MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 5/1974

Intuitionistische Metamathematik

27.1. bis 2.2.1974

Die Tagung stand unter der Leitung von Prof.Dr.G.H.Müller (Heidelberg) und Prof.Dr.A.S.Troelstra (Oxford/Amsterdam).

The aim of this meeting was to provide an introduction to the various methods for investigating intuitionistic formal systems; as basis served "Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis", Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol.344 (1973).

There were two principal series of lectures

A) Realizability and functional interpretations, and models for intuitionistic arithmetic in all finite types (D.H.J.de Jongh, A.S.Troelstra)

B) Applications of Kripke semantics to intuitionistic arithmetic (C.A.Smorynski).

In addition there were various short talks by participants on subjects related to the main theme of the meeting.

A.S.Troelstra

Teilnehmer

H.Barendregt, Utrecht
S.Bernini, Frankfurt
G.Bitsch, Tübingen
J.E.Bridge, Oxford
W.Buchholz, München
H.G.Carstens, Hannover
D.van Dalen, Utrecht
J.Diller, Münster
M.Dummett, Oxford
W.Felscher, Tübingen
P.G.Hancock, Oxford
D.R.Isaacson, Oxford
D.H.J.de Jongh, Amsterdam
G.Leversha, Manchester
E.G.K.Lopez-Escobar, Nijmegen
H.Luckhardt, Frankfurt
W.Maasz, München
P.Martin-Löf, Stockholm
G.H.Müller, Heidelberg
H.Osswald, München
H.Pfeiffer, Hannover
D.Prawitz, Oslo
P.Rath, Münster
B.Scarpellini, Basel
D.Schmidt, Wehrheim
R.Schoenberger, Basel
H.Schwichtenberg, Münster
C.A.Smorynski, Amsterdam
M.Stein, Münster
A.S.Troelstra, Oxford
H.Vogel, Münster
E.Wiedmer, Zürich

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

A.S.TROELSTRA: Realizability and functional interpretations, and models for intuitionistic arithmetic in all finite types.

The principal topics discussed were:

a) general introduction of the principal formal systems: intuitionistic arithmetic, elementary analysis, intuitionistic second order arithmetic.

b) discussion of significance of certain schemata and rules which crop up frequently in the discussion: disjunction and explicit definability property, Church's thesis and rule, Markov's schema and rule, Independence-of-premiss schemata.

c) Kleene's $\Gamma | C$ -relation and its variants; realizability by numbers, applications for derived rules and conservative extension results.

d) Models for intuitionistic arithmetic in all finite types: hereditarily recursive operations, hereditarily effective operations, term models, intensional and extensional continuous functionals; provable moduli of continuity, derived rules of continuity.

e) Modified realizability, its axiomatization and applications to derived rules and conservative extension properties.

f) The Dialectica interpretation and its applications. Principal stress on points which receive little attention elsewhere in the literature. Markov's rule.

g) Brief discussion of extensions of the various methods to systems of analysis.

C.SMORYNSKI: Applications of Kripke Models.

The study of Heyting's arithmetic by means of a set-theoretic model theory was surveyed. Also discussed were some extensions of the results to the theory of species, which do not appear in the book (Springer 344, mentioned above).

E.G.K.LÓPEZ-ESCOBAR: An extremely restricted ω-rule.

Let $\underset{\sim}{HA}(\omega)$ be the Gentzen type system for elementary intuitionistic number theory whose axioms are the true sequents of atomic sentences, the rule of induction has been deleted and for which the rules $(\Rightarrow\forall)$, $(\exists\Rightarrow)$ are replaced by the following.

From: $\Gamma \Rightarrow A\bar{0},\ \Gamma \Rightarrow A\bar{1},\ldots$

To conclude: $\Gamma \Rightarrow \forall x\, Ax$

Provided: $\Gamma \Rightarrow \forall x Ax$ is provable in $\underset{\sim}{HA}$ [first-order intuitionistic arithmetic]

and correspondingly for $(\exists\Rightarrow)$.

$\underset{\sim}{HA}^{-}(\omega)$ is obtained by eliminating the cut-rule from $\underset{\sim}{HA}(\omega)$. The following results have very simple proofs:

(I) $\underset{\sim}{HA} \vdash A$ iff $\underset{\sim}{HA}(\omega) \vdash A$

(II) $\underset{\sim}{HA}(\omega) \vdash A$ iff $\underset{\sim}{HA}^{-}(\omega) \vdash A$

Hence

(*) $\underset{\sim}{HA} \vdash A$ iff $\underset{\sim}{HA}^{-}(\omega) \vdash A$

The latter then gives the standard results like ED, IPR etc. Formalizing (*) one can get the proof of Kreisel's result that

$\underset{\sim}{HA} + \varepsilon_0$-induction $\equiv \underset{\sim}{HA}$ + uniform reflection principle.

H.LUCKHARDT: Ein kurzer Beweis für ein Theorem der intuitionistischen Analysis.

Es handelt sich um Brouwer's fundamentale Feststellung, dass jeder abgeschlossene Intervall mit einem fan koinzidiert. Der gegebene Beweis unterscheidet sich von den bisherigen dadurch, dass er den fan konstruiert, der aus genau allen im Intervall liegenden kanonischen Zahlgeneratoren besteht.

H.SCHWICHTENBERG: Das Reflexionsprinzip für die Zahlentheorie in allen endlichen Typen.

Betracht werden endliche Erweiterungen $Z^{\omega}+\Gamma$ der klassischen Zahlentheorie Z^{ω} in allen endlichen Typen mit voller Extensionalität ($E-(HA^{\omega})^{c}$ in Troelstra's Terminologie). Solche Theorien sind relativ stark; z.B. ist die klassische Analysis in einer endlichen Erweiterung von Z^{ω} enthalten. Gezeigt wird (in Erweiterung eines entsprechenden Resultats von Kreisel für die elementare Analysis), dass das Reflexionsprinzip für $Z^{\omega}+\Gamma$ in $Z^{\omega}+\Gamma+\varepsilon_0$ (d.h. $+\varepsilon_0$-Rekursion + Schema der ε_0-Induktion) beweisbar ist. Durch Hinzunahme "von ε_0" im angegebenen Sinn erhält man also auch bei so starken Systemen wie $Z^{\omega}+\Gamma$ noch eine echte Erweiterung. (Man beachte, dass im Gegensatz dazu das Axiom der transfiniten Induktion für wesentlich grössere Ordinalzahlen in $Z^{\omega}+\Gamma$ beweisbar ist).

E.WIEDMER: Flussdiagramm-Programme für das Rechnen mit unendlichen Folgen.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kann man durch kanonische Cauchyfolgen, bzw. durch Elemente aus

$$C = \{f:\mathbb{N}\to \mathbb{Z} \mid |f(n+1)\cdot 2^{-n-1} - f(n)\cdot 2^{n}| < 2^{-n-1}\}$$

repräsentieren.

Man betrachtet nun durch Programme (Anweisungen der Art $x_1 := f_k(x_j)$, $x_1 := x_j + x_k$, etc. kommen darin vor) berechenbare Funktionen $F: C \to C$, welche mit der Gleichheit $=_{\mathbb{R}}$ verträglich sind. Jede solche Funktion ist stetig. Es ist sogar sehr einfach aus dem Programm p für F, ein Programm p' zu konstruieren, welches für alle $f \in C$, $i \in \mathbb{N}$ ein $K \in \mathbb{N}$ berechnet mit

$$\text{für alle } \varphi \in C \; (|\varphi - f| \underset{\mathbb{R}}{<} \frac{1}{2^k} \to |F(\varphi)-F(f)| \underset{\mathbb{R}}{<} \frac{1}{2^i}).$$

D.van Dalen (Utrecht)