MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 3/1974

Zahlentheorie

13.1. bis 19.1.1974

Die Zahlentheorietagung, in deren Mittelpunkt insbesondere elementare und analytische Zahlentheorie stand, fand in diesem Jahr vom 13. bis 19. Januar im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt. Die Leitung hatten H.E.Richert (Ulm), W.Schwarz (Frankfurt) und E.Wirsing (Marburg) übernommen. An der Tagung nahmen 42 Zahlentheoretiker, darunter 23 aus dem Ausland, teil.

In 36 Kurzvorträgen wurde über neue Ergebnisse aus den folgenden Themenkreisen berichtet: Additive und multiplikative zahlentheoretische Funktionen, Siebmethoden, Primzahlverteilung, Nullstellen von Dirichletreihen, Gleichverteilung, Geometrie der Zahlen, kombinatorische Zahlentheorie.

<u>Teilnehmer</u>

H.Daboussi, Orsay
H.Delange, Orsay
H.G.Diamond, Illinois
B.Diviš, Frankfurt
J.Duttlinger, Frankfurt
P.Erdös, Haifa
R.Fischer, Salzburg
H.W.Hagedorn, Ulm
I.A.Haight, London
G.Halász, Budapest
E.Heppner, Freiburg
R.H.Hudson, Durham/USA
M.Huxley, Cardiff
K.-H. Indlekofer, Frankfurt
H.Iwaniec, Warszawa
H.Jager, Amsterdam
M.Jutila, Turku
H.-J.Kanold, Braunschweig
W.Klotz, Clausthal-Zellerfeld
J.Kubilius, Vilnius
L.Lucht, Clausthal-Zellerfeld
M.Mendes-France, Talence
H.L.Montgomery, Ann Arbor
W.Narkiewicz, Wroclaw

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

B.Novák, Prag
G.J.Rieger, Hannover
R.Rotermund, Ulm
B.Saffari, Boulogne
H.Sarges, Marburg
W.Schaal, Marburg
A.Schinzel, Warszawa
P.G.Schmidt, Marburg
Th.Schneider, Freiburg
W.Schwarz, Frankfurt
H.Siebert, Ulm
J.Steinig, Genf
E.Szemerédi, Budapest
R.Tijdeman, Leiden
R.C.Vaughan, London
B.Volkmann, Stuttgart
R.Warlimont, Regensburg
E.Wirsing, Marburg

Vortragsauszüge

H.DABOUSSI, Limit periodic multiplicative functions.

f is a multiplicative function satisfying $|f(n)| \leq 1$, F is a real additive function. Delange and I have proved the following results:

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)\, e^{2\pi i n \alpha} = o(1) \quad \text{for every } \alpha \notin \mathbb{Q},$$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)\, e^{2\pi i n \frac{h}{s}} = \begin{cases} o(1) & \text{or} \\ Cx^{ia} \exp iA(x) + o(1), & \end{cases}$$

where $C \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ and $A : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ satisfying

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sup_{x < y \leq x^2} |A(y) - A(x)| \right) = 0.$$

For the function f to be almost periodic Besicovitch it is necessary and sufficient that

$$\sum_{p} \frac{1 - f(p)\chi(p)}{p}$$

converge for some Dirichlet character χ. In that case we have studied the convergence and the summability D(log n) of the generalized Ramanujan sum associated to f. We give applications to the limit distribution of $F(u_n)$ for some sequences (u_n) of integers.

H.DELANGE, <u>On complex-valued multiplicative functions.</u>

Let f be a complex-valued multiplicative function. For each positive integer n we define a measure on $\mathbb{C}$ by $\mu_n(E) = \frac{1}{n} \times$ number of the $m \leq n$ for which $f(m) \in E$. Our purpose is to study the asymptotic behaviour of the sequence $\{\mu_n\}$.

1. Suppose first that $|f(n)| \leq 1$ for every n. Then one of the following circumstances occurs:
   (a) $\{\mu_n\}$ converges to a limit measure μ which is invariant by all rotations about the origin.
   (b) There exist a real number a and a sequence $\{\beta_n\}$ of real numbers satisfying $\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{n\leq m\leq n^2}|\beta_m-\beta_n|\right)=0$, such that by performing on each μ_n a rotation of angle $-\theta_n = -(a \log n + \beta_n)$ we get a sequence of measures converging to a limit measure which is not invariant by all rotations about the origin.
   We have necessary and sufficient conditions for the sequence $\{\mu_n\}$ to converge.
2. In the general case we give necessary and sufficient conditions for the sequence $\{\mu_n\}$ to converge to a limit measure <u>not concentrated at the origin</u>.

H.DIAMOND, <u>Oscillation theorems.</u>

A theorem of Littlewood asserts that $\pi(x)-li(x)$ changes sign infinitely often. Another proof of this theorem is given which avoids use of the explicit formula for Ψ (Chebyschev's function). The argument depends on an analogue of the Wiener-Ikehara Theorem which enables us to express a certain average of π in terms of zeros of the Riemann zeta function.

B.DIVIŠ, On cubic and biquadratic gaussian sums.

Let $\tau=\sum_{0}^{p} \chi(x)\zeta^{x}$ be the normed cubic (resp. biquadratic) gaussian sum for $p\equiv 1(3)$ (resp. $p\equiv 1(4)$). If $\chi(-1)=-1$ then $L(1,\chi) = -\frac{\pi i}{p(2-\chi(2))}\tau\sum_{0}^{p/2}\bar{\chi}(x)$. For $\chi(-1)=1$, we put $\chi^{*}(x) = (-1)^{(x-1)/2}\chi(x)$, $(x,2p)=1$. We obtain an equally simple relation $L(1,\chi^{*}) = \frac{\pi}{p}\tau\sum_{0}^{p/4}\bar{\chi}(x)$. The hope was expressed that the values of $\varphi=\operatorname{Arg} L(1,\chi)$ (or $\operatorname{Arg} L(1,\chi^{*})$) might satisfy $|\varphi|<\frac{\pi}{3}$ (resp. $\frac{\pi}{2}$) in the cubic (resp. biquadratic) case. This would mean that the "sign" of τ could be determined just from the value of the simple sum $\sum_{0}^{p/2}\bar{\chi}(x)$ (or $\sum_{0}^{p/4}\bar{\chi}(x)$). This was questioned by Montgomery who could show that there exist characters χ mod p for which $\operatorname{Re} L(1,\chi)<0$. He believes that the same is true already for the special characters above.

F.DRESS, On Waring's problem for real exponents.
(Dieser Vortrag konnte nicht gehalten werden.)

An elementary and extremely detailed study of the sums $a_1^c+a_2^c$ leads to a very precise termination of a bound $M_3(c)$ beyond which every integer is the sum of three terms $[a_i^c]$. This allows

-first, to give again the result of Segal:

$$G(c) = 2 \text{ or } 3 \quad \text{for} \quad 1 < c < 3/2;$$

-second, to determinate a list of intervals where $g(c)=3$ (while the heuristic obviousness lead to conjecture that $g(c)=2$ on the complementary).
(Long calculations with a computer are necessary.)

P.ERDÖS, Probleme in der kombinatorischen Zahlentheorie

Es sei $r_k(n)$ die kleinste Zahl, so daß jede Folge ganzer Zahlen $1 \leq a_1 < \ldots < a_\ell \leq n$ mit $\ell=r_k(n)$ eine k-gliedrige arithmetische Progression enthält. Szemerédi bewies vor kurzem $r_k(n)/n \to 0$, er vermutet $r_k(n)/r_{k-1}(n) \to \infty$, kann aber nicht einmal $r_k(n)/r_3(n) \to \infty$ beweisen.
$r_k^{(t)}(n)$ sei die kleinste Zahl, so daß für jede Folge $1 \leq a_1 < \ldots < a_\ell \leq n$, $\ell=r_k^{(t)}(n)$, eine t-gliedrige arithmetische Progression existiert, so daß unsere Folge mindestens k Elemente in dieser Progression hat.
$r_\ell^{(t)}(n)/r_k(n) \to \infty$ gilt wohl für jedes $t > k$; dies konnte ich aber nicht beweisen. $r_k^{(t)}(n) > n^{2-\epsilon}$ folgt unschwer (mit Behrend).
Benkoski und ich haben folgende Frage: Gibt es ein c mit der Eigenschaft: wenn $\sigma(n)/n > c$ ist, dann ist n die Summe gewisser seiner Teiler. Ein altes Problem von mir besagt: zu jedem c gibt es ein n mit $\sigma(n)/n > c$, so daß man mit den Teilern von n keine covering congruence bilden kann.

R.FISCHER, Der Satz von Gauß-Kuzmin für lineare f-Entwicklungen

Es sei A eine nichtsinguläre reelle $(d\times d)$-Matrix, $b\in \mathbb{R}^d$ und f die Affinität $x \mapsto Ax+b$ des $\mathbb{R}^d$. Für jedes $x\in[0,1]^d$ wird eine Folge $k^{(1)},k^{(2)},\ldots$ ganzzahliger Vektoren ("Ziffern") wie folgt erklärt: $k^{(n)}=[f(T^{n-1}x)]$, wobei $[(z_1,z_2,\dots,z_d)] = ([z_1],\dots,[z_d])$ und $Tz=f(z)-[f(z)]$ $(z\in \mathbb{R}^d)$ bedeuten. Gilt $\|Az\| > \|z\|$ für alle $z\in\mathbb{R}^d$, dann besteht die Beziehung $x=\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(k^{(1)}+f^{-1}(k^{(2)}+\dots+f^{-1}(k^{(n)})\dots))$ für jedes $x\in[0,1]^d$ (f-Entwicklung von x). Für viele Fragen, die die Ziffernverteilung betreffen, spielt das ergodische Verhalten der Transformation $T:[0,1]^d\to[0,1]^d$ eine zentrale Rolle. Im besonderen ist die Existenz eines zum Lebesgueschen Maß m äquivalenten bezüglich T invarianten Maßes μ von Bedeutung. Sind die Elemente von A und b ganzzahlig, so kann $\mu=m$ genommen werden, andernfalls gilt unter bestimmten Voraussetzungen über A der Satz: <u>Es gibt ein bezüglich T invariantes, zu m äquivalentes Maß μ;</u>

$$\frac{dmT^{-n}}{dm} = \frac{d\mu}{dm} + O(\rho^{-n}) \quad \text{f.ü.} \quad (\rho > 1).$$

(Eine Reihendarstellung für $\frac{d\mu}{dm}$ kann angegeben werden.) Aus diesem Satz folgen starke Mischungseigenschaften für T und ein Gesetz vom iterierten Logarithmus für die Zufallsveränderlichen $k^{(n)}$ $(n=1,2,\dots)$.

H.W.HAGEDORN, <u>Ein Vergleich des Selberg- und Rosserschen Siebes</u>

Ankeny und Onishi zeigten, daß die Selbergsche Siebmethode für die Siebfunktion S(A,P,z) eine untere Schranke liefert, die genau für $u > \nu_k$ (k=Dimension des Siebes) positiv ist, mit $\nu_k \leq 2(e-1)k+1+2\log\frac{e-1}{e-2}$ $(k \geq 1)$.
Wir zeigen $\nu_k \leq 2{,}73k+6{,}1$ $(k \geq 1)$. Durch numerische Rechnungen zeigen wir, daß die Selbergsche Siebmethode für S(A,P,z) eine bessere untere Schranke als das Rossersche

Sieb liefert, wenn $1 < k \leq 2$ und $0 < u \leq 2$ ist. (Zu den Bezeichnungen vergleiche: H.E.Richert, Selberg's Sieve with Weights. Proc.Symposia Pure Math. 20 (1971), 287-310.)

I.A.HAIGHT, Difference covers which have small k-sums for any k.

For any subsets of a group G, written additively we write $E-F=\{x-y \mid x\in E,\ y\in F\}$ and $(k)E=E+\ldots+E$ (k summands). The problem is to find sets F such that $F-F \supset G$ but $(k)F$ is small in some natural sense. For instance when G is $\mathbb{R}$, P.Erdös showed that there is a set $E \subset \mathbb{R}$, such that $E-E \supset \mathbb{R}$ but $(k)E$ has Lebesgue Measure zero (Colloqu.Math. 10 (1963), 267-269). However the prove involves both the Axiom of Choice and the Continuum Hypotheses and the set E is not topologically respectable in any way (i.e. compact, F_σ etc.). The two main results I mention are:

Theorem I. For any positive integers k,ℓ $\exists$ a modulus $q(k,\ell)$ and a set of residues $F(q,k,\ell)$ such that $F-F= \mathbb{Z}(q)$ but $(k)F$ omits ℓ consecutive residues.

Theorem 2. $\exists$ $E\subset \mathbb{R}$ such that $E-E \supset \mathbb{R}$ but $|(k)E|=0$ for any k. Furthermore E is of type F_σ.

G.HALÁSZ, Über die lokale Verteilung additiver Funktionen

Der Vortrag hat zum Ziel, eine positive Antwort auf die Vermutung von Erdös

$$\max_{-\infty<\alpha<\infty} \sum_{\substack{n<x \\ g(n)=\alpha}} 1 \leq \frac{cx}{\sqrt{\log\log x}}$$

(c absolute Konstante) zu geben, wobei $g(n)$ eine beliebige additive zahlentheoretische Funktion mit $g(p)\neq 0$ ist. Ohne diese letzte Bedingung ist loglog x durch $\sum\limits_{\substack{p<x \\ g(p)\neq 0}} \frac{1}{p}$

zu ersetzen. Die Abschätzung ist scharf, wie das Beispiel $g(n)=\sum_{p|n} 1$ zeigt. (Die Untersuchung solcher Fragen in dieser Allgemeinheit wurde erst im Jahre 1973 von Erdös, Riesza und Sárközi (Acta Arithmetica) begonnen; sie behandeln aber nur solche Fälle, in denen Schranken cx erhalten werden können.)

E.HEPPNER, Über die Hintereinanderschaltung multiplikativer Funktionen

Ein Ergebnis von Erdös über die Iteration der Teilerfunktion wird verschärft und verallgemeinert zu:

Satz 1. Bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n. Dann gilt die asymptotische Formel

$$\sum_{n\leq x} d(d(n)) = cx \operatorname{loglog} x + \sum_{\alpha=0}^{N(x)} c_\alpha \frac{x}{(\log x)^\alpha} + R(x).$$

Dabei ist $N(x)=[\sqrt{\log x}]$ und $R(x)=O(x \exp(-c'\sqrt{\log x}))$ mit einer Konstanten $c'>0$.

Satz 2. Sei $F_2:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ multiplikativ, $F_2(p)=\prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i}$ konstant für alle Primzahlen p und $F_1:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ multiplikativ oder additiv mit $F_1(p_i^m)=P_i(m)$, wobei P_i ein Polynom vom Grade g_i ist. Weiter sei $F_i(n)\ll n^{\alpha_i}$ mit $\alpha_1\alpha_2<\frac{1}{2}$. Dann gilt mit

$$g = \begin{cases} \max\limits_{i\leq r} g_i & \text{für additives } F_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{r} g_i & \text{für multiplikatives } F_1 \end{cases}$$

die asymptotische Formel

$$\sum_{n\leq x} F_1(F_2(n)) = \sum_{\ell=0}^{g} c_\ell x(\operatorname{loglog} x)^\ell + O\left(\frac{x(\operatorname{loglog} x)^g}{\log x}\right).$$

R.H.HUDSON, Triples and Quadruples of Consecutive k-th powers.

Let F_k denote the class of totally multiplicative sequences taking on values in the group of k-th roots of unity. If f in F_k takes on s consecutive values of unity but never s+1 consecutive values it is said to have length s. A nearly complete proof of the conjecture of Mills that there exist exactly 2 members of F_2 with length 2 was given by Isaii Schur around 1940 and completed by me in 1972 to appear in Schur's Collected Works. This result leads to the first non-trivial upper bound for the first triple of consecutive quadratic residues, $r(2,3,p)=O(p^{1/4}\log p)$ for primes $p > 17$. A bound obtained using only elementary methods is $r(2,3,p)< 2^{1/4}3^{5/2}(31\ p^{2/5})+5022p^{1/5}+558$ for $p > 17$. I also announce the existence of 13 members of length 3. The functions are defined multiplicatively by $g(n)=(\frac{n}{p})$, $(n,p)=1$, $p=5,7,11,13,53$, $g(p)=\pm 1$; $g(n)\equiv n \pmod 4$, $(n,4)=1$, $g(2)=\pm 1$; $g(2)= -1$, $g(p)=1$ if p is an odd prime. Computer data and other considerations suggest that these may be the only members of F_2 with length 3.

M.N.HUXLEY, Über aufeinanderfolgende Primzahlen

Für welche reelle Zahlen E gilt $p_{n+1}-p_n \leq (E+o(1))\log p_n$ für unendlich viele n? Es wurde der Satz von Bombieri-Davenport skizziert, nach dem E=0,4665... sein kann. Beim Beweis muß man gewisse Zahlen u(-k),...,u(k) geeignet wählen. Piltjai hat E=0,4571,... erhalten. Genauer muß man aber u(-k),...,u(k) so wählen, daß

$$\sum_{|m-n|\leq k} u(m)u(n) - c\sum_{-k}^{k} u^2(m)$$

bei fester $\sum_{-k}^{k} u(n)$ maximal wird. Dann folgt

$$E = 1/4 + \pi/16 = 0{,}4463\ldots .$$

Es bleibt zu bemerken, daß eine weitere Verbesserung möglich ist.

K.-H.INDLEKOFER, Mittelwerte multiplikativer Funktionen

Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine multiplikative Funktion vom Betrage ≤ 1 mit konvergenter Reihe

$$\sum_{p \text{ prim}} \frac{1-\mathrm{Re}\, f(p)}{p}$$

und $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $a_n \ll n \quad (n=1,2,\ldots)$;

(ii) $\sum_{\substack{n \\ a_n = m}} 1 = O(1)$ gleichmäßig in m;

(iii) für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ a_n \equiv 0 (d)}} 1 = x \frac{\rho(d)}{d} + o(x) \qquad (x \to \infty),$$

wobei $o(.)$ von $\mathfrak{A}$ und d abhängen können und ρ eine positive, multiplikative Funktion ist. Dann gilt folgender

Satz: Für $x \to \infty$ ist

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(a_n) = C(f, \mathfrak{A})\, x^{ia} A(\log x) + o(1),$$

wobei $A(.)$ eine langsam oszillierende Funktion vom Betrag 1 und a eine reelle Zahl ist.

Beispiele: 1) $\mathfrak{A} = \{[\alpha n] : \alpha > 0 \text{ irrational}\}$, 2) $\mathfrak{A} = \{an+b : a, b \in \mathbb{N}\}$.

Auf eine weitere Klasse von Folgen $\mathfrak{A}$, für die (i) und (ii) nicht mehr zutrifft, der obige Satz aber gültig bleibt, wurde kurz eingegangen.

H.IWANIEC, Primes Represented by Quadratic Polynomials.

In this lecture some theorems will be discribed concerning primes represented by quadratic polynomial in two or more variables. One of them is the following

THEOREM. Let $F(x) \in Q[x_1,...,x_n]$ be a quadratic polynomial, integer valued (i.e. taking integer values in integer points) and irreducible in $Q[x_1,...,x_n]$. Let $F(x)$ assume positive values prime to an arbitrary given no-zero integer. Then if $f(x)$ depends essentially on at least two variables, it represents infinitely many primes.

H.JAGER, Primitive Charactere

Let $\Psi(x)$ denote the number of primitive Dirichlet characters with modulus not exceeding x. Let $\Phi(x) = \sum_{n\leq x}\varphi(n)$. Then $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{\Phi(x)} = \frac{6}{\pi^2} = 0.6079...$. If one regards $\Phi(x)$ as the total number of characters with modulus not exceeding x, then one might say that 0.6079... is the probability that a character be primitive. In doing so, certain characters are counted more then once if one looks at a character as a function $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ with certain properties, in $\Phi(x)$. E.g. in $\Phi(12)$, the character with $\chi(1)=1$, $\chi(2)=\chi(3)=\chi(4)=0$, $\chi(5)=-1$, $\chi(6)=0$, periodic mod 6, is counted twice.
It is proved that if one takes the standpoint that a character χ is an arithmetical function $\chi: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, then the above probability is greater, in fact, it turns out to

be $0.6079 \times \prod_p \left(1+\frac{1}{p^3+p^2-1}\right) = 0.6896\ldots$.

M.JUTILA, On character sums, Dirichlet polynomials and L-functions with real characters.

The talk deals with a mean-value theorem for character sums with real characters and some of its applications. The average is taken over all real characters having a modulus less than a given bound. Among the applications there are results on the k-th power of the class number of an imaginary quadratic field and on mean-values of Dirichlet polynomials and L-functions with real characters, as well as a zero-density theorem for L-functions, and a mean-value theorem for "short" character sums.

H.-J.KANOLD, Über Stirlingsche Zahlen 2. Art

Wir definieren die Stirlingschen Zahlen 2. Art $S_{m,n}$ $(m,n\in\mathbb{N})$ durch $S_{m,o}=1$, $S_{o,n}=0$ für $n > 0$, $S_{m,n}=S_{m-1,n-1}+(n+1)S_{m-1,n}$ für $m,n > 0$. Für $S_{m,n}$ lassen sich die folgenden elementaren Ungleichungen beweisen

$$\frac{(n+1)^m-n^{m+1}}{n!} \leq S_{m,n} \leq \frac{(n+1)^m-n^m}{n!} \leq e^n(n+1)^{m-n}.$$

Die obere Abschätzung können wir unter der Voraussetzung, daß $S_{m,o}<\ldots<S_{m,n-2} \leq S_{m,n-1}$ ist, verschärfen zu $S_{m,n} \leq \frac{(n+1)^m-(1-\frac{1}{e})n^{m+1}}{n!}$. Nun wird zu jedem natürlichen m die Zahl $n_o=n_o(m)$ so definiert, daß $S_{m,o}<\ldots<S_{m,n_o} \geq S_{m,n_o+1}$ gilt. Dann ist für $m \geq 2$

$$n_o+1 < \frac{m}{\log m}\left(1+\frac{\log\log m}{\log m}+\left(\frac{\log\log m}{\log m}\right)^2\right).$$

Dies verschärft Ergebnisse von Wegner (Crelle 262/3). Zum Schluß wird die bisher noch nicht entschiedene Frage aufgeworfen, ob die Stirlingschen Zahlen 2. Art einer sogenannten verallgemeinerten Galton Verteilung genügen.

W.KLOTZ, Dichteaussagen für die Lösbarkeit gewisser linearer Gleichungen

Es sei σ eine Menge endlicher Teilmengen in $\mathbb{N}$. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ heiße σ-frei, wenn gilt $T \subset A \Rightarrow T \notin \sigma$. Wie dicht kann eine σ-freie Menge höchstens sein? Zur Behandlung dieser Frage untersuchen wir die folgenden Größen:

$$\tau_\sigma(x) = \operatorname{Max}\{|A| : A \subset [1,x],\ \sigma\text{-frei}\},$$

$$\underline{d}(\sigma) = \sup_{\substack{A \subset \mathbb{N} \\ \sigma\text{-frei}}} \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x}, \quad \overline{d}(\sigma) = \sup_{\substack{A \subset \mathbb{N} \\ \sigma\text{-frei}}} \varlimsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x}.$$

Wir beschränken unsere Untersuchung auf Systeme σ, die aus den Lösungsmengen gewisser linearer Gleichungen bestehen.

J.KUBILIUS, On the limit distribution of additive functions.

Let $f(m)$ be a real valued strongly additive arithmetic function. Denote

$$A_n(f) = \sum_{p\leq n} \frac{f(p)}{p}, \qquad B_n^2(f) = \sum_{p\leq n} \frac{f^2(p)}{p}.$$

Theorem 1. Let

$$\varkappa_n = \sup_{f\not\equiv 0} n^{-1} B_n^2(f) \sum_{m=1}^{n} \left(f(m) - A_n(f)\right)^2$$

where the supremum is taken over all real-valued strongly additive arithmetic functions not vanishing identically.

Then for all sufficiently large n

$$1.47 < \varkappa_n < 2.1 .$$

Theorem 2. Suppose that a real-valued strongly additive arithmetic function satisfies the condition

$$\mu_n = B_n^{-1}(f) \max_{p \le n} |f(p)| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Denote

$$f(m)_k = \sum_{\substack{p|m \\ p\le k}} f(p).$$

Let $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ be two real functions in the interval $[0,1]$ such that

a) $\psi_1(t) < \psi_2(t)$,

b) $\psi_1(0) < 0 < \psi_2(0)$,

c) for certain $c > 0$ and for any t and $h > 0$ we have the inequalities

$$|\psi_j(t+h)-\psi_j(t)| \le ch \qquad (j=1,2).$$

Then the number of positive integers $m \le n$ for which

$$\psi_1\left(\frac{B_k^2(f)}{B_n^2(f)}\right) < \frac{f(m)_k - A_k(f)}{B_n(f)} < \psi_2\left(\frac{B_k^2(f)}{B_n^2(f)}\right) \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

equals

$$nP\Big(\psi_1(t) < w(t) < \psi_2(t),\ 0 \le t \le 1\Big) + \Theta\left(\frac{n\mu_n \ln\mu_n^{-1}}{\ln\ln\mu_n^{-1}}\right)$$

where P(...) denotes the probability that Brownian motion process $w(t)$, starting at the point 0, does not reach the boundaries $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$.

L.LUCHT, Über die Hintereinanderschaltung multiplikativer Funktionen

Ein bekanntes Resultat von E.Wirsing (Math. Ann. 137) besagt, daß es "ziemlich wenig" Lösungen n der Gleichung $\sigma(n) = \varkappa n$ gibt. Dabei sind $\sigma(n)$ die Summe der natürlichen Teiler von $n \in \mathbb{N}$ und $\varkappa$ eine reelle Konstante. Dieses Resultat läßt sich auf Lösungsanzahlen der Gleichung $f(n) = \varkappa n$ übertragen, falls die zahlentheoretische Funktion f geeignete Eigenschaften besitzt. Es gilt nämlich der nachstehende

Satz. Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $f = f_k \circ \dots \circ f_1$ die Hintereinanderschaltung lauter multiplikativer Funktionen $f_\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) Es gibt ein $d \geq 1$ mit $f_\ell(n) \leq n^d$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\ell = 1, \dots k$.

b) Für Primzahlen $p \to \infty$ gilt gleichmäßig in $\nu \in \mathbb{N}$

$$\frac{f_\ell(p^\nu)}{p^\nu} = 1 + o\left(\frac{\log p}{p}\right), \quad \ell = 1, \dots k.$$

c) Es gibt ein η, so daß die Gleichung $\prod_{\ell=1}^{k} f_\ell(a_\ell) = \prod_{\ell=1}^{k} a_\ell$ außer der trivialen Lösung $a_1 = \dots = a_k = 1$ keine weiteren Lösungen in natürlichen Zahlen $a_1, \dots, a_k$ besitzt, deren sämtliche Primteiler $> \eta$ sind.

Es sei ferner $x \geq 3$, $\varkappa > 0$ rational, und es bedeute $V_\varkappa(f,x)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $n \leq x$ mit $f(n) = \varkappa n$. Dann existiert eine von $\varkappa$ unabhängige Konstante c mit

$$V_\varkappa(f,x) \leq \exp\left(c \, \frac{\log x}{\log\log x}\right).$$

Diese Abschätzung gilt zum Beispiel, wenn die f_ℓ gleich σ oder φ sind. Für $k = 1$ ergibt sich insbesondere wieder das Ergebnis von Wirsing.

M.MENDES FRANCE, Equidistributed subsequences.

Let $q \geq 2$ be a given integer. Define the set $B(q) = \{x : (xq^n) \text{ equidistributed } (\mathrm{mod}\ 1)\}$. It is wellknown that for any integer $a \geq 1$, $B(q) = B(q^a)$. This result can be generalised in the following way. Let $\mathcal{C}$ be the family of functions g defined below. g is any increasing function $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that

$$\chi_g(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \in g(\mathbb{N}) \\ 0 & \text{if } n \notin g(\mathbb{N}) \end{cases}$$

is almost periodic in the sense of Besicovitch (example of such g's are $(an + b)$, $([\alpha n])$, quadratfrei numbers,...). Let id be the identity function $id(n) = n$. Then for any sequence $u = (u_n)$

$$\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} B(u - \alpha.id) = \bigcap_{g \in \mathcal{C}} B(u \circ g)$$

where $B(v) = \{x: xv \text{ equidistributed (mod 1)}\}$.

H.L.MONTGOMERY, Zeros of partial sums of the zeta function.

I shall demonstrate the falsity of Turán's conjectures concerning zeros of partial sums of the zeta function (conjectures which imply the Riemann Hypothesis). More precisely, I shall show that there is a constant $c > 0$ such that $U_N(s) = \sum_{n \leq N} n^{-s}$ has infinitely many zeros in the half-plane $\operatorname{Re} s \geq 1 + c/\log T$; here $T = 2 + |\operatorname{Im} s|$. This approaches the result of Turán which asserts that $U_N(s)$ has no zeros in the half-plane $\operatorname{Re} s \geq 1 + 2(\log\log T)/\log T$. My approach is very simple, and provides disproofs of all the related conjectures of Turán, and of Wiener and Wintner.

W.NARKIEWICZ, Polynomial-like arithmetical functions.

An arithmetical additive or multiplicative function $f(n)$ is called polynomial-like, if there exists a polynomial $P(x)$ such that for prime p one has $f(p) = P(p)$. A survey of results concerning such functions will be given, covering in particular the following topics: weak uniform distribution (mod n), exact divisibility by given prime powers, divisibility by given natural numbers, estimation of number of numbers $n \leq x$ with $(n,f(n)) = 1$. Those results are due to E.J.Scourfield, J.Sliwa and the author.

B.NOVÁK, On lattice points in multidimensional ellipsoids.

Let Q be a positive definite quadratic (rational) form in r variables, α_j and b_j be real numbers. We denote by $P_\rho(x)$ the lattice remainder term in the problem lattice points with weights α_j in the ellipsoids $Q(u_j+b_j) \leq x$. By f_ρ and $\bar{f}_\rho$ we denote the "exact order" and "mean value order" of $P_\rho(x)$. We consider two cases: A) $b_j = 0$ and B) $\alpha_j = 0$. Using Jarník's O-method, one lemma due to Diviš and author's Ω-method it is possible to prove the following

Theorem. $f_\rho = r/2 - 1 - \dfrac{r/2 - 1 - \rho}{2(\gamma + 1)}$ provided $f_\rho \geq r/4 + \rho/2$,

$\bar{f}_\rho = \max\left(r/4 - 1/4 + \rho/2,\ r/2 - 1 - \dfrac{r/2 - 1 - \rho}{2(\gamma + 1)}\right)$ in the case A and $f_\rho = r/2 - 1 - \dfrac{\rho + 1}{2\gamma}$ provided $f_\rho \geq r/4 + \rho/2$,

$\bar{f}_\rho = \max\left(r/4 - 1/4 + \rho/2,\ r/2 - 1 - \dfrac{\rho + 1}{2\gamma}\right)$ in the case B.

Further, $f_\rho = r/4 - 1/4 + \rho/2$ for $\rho \geq r/2 - 1/2$. Here $\gamma = \gamma(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\mu)$ in the case A ($= \gamma(b_1,b_2,\ldots,b_r)$ in the case B) is the supremum of all β, for which the system of inequalities $|q\alpha_j - p_j| < q^{-\beta}$ has infinitely many solutions in integers q, p_j.

G.J.RIEGER, Über Gleichverteilung bei FORD-Kreisen

Für jede rationale Zahl in reduzierter Gestalt $\frac{h}{k}$ bezeichne $C(\frac{h}{k})$ die offene Kreisscheibe in der cartesischen (x,y)-Ebene um den Mittelpunkt $(\frac{h}{k},\frac{1}{2k^2})$ vom Radius $\frac{1}{2k^2}$. Es sei $V := \bigcup C(\frac{h}{k})$. Für reelle Zahlen α, λ, z mit $\lambda > 0$, $0 < z < 1$ bezeichne $S(\alpha,\lambda;z)$ die Strecke mit den Endpunkten (α,z),

$(\alpha+\lambda, z)$. Es sei $M(\alpha,\lambda;z) := V \cap S(\alpha,\lambda;z)$, $M(z) := M(0,1;z)$, $K := [1/\sqrt{z}]$. Es sei φ Eulers Funktion. $M(z)$ wie auch $M(\alpha,\lambda;z)$ ist die disjunkte Vereinigung endlich vieler Strecken; es bezeichne $m(\alpha,\lambda;z)$ die Summe der Längen der Strecken in $M(\alpha,\lambda;z)$; $m(z) := m(0,1;z)$. Man hat sofort $m(z) = 2 \sum_{1\le k\le K} \varphi(k)\left(z/k^2 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Mit der elementaren Formel $\sum_{1\le k\le t} \frac{\varphi(k)}{k} = \frac{6}{\pi^2} t + \mathcal{O}(\log t)$ ergibt Teilsummation leicht

<u>Satz 1</u>. Für $0 < z < 1$ ist $m(z) = \frac{3}{\pi} + \mathcal{O}(z \log \frac{2}{z})$.

Eine Art Gleichverteilung kommt zum Ausdruck in

<u>Satz 2</u>. Für reelle Zahlen α, λ, z mit $\lambda > 0$, $0 < z < 1$ ist $m(\alpha,\lambda;z) = \lambda\, m(z) + \mathcal{O}\left(\sqrt{z}(\log \frac{2}{z})^2\right)$ mit einer absoluten Konstanten im Restglied.

R.ROTERMUND, <u>Ein kombinatorisches Siebverfahren</u>

Durch die Verbindung des Buchstabschen kombinatorischen Siebverfahrens (1967) mit den Funktionen $f(u)$, $F(u)$ (Jurkat-Richert, 1965) und den Richert-Abschätzungen für Summen $S_K(A,q,z)$ (1969) gelingt es, folgenden Satz zu beweisen:

Für hinreichend große x gibt es Fast-Primzahlen P_2 im Intervall $x - x^b < P_2 \le x$, $b = 0{,}529$.

Dabei ist ein Zusammenhang zwischen den Funktionen $f(u)$, $F(u)$ und gewissen Reihenentwicklungen bei Kummer (1840) wichtig.

B.SAFFARI, <u>An oscillation theorem.</u>

An attempt is made to minimize $\sup_{u\to\infty} \frac{M(u)}{\sqrt{u}}$ and $-\inf_{u\to\infty} \frac{M(u)}{\sqrt{u}}$

by using a slightly modified form of Ingham's tauberian inequality (cf. Amer. J. Math., 1942), i. e. by replacing the usual kernel $\max(1 - \frac{|x|}{T}, 0)$ by another one which would provide a larger lower bound. The conclusion is that, by this method, we cannot obtain any lower bound better than something of the form $\frac{C}{|\rho_1 \zeta'(\rho_1)|}$ where C lies between 1 and 2 and is not too far from 2.

H.SARGES, Eine Anwendung des Selbergschen Siebes auf Zahlkörper

Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n über $\mathbb{Q}$, $F(x) \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom mit ganzen Koeffizienten vom Grade g, ohne festen Primidealteiler. Bezeichne $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus K, P_{g+1} ganze algebraische Zahlen aus K mit höchstens $g+1$ Primidealteilern (mit ihrer Vielfachheit gezählt). Sei $\rho(\mathfrak{p})$ die Anzahl der Lösungen von $F(x) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$. Ferner sei $I := \{\alpha \in K\colon \alpha \text{ ganz}, 0 < \alpha^{(\nu)} \leq y_\nu, \nu = 1,\ldots,r_1, |\alpha^\nu| \leq y_\nu, \nu = r_1+1,\ldots,n\}$, wobei $1 \leq y_\nu$, $\nu = 1,\ldots,n$, und $y_{r_1+\mu} = y_{r_1+r_2+\mu}$, $\mu = 1,\ldots,r_2$, ist und $y := y_1 \cdots y_n$.
Sei d die Diskriminante von K, α_K das Residuum von $\zeta_K(s)$.
Dann gilt:

$$\sum_{\substack{\alpha \in I \\ F(\alpha) = P_{g+1}}} 1 \geq \frac{2}{3} \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|\alpha_K} \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1 - \frac{\rho(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}} \frac{y}{\log y}, \quad y \geq y_0(K,F).$$

Hierbei handelt es sich um eine Ausdehnung Richertscher Resultate (Mathematika 1969) auf algebraische Zahlkörper. Der Beweis wird mit Hilfe der Selbergschen Siebmethode in Anlehnung an Schaal (Acta Atithmetica 1968) bzw. Richert (Mathematika 1969) geführt.

W.SCHAAL, Über Abschätzungen von Summen von Restklassencharakteren im reell-quadratischen Zahlkörper

Sei K ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante $d > 0$, Sei $\mathfrak{a} \subset K$ ein ganzes Ideal. Mit χ werde ein Restklassencharakter modulo $\mathfrak{a}$ bezeichnet, das heißt, für ganze Zahlen $\xi, \xi_1, \xi_2 \in K$ gilt:

i) $\chi(\xi_1 \cdot \xi_2) = \chi(\xi_1) \cdot \chi(\xi_2)$; ii) $\chi(\xi_1) = \chi(\xi_2)$ für $\xi_1 \equiv \xi_2 \mod \mathfrak{a}$;
iii) $\chi(\xi) = 0$ für $(\xi, \mathfrak{a}) \neq 1$, $\chi(\xi) \neq 0$ für $(\xi, \mathfrak{a}) = 1$.

Seien $a, a' \in \mathbb{R}$ beliebige Zahlen, $x, x' > 0$. Für die Summe

$$R(\chi) := \sum_{\substack{a < \xi \leq a+x \\ a < \xi' \leq a'+x'}} \chi(\xi)\ ,$$

ξ' die zu ξ konjugierte Zahl, gilt dann, sofern χ nicht der Hauptcharakter ist:

<u>Satz</u> (K.Ch.Lee, 1973). Zu jedem $\delta > 0$ existiert eine Konstante $C(\delta) > 0$ mit $|R(\chi)| \leq C(\delta)\{\sqrt{N\mathfrak{a}}(xx')^{\delta} + N\mathfrak{a}\}$.

Der Beweis benutzt eine Methode der analytischen Zahlentheorie von C.L.Siegel (Trans. Am. Math. Soc. 1936). Daran anschließend hat Wirsing mit einem elementarem Beweis gezeigt:

<u>Satz</u> (Wirsing). Für $xx' \geq 16 dN\mathfrak{a}$ ist

$$|R(\chi)| \leq c_1 \sqrt{d}\, N\mathfrak{a} \left(\log \frac{xx'}{4dN\mathfrak{a}}\right)^2, \quad c_1 > 0 \text{ eine absolute Konstante.}$$

Für gewisse Spezialfälle ist folgende Abschätzung von Interesse, welche eine Verbesserung der Abhängigkeit vom "Modul" liefert:

<u>Satz</u>. Sei $\varepsilon > 1$ eine Fundamentaleinheit von K, sei r die Ordnung von ε modulo $\mathfrak{a}$, also $\varepsilon^r \equiv 1 \mod \mathfrak{a}$, $1 \leq r$ minimal. Ferner sei $\chi \pmod{\mathfrak{a}}$ ein eigentlicher Charakter. Dann hat man mit positiven Konstanten c_2, c_3, c_4, die nur von K abhängen:

$$|R(\chi)| \leq c_2 r (N\mathfrak{a})^{\frac{1}{2} - c_3/\sqrt{\log 3xx'}}\, e^{c_4\sqrt{\log xx'}}, \quad xx' \geq 1.$$

Der Beweis verwendet die Theorie der Gaußschen Summen in K und die oben genannte Siegelsche Methode.

A.SCHINZEL, <u>On exponential congruences.</u>

The following two theorems are proved.

1. If the congruence $a_1^{x_1} \cdots a_k^{x_k} \equiv b \pmod p$ is soluble for almost all primes p, then the corresponding equation is soluble in rational integers.

2. If $a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_k^{x_k} = 1$ implies $x_i = 0$ then for any $m \neq 0$ there exists a module M such that $a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_k^{x_k} \equiv 1 \pmod{M}$ implies $x_i \equiv 0 \pmod{m}$.

H.SIEBERT, Siebmethoden und Siegelsche Nullstellen

P.Turán zeigte in einer Arbeit (Acta Arithmetica) eine Aussage von folgendem Typ:
Läßt sich in der Abschätzung

$$(*)\quad f_\alpha(x,k,\ell) := |\{n \leq x:\ n \equiv \ell(k),\ p\,|\,n \Rightarrow p \geq x^\alpha\}| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\varphi(k)} \frac{x}{\log x} \cdot 2(1 + A_1(\alpha) + A_2(\alpha))$$

für mindestens ein $\alpha \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ die Konstante $1 + A_1(\alpha) + A_2(\alpha)$ erniedrigen, so haben gewisse L-Reihen in gewissen Bereichen des kritischen Streifens keine Nullstellen. ($A_1(\alpha)$ und $A_2(\alpha)$ sind explizit durch Integrale gegeben.) Turán stellte 1972 in Oberwolfach die Frage, ob man mit Siebmethoden diese Verbesserung tatsächlich erreichen kann.
Die Antwort lautet nicht einfach "nein", sondern das Interessante ist, daß die schärfste bekannte Form des Selbergschen Siebes (Richert-Jurkat 1965) im wesentlichen die Abschätzung (*) liefert. Beim heutigen Stand der Kenntnisse scheinen die Siegelschen Nullstellen gerade die Grenze der Wirksamkeit von Siebmethoden zu sein.

E.SZEMERÉDI, On sets containing no arithmetic progression of length K.

Let $r_K(n) = \max\Big\{\ell:\ A = \{a_1,\dots,a_\ell\},\ a_1 < a_2 < \dots < a_\ell \leq n,$ A does not contain an arithmetic progression of length $K\Big\}$.

Theorem. $r_K(n) = o(n)$.

Let $A = \{a_j:\ a_j = (a_j^1, a_j^2),\ 0 \leq a_j^1, a_j^2 \leq n\}$ and $|A| \geq \varepsilon \cdot n^2$.
Is it true that there is an a_j and d such that
$(a_j^1 + i_1 d, a_j^2 + i_2 d) \in A$ $(0 \leq i_1, i_2 \leq K)$?

R.TIJDEMAN, A problem on power sums related to Riemann's hypothesis.

Recent investigations of Turán on the truth of the Riemann hypothesis lead to the following problem.
Let n be an integer, $n \geq 2$, and B a real number, $B \geq 2$. Determine

$$\Phi(n,B) = \min_{b_j > 0,\, |z_j| = 1} \frac{\max\limits_{\tau=1,\dots,n^B} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\tau} \right|}{\sum_{j=1}^{n} b_j}.$$

On the one hand, one has a result of Erdös-Rényi (1957),

$$(*)\quad \Phi(n,B) \leq \left(\frac{6B \log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

proved by probabilistic arguments. In this lecture we give a simple constructive proof. On the other hand, a more general result of Halász implies $\Phi(n,2) \geq \frac{1}{2e^2 n}$. By proving

$$\max_{\tau=1,\dots,2n} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\tau} \right| \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right)$$

a young mathematician, Leenman, obtained $\Phi(n,1+\varepsilon) \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ for every $\varepsilon > 0$. Comparison with (*) shows that only a small gap is left.

R.C.VAUGHAN, Mean value theorems in prime number theory.

In this talk an account is given of the proofs and consequences of the following theorems

Theorem 1. Suppose that $\xi \geq 1$ and $x \geq 2$. Then

$$\sum_{q \leq \xi} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \max_{y \leq x} |\psi(y,\chi)| \ll x\mathcal{L}^3 + x^{\frac{3}{4}} \xi^{\frac{5}{4}} \mathcal{L}^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}} \xi^2 \mathcal{L}^{\frac{7}{2}}$$

where $\sum^{*}$ denotes summation over all the primitive characters modulo q, $\psi(y,\chi) = \sum_{n \leq y} \Lambda(n)\chi(n)$, Λ is von Mangoldt's function and $\mathcal{L} = \log x\xi$.

Theorem 2. Suppose that $q \geq 1$ and $x \geq 2$. Then

$$\sum_{\chi \bmod q} \max_{y \leq x} |\psi(y,\chi)| \ll x\,\ell^3 + x^{\frac{3}{4}} q^{\frac{5}{8}} \ell^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}} q\, \ell^{\frac{1}{2}}$$

where $\ell = \log xq$.

B.VOLKMANN, Zur Ziffernverteilung bei zahlentheoretischen Algorithmen

Es wird eine Definition für zahlentheoretische Algorithmen gegeben, die so allgemein ist, daß sie die bekannten Fälle wie Ziffernentwicklungen, Kettenbrüche, Cantor-Reihen, Jacobischer Algorithmus und "zahlentheoretische Transformationen" von Schweiger umfaßt, ohne Glattheitsvoraussetzungen für die auftretenden Shift-Transformationen zu machen. Dennoch gelten vier Sätze qualitativer Art (Kategorien-Aussagen über die zugehörigen Mengen von Punkten im $\mathbb{R}_k$ bzw. von Verteilungsmaßen auf dem Einheitswürfel in $\mathbb{R}_k$), in denen bereits bekannte Spezialfälle über 1) asymptotische Ziffernverteilungen, 2) oszillierende Ziffernhäufigkeiten, 3) schwache Konvergenz von Verteilungsmaßen und 4) Folgen von Ziffernalgorithmen auf Algorithmen der hier eingeführten Art verallgemeinert werden.

R.WARLIMONT, Über asymptotische Entwicklungen für Summen der Gestalt $\sum_{n \leq x} f(\omega(n))$, $\sum_{n \leq x} f(\Omega(n))$

Es sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion, es bezeichne $\omega(n)$ bzw. $\Omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen bzw. aller Primteiler von n. Es sei $g(n) = \omega(n)$ oder $\Omega(n)$. Es werden Voraussetzungen für f mitgeteilt, unter denen sich eine Asymptotik für $S(x) := \sum_{n \leq x} f(g(n))$ angeben läßt.

(1) Es mögen a, b und ein R(n) mit $R(n) = o(\sqrt{n})$ existieren derart, daß $f(n) = a \log_r n + b + (R(n) - R(n-1)) + o(1)$. Dann ist $S(x) = x(a \log_{r+2} x + b + o(1))$.

($\log_r n$ bezeichnet den r-fach iterierten Logarithmus von n.)

(2) Es mögen a und ein $R(n)$ existieren, $R(n) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$, derart, daß $f(n) = a \log_r n + (R(n) - R(n-1)) + \mathcal{O}(1)$.
Dann ist $S(x) = x(a \log_{r+2} n + \mathcal{O}(1))$.

(3) Es möge ein a und ein α, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, existieren derart, daß $\sum_{u \leq n \leq u+v} f(n) = a \log_r v(1 + o(1))$ gleichmäßig in $u^\alpha \leq v \leq u$.

Dann ist $S(x) \sim a\, x \log_{r+2} x$.

Beispiele für (1): $d(n)$, $\mu^2(n)$, Beispiele für (2) oder (3): $\omega(n)$, $\Omega(n)$.

Ferner wird kurz auf die Summen

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)=k}} \omega(n) \quad , \qquad \sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n)=k}} \Omega(n)$$

und deren Auswertung nach der Selbergschen Methode eingegangen.

J.Duttlinger und K.-H.Indlekofer (Frankfurt/Main)