MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 2/1974

Mengenlehre und Modelltheorie

6. 1. bis 12. 1. 1974

Die Tagung, die speziell das Studium der Modelle der Arithmetik zweiter Stufe zum Gegenstand hatte, wurde von U. Felgner (Heidelberg), A. Oberschelp und K. Potthoff (beide Kiel) geleitet. Den Teilnehmern stand ein von U. Felgner sorgfältig ausgearbeiteter Tagungsplan zur Verfügung, der sich an dem Beitrag von W. Marek zum Logik-Kongress in Orleans (1972) orientierte und mit einer umfangreichen Literaturliste versehen war.

Die Arithmetik der zweiten Stufe A_2 (Analysis) wird als Funktionen- oder Prädikatenkalkül in einer Logik zweiter Stufe oder einer zweisortigen Logik formalisiert. Neben dem Standardmodell $\mathfrak{S}$, zu dem alle vollen Modelle von A_2 isomorph sind, wurden ω-Modelle und β-Modelle eingeführt. ω-Modelle sind dadurch ausgezeichnet, daß ihr Individuenbereich durch $<$ vom Typ ω geordnet ist, d. h. die "natürlichen Zahlen" sind in diesen Modellen absolut. Für β-Modelle ist darüber hinaus der Begriff der Wohlordnung absolut.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Es wurden eine Reihe wichtiger Eigenschaften der Modelle und der zugehörigen Satzmengen $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_\omega$ und $\mathbb{A}_\beta$ besprochen, u. a. die Repräsentierbarkeit von Mengen, rekursionstheoretische Eigenschaften, andere Charakterisierungen der Modelle und schließlich die Existenz bzw. Nichtexistenz minimaler Modelle.

Eine Fortsetzung dieser Tagung unter der Leitung von Professor A. Mostowski ist für den Herbst geplant.

Teilnehmer

G. Bitsch, Tübingen
W. Boos, Iowa City (USA)
H. G. Carstens, Hannover
K. Devlin, Heidelberg
E. Drewitz, Neubiberg
W. Eck, Berlin
U. Felgner, Heidelberg
W. Felscher, Tübingen
R. Fittler, Berlin
T. B. Flannagan, Heidelberg
U. Friedrichsdorf, Kiel
K. Gloede, Heidelberg
G. Hesse, Hannover
R. Lehmann, Berlin
W. Maaß, München
G. H. Müller, Heidelberg
A. Oberschelp, Kiel
H. Pfeiffer, Hannover
K.-P. Podewski, Hannover
W. Pohlers, München
K. Potthoff, Kiel
A. Prestel, Bonn
P. Rath, Münster
W. Rautenberg, Gießen
P. Schmitt, Heidelberg
W. Schönfeld, Stuttgart
P. Schroeder, Bonn
W. Schwabhäuser, Stuttgart
H. Schwichtenberg, Münster
K. Seeland, Stuttgart
H. Spreckelmeyer, Hannover
M. Stein, Münster
E. J. Thiele, Berlin
W. Thomas, Freiburg
G. Todt, Kiel
H. Vogel, Münster
H. Volger, Tübingen
M. Ziegler, Berlin

Vortragsauszüge

U. FELGNER: Die Peano-Arithmetik der 2. Stufe A_2 und ihre Modelle

Es wurde zunächst das formale System A_2 der Arithmetik der zweiten Stufe formalisiert. Sei $\mathbb{A}_2 = Cn(A_2)$ die Menge aller Aussagen der 2. Stufe, die aus A_2 syntaktisch ableitbar sind. Der Vollständigkeits-Satz zeigt $Cn(A_2) = \{\Phi;\ \Phi$ gilt in allen Modellen $\mathfrak{A}$ von $A_2\}$. Isomorphie-Satz: Je zwei volle Modelle von A_2 sind isomorph. Um die Komplexität der Theorie A_2 zu messen, wurde zunächst bewiesen: Eine Teilmenge $S \subseteq \omega$ ist in $\mathbb{A}_2$ genau dann repräsentierbar, wenn $S \in \Sigma_1^0$ gilt. Daraus folgt: $\mathbb{A}_2$ ist (nach geeigneter Gödelisierung) eine vollständige Σ_1^0 - Menge im Sinne von Post. Aus der Tatsache, daß $\mathbb{A}_2$ und $\{\neg\Phi;\ \Phi \in \mathbb{A}_2\}$ rekursiv inseparabel sind, folgt, daß $\mathbb{A}_2$ wesentlich unentscheidbar ist. Als Korollar ergibt sich, daß $\mathbb{A}_2$ keine vollständige Theorie ist.

H. G. CARSTENS: Die ω-vollständige Peano-Arithmetik der 2. Stufe und ω-Modelle

Ein Modell von A_2 heißt ω-Modell, falls jedes Element des Zahlbereichs Interpretation einer Ziffer ist.

$\mathbb{A}_\omega := \{\Phi:\ \Phi$ gilt in allen ω-Modellen von $A_2\}$

Es wurde folgendes dargestellt:

A. $\mathbb{A}_\omega$ ist syntaktisch charakterisierbar: $\mathbb{A}_\omega = Cn_\omega(A_2)$

B. $\mathbb{A}_2 \subsetneq \mathbb{A}_\omega \subsetneq Th_2(\mathfrak{S})$

C. $\mathbb{A}_\omega$ ist Δ_1^1 - unentscheidbar und Σ_1^1 - unvollständig.

Dazu wurde gezeigt:

1. ω- Vollständigkeitssatz: $\mathbb{A}_\omega = Cn_\omega(A_2)$
2. $\mathbb{A}_\omega \cap L(A_1) = Th_1(\mathfrak{N})$
3. $\mathbb{A}_\omega \in \Pi^1_1$: $\mathbb{A}_\omega \subsetneq Th_2(\mathfrak{S})$
4. R Π^1_1 - Menge $\Leftrightarrow$ R repräsentierbar in $\mathbb{A}_\omega$
5. $\mathbb{A}_\omega$ Π^1_1 - vollständig : $\mathbb{A}_2 \subsetneq \mathbb{A}_\omega$
6. R Δ^1_1 - Menge $\Leftrightarrow$ R stark repräsentierbar in $\mathbb{A}_\omega$
7. $(\mathbb{A}_\omega, \neg\mathbb{A}_\omega)$ Δ^1_1 - inseparabel
8. $\mathbb{A}_\omega$ Δ^1_1 - unentscheidbar und Σ^1_1 - unvollständig.

K. GLOEDE: <u>β-Modelle von A_2</u>

Ein Modell $\mathfrak{M}$ der Arithmetik der 2. Stufe A_2 heißt β-Modell, wenn $\mathfrak{M}$ für Wohlordnungen absolut ist.

Satz 1: Jedes β-Modell ist ein ω-Modell.

Satz 2: Ein ω-Modell $\mathfrak{M}$ von A_2 ist ein β-Modell genau dann, wenn Π^1_1 - (und Σ^1_1 -) Formeln absolut sind bezüglich $\mathfrak{M}$.

Als Folgerung erhält man: Eine Π^1_2 - Aussage (u. U. mit Parametern für Zahlen) gilt im Standardmodell von A_2 genau dann, wenn sie in allen β-Modellen gilt. Folglich gibt es ω-Modelle von A_2, die keine β-Modelle sind.

Es wird der Begriff der "verzweigt analytischen Menge" eingeführt; dieser Begriff ist ebenfalls absolut für β-Modelle.

Satz 3: Ein elementares Submodell (bzgl. der Sprache von A_2) eines β-Modells ist ebenfalls ein β-Modell. Folglich gibt es abzählbare β-Modelle.

H. VOLGER: Universalität und Unvollständigkeit von $\mathbb{A}_\beta$

Zuerst wurden Resultate über β-Modelle aus der Mostowski'schen Arbeit in den "Infinitistic Methods" vorgetragen. Es wurde gezeigt, daß $\mathbb{A}_\beta = \{\ulcorner\Phi\urcorner \mid \Phi$ gilt in allen β-Modellen von $A_2\}$ eine universelle Π^1_2 - Menge ist. Außerdem erhält man, daß die in $\mathbb{A}_\beta$ repräsentierbaren Mengen genau die Π^1_2 - Mengen sind. Als Konsequenz erhält man $\mathbb{A}_\beta \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{S})$, d.h. $\mathbb{A}_\beta$ ist unvollständig. Dabei ist $\mathfrak{S}$ das Standardmodell von A_2. Schließlich kann man noch zeigen, daß die in $\mathbb{A}_\beta$ stark repräsentierbaren Mengen eine echte Teilmenge der Δ^1_2 - Mengen sind.

Im weiteren wurde über Resultate aus einer Arbeit von Enderton (JSL 32,4 (1967), 447 - 451) vorgetragen. Enderton führt die infinitäre $\mathcal{A}$-Regel ein, die es erlaubt, von $\exists\alpha\forall n \vdash \Phi(\bar{\alpha}(n))$ zu $\vdash \exists\nu\forall x\ \Phi(\bar{\nu}(x))$ überzugehen. Die ω-Regel ist in A_2 aus der $\mathcal{A}$-Regel herzuleiten, aber nicht umgekehrt, d.h. $\mathbb{A}_\omega \subsetneq \mathcal{A}$. Hingegen ist die duale Form der $\mathcal{A}$-Regel in $\mathbb{A}_\omega$ herleitbar. $d\beta$-Modelle sind Modelle von A_2, in denen Wohlordnungen, die durch eine Formel definiert werden, absolut sind. Jedes $d\beta$-Modell ist β-Modell, und jedes $d\beta$-Modell ist ω-Modell, aber nicht umgekehrt, d.h. $\mathbb{A}_\omega \subsetneq \mathbb{A}_{d\beta} = \{\ulcorner\Phi\urcorner \mid \Phi$ gilt in allen $d\beta$-Modellen von $A_2\}$.
$\mathfrak{M}$ ist $d\beta$-Modell genau dann, wenn $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ unter der $\mathcal{A}$-Regel abgeschlossen ist, daher gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{A}_{d\beta}$. Es ist ein offenes Problem, ob $\mathcal{A} = \mathbb{A}_{d\beta}$ gilt.

A. OBERSCHELP: Arithmetik höherer Stufe und Mengenlehre

Nach P. Zbierski (Bull. Acad. Polon. 19 (1971) 557 - 562) werden Systeme A_n ($2 \leq n < \omega$) der Arithmetik n-ter Stufe mit Auswahlaxiom eingeführt und Systeme ZF_n der Mengenlehre mit abgeschwächtem Potenzmengenaxiom (es braucht nur die (n-2) - mal iterierte Potenzmenge von ω zu existieren).
A_n ist in ZF_n und ZF_n ist in A_n interpretierbar. Die Interpretation von ZF_n in A_n geschieht mittels fundierter Graphen. Dabei entsprechen sich β-Modelle von A_n und transitive $\in$-Modelle von ZF_n.
Ferner zeigt sich, daß ZF_n konservative Erweiterung von A_n ist.
Durch Betrachtung konstruktibler Modelle erhält man die Existenz eines minimalen β-Modelles von A_n. Dieses läßt sich nicht zu einem Modell von A_{n+1} erweitern (durch bloßes Zufügen einer (n+1)-ten Stufe).

W. POHLERS: ω-Modelle, die keine β-Modelle sind

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache der Arithmetik zweiter Stufe A_2, $\mathfrak{M}$ ein abzählbares β-Modell von A_2. Wir erweitern die Sprache $\mathcal{L}$ um einen Namen für alle Elemente von $|\mathfrak{M}|$ und eine Konstante R. Durch mehrmaliges Anwenden des Schubfachprinzips läßt sich eine ω-vollständige Satzmenge B konstruieren, so daß $Th(\langle \mathfrak{M}, c\rangle_{c \in |\mathfrak{M}|}) \subset B$ und $Bord(R) \in B$ gilt, aber jedes Modell von B eine unendliche, bezüglich der

Interpretation von R echt absteigende Folge enthalten muß. Damit existiert ein ω-Modell $\mathfrak{M}_1$ von B, das kein β-Modell ist. Das $\mathcal{L}$ - Retrakt von $\mathfrak{M}_1$ ist eine elementare Erweiterung von $\mathfrak{M}$. Damit folgt:

Satz: Jedes abzählbare β-Modell von A_2 hat eine elementare Erweiterung, die ω-Modell, aber nicht β-Modell ist.

Korollar 1: Zu jedem β-Modell gibt es ein elementar äquivalentes ω-Modell, das kein β-Modell ist.

Korollar 2: Hat eine Satzmenge A ein ω-Modell, so besitzt sie auch ein ω-Modell, das kein β-Modell ist.

(Nach A. Mostowski - Y. Suzuki: On ω-models which are not β-models; Fund. Math. 65 (1969))

K. POTTHOFF: Modelle von A_1 und A_2 und Standardteile von A_2-Modellen

Es wurden die beiden folgenden Sätze vorgetragen:

Satz (Ehrenfeucht, Kreisel): Es gibt Nichtstandardmodelle der Arithmetik, die zu keinem Modell der Analysis erweitert werden können.

Satz (Mostowski): Zu jedem ω-Modell von A_2 + DC (Dependent Choices) gibt es ein elementar äquivalentes Modell, dessen Standardteil kein Modell von A_2 ist.

Literatur: Ehrenfeucht - Kreisel: Strong Models of Arithmetic; Bull. Acad. Polon. Sci. 14 (1966) S. 107 - 110.

Mostowski, A.: Models of second order arithmetic with definable Skolem functions; Fund. Math. 75 (1972) S. 223 - 234.

H. SCHWICHTENBERG: <u>Minimale Modelle der Analysis</u>

Bewiesen wird

1) (Gandy-Kreisel-Tait): Der Durchschnitt aller ω-Modelle besteht aus den hyperarithmetischen Funktionen. Es gibt also kein kleinstes ω-Modell.

2) (Gandy-Putman): Es gibt ein kleinstes β-Modell, und zwar besteht es aus den verzweigt analytischen Mengen.

G. Todt (Kiel)