiert. Die wesentlichen Hilfsmittel für die Untersuchung dieser Funktionen wurden in einem Artikel des Vortragenden (Ann.Inst.Four. 11(1961)) entwickelt. Es zeigt sich, daß alle $\mathcal{X}$-affinen (oder $\mathcal{X}$-harmonischen) Funktionen im Sinne dieses Artikels zu der interessierenden Klasse gehören. Weiter ist bekannt, daß genau dann jedes $f\in\mathcal{X}_0$ $\mathcal{X}$-affin ist, wenn der Choquet-Rand von X bzgl. $\mathcal{X}$ ganz X ist. Diskutiert wurden schließlich noch Anwendungen - z.B. auf den Approximationssatz von STONE - und mögliche weitere Untersuchungen - z.B. der Ordnungstopologie auf $\mathcal{X}_0$ - in diesem Kontext.

H. MILLINGTON : <u>Tight extensions of cylinder measures and nuclearity of locally convex spaces.</u>

Es sei X ein lokalkonvexer Raum mit Topologie τ. Für $0<p<\infty$ sei τ^p die gröbste Topologie auf X, bzgl. der jeder ~~Banachraum-wertige~~, p-quasiintegrierbare lineare Operator auf X stetig ist. (X,τ^p) ist dann ein topologischer Vektorraum. Nimmt man an, daß τ durch eine Familie von inneren Produkten definiert ist, so gilt der folgende <u>Satz</u> : Sei μ ein Zylindermaß auf dem topologischen Dual X' von X : (1) Ist der zu μ assoziierte lineare sochastische Prozeß für ein p τ^p-stetig, so ist μ straff bzgl. $\Upsilon := \{A\subseteq X' \mid A$ schwach abgeschlossen und gleichstetig$\}$ (D.h.: für jedes $\varepsilon>0$ ex. $S\in\Upsilon$, sodaß für jede zu S disjunkte Zylindermenge Z $\mu(Z)<\varepsilon$ gilt.)

(2) Ist umgekehrt μ straff bzgl. Υ, so ist der zu μ assoziierte lineare stochastische Prozeß für jedes p τ^p-stetig.
Als Anwendungen dieses Satzes erhält man Verallgemeinerungen von Resultaten von MINLOS (Charakterisierung nuklearer Räume) und PIETSCH - PEŁCZYNSKI (Charakterisierung von Hilbert-Schmidt Operatoren).

D. KÖLZOW : Injectivity and projectivity in functional analysis.

Durch Auszeichnung einer Teilklasse von Morphismen in einer Kategorie wird ein sog. kategorisches Paar definiert. Für ein kategorisches Paar werden die Begriffe des injektiven und des projektiven Objektes sowie der Hülle und der Kohülle eines Objektes definiert. Auf der Grundlage dieser Begriffe wurde eine Übersicht über folgende Probleme gegeben :

a) Charakterisierung der injektiven Banachräume.
b) Charakterisierung der projektiven kompakten Räume.
c) Konstruktion der projektiven Kohülle eines kompakten Raumes.
d) Konstruktion der injektiven Hülle eines Banachraumes.
e) Charakterisierung der projektiven Banachräume.
f) Charakterisierung der Banachräume mit projektiver Kohülle.
g) Dualitätsaussagen über injektive und projektive Banachräume.
h) Injektivität und Projektivität von Boole'schen - und von C^*-Algebren.
i) Quasidualität von Kategorien.

ST. SIMONS : Norms on ideals of operators.

Es bezeichne L (L_o) die Klasse aller beschränkten Operatoren (von endlichem Rang) zwischen Banachräumen. $\alpha: L_o \to \mathbb{R}_+$ heißt eine Quasinorm, falls für je drei Banachräume E, F, G gilt :
(i) für jedes $T \in L(E,F)$ und $S \in L_o(F,G)$ gilt : $\alpha(ST) \leq \alpha(S)\|T\|$;
(ii) für jedes $T \in L_o(E,F)$ und $S \in L(F,G)$ gilt : $\alpha(ST) \leq \|S\|\alpha(T)$.
Eine Quasinorm α heißt "splitting", falls für je zwei Banachräume E, F, jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $T \in L_o(E,F)$ Banachräume G, H, $P \in L_o(E,G)$, $Q \in L_o(G,H)$ und $R \in L_o(H,F)$ existieren mit : $T = RQP$ und $\|R\| \alpha(Q) \|P\| \leq \alpha(T) + \varepsilon$.
Mit Hilfe dieser Begriffsbildung und des Prinzips der "lokalen Reflexivität" lassen sich allgemeine Sätze beweisen, aus denen - unter anderem - folgt : (1) Die zu einer (p,q)-summierenden Abbildung biduale Abbildung ist (p,q)-summierbar. (2) Hat der Dualraum E' eines Banachraumes E die metrische Approximationseigen-

schaft nach GROTHENDIECK, so hat (E,E') die metrische Approximationseigenschaft nach SCHWARTZ. Weiter erhält man Charakterisierungen von $\mathcal{L}_p$-Räumen durch Operatoren.

G. Mägerl (Erlangen)