MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 6/1974

Spezielle Funktionen

3.2.1974 bis 9.2.1974

Die unter der Leitung der Herren C.Meyer (Köln) und F.W.Schäfke (Konstanz) - nun schon zum sechsten Male - durchgeführte Fachtagung über "Spezielle Funktionen der mathematischen Physik und der Zahlentheorie" fand auch in diesem Jahr wieder ein erfreuliches Interesse. Sie wurde von 36 Mathematikern - davon 8 aus dem Auslande - besucht, und es wurden 22 teils ausführliche Vorträge - 12 aus dem Bereich der mathematischen Physik und 10 aus dem der Zahlentheorie - gehalten.

Aus dem Gebiet der speziellen Funktionen der mathematischen Physik wurden folgende Einzelthemen behandelt: Simultane Separierbarkeit verallgemeinerter Schwingungsgleichungen, Multiplikationstheoreme hypergeometrischer Funktionen, Irreduzibilität der Eigenwertprobleme bei der Mathieuschen- und der Sphäroid-Differentialgleichung, gleichmäßige asymptotische Entwicklungen für Mathieufunktionen sowie für Ellipsoidfunktionen, Restgliedentwicklung spezieller asymptotischer Darstellungen. Daneben gab es eine Reihe von Beiträgen zu den Grundlagen der Theorie dieser Funktionen sowie zu deren Anwendungen aus den Bereichen Gewöhnliche Differentialgleichungen, Integraltransformationen sowie Approximationstheorie.

Aus dem Gebiet der Zahlentheorie wurden folgende Themen behandelt: Eisenstein-Reihen, Modulfunktionen, komplexe Multiplikation, L-Reihen in reell-quadratischen Zahlkörpern (Kroneckersche Grenzformel), Poissonsche Summenformel, Minimaldiskriminanten, Teichmüller-Räume.

Teilnehmer:

Blankenagel, J.	Köln
Braaksma, B.L.J.	Groningen
Bundschuh, P.	Köln
Carlsson, R.	Hamburg
Dieter, U.	Graz
Draxl, P.	Bielefeld
Endl, K.	Gießen
Flor, P.	Köln
Halbritter, U.	Köln
Hargrave, B.A.	Aberdeen
Helling, H.	Bielefeld
Kann, C.-H.	Köln
Kurz, M.	Konstanz
Lang, H.	Köln
Lemeij, H.	Delft
Meixner, J.	Aachen
Mennicken, R.	Braunschweig
Meyer, C.	Köln, z.Zt. College Park
Neckermann, L.	Würzburg
Niemeyer, H.	Hamburg
Nießen, H.-D.	Essen
Pfaff, Th.	Köln
Pohst, M.	Köln
Sattler, A.	Köln
Schäfke, F.W.	Konstanz
Schertz, R.	Köln
Schmidt, D.	Konstanz
Schneider, A.	Wuppertal
Schoeneberg, B.	Hamburg
Sips, R.	Brüssel
de Snoo, H.S.V.	Groningen
Stender, H.-J.	Köln
Sunley, J.	Washington
Wagenführer, E.	Regensburg
van de Wetering, R.L.	z.Zt. Groningen
Wolf, G.	Konstanz

Vortragsauszüge

J.MEIXNER : Simultane Separierbarkeit von verallgemeinerten Schwingungsgleichungen

Es wird die Frage gestellt, für welche Funktionen $\Phi(x,y,z)$ die verallgemeinerte dreidimensionale Schwingungsgleichung

$$\Delta u + \Phi(x,y,z)u = 0$$

in wenigstens zwei der rotationssymmetrischen Koordinatensysteme, in welchen

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

separierbar ist, simultan separierbar ist. Frühere Ergebnisse (A.Leitner und J.Meixner, Arch.d.Math.10, (1959), 387 sowie W.W.Turner, Dissertation Michigan State University, 1963) werden ergänzt und erweitert. Die Bedeutung der simultanen Separierbarkeit liegt darin, daß sie einen nützlichen heuristischen Zugang zu Reihenentwicklungen von speziellen Funktionen nach speziellen Funktionen und zu Integralbeziehungen zwischen solchen liefert. Diese Möglichkeiten sind noch nicht voll ausgeschöpft. Weitere Möglichkeiten wird die Untersuchung der simultanen Separierbarkeit mehrdimensionaler verallgemeinerter Schwingungsgleichungen liefern.

A.SATTLER : Hypergeometrische Multiplikationstheoreme - leicht gemacht

Zwei sehr allgemeine Entwicklungen von verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen in Reihen nach anderen verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen werden betrachtet (siehe: Y.L.Luke, The Special Functions and Their Approximations, Vol.II; New York, 1969; p. 6, Theorem 2; p. 10, Theorem 4). Es wird gezeigt, daß die bis jetzt bekannten Voraussetzungen über die Gültigkeit dieser Entwicklungen weitgehend abgeschwächt werden können. Diese Tatsachen ergeben sich aus Sätzen über die Entwickelbarkeit holomorpher

Funktionen in Reihen nach hypergeometrischen Funktionen, die von folgendem Typ sind:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \; {}_pF_q \; (a_p + n;\; b_q + n; z)$$

bzw.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \; {}_pF_{q+1} \; (a_p + n;\; \lambda + 2n,\; b_q + n;\; z) \; .$$

Dabei sind die Koeffizienten c_n bzw. d_n durch Integraldarstellungen gegeben. Genaueres über diese Sätze wurde mitgeteilt auf der Tagung "Spezielle Funktionen", Oberwolfach, 17.-21.2.1969.

F.W.SCHÄFKE : Über die Eigenwerte der Mathieuschen und Sphäroid-Differentialgleichung - zum Problem der Irreduzibilität für mehrparametrige Eigenwertaufgaben

Es wird gezeigt, daß die Eigenwert-Entwicklungen $a_{2n}(h^2)$ um $h^2 = 0$ Funktionselemente einer analytischen Funktion im Großen sind. Der überraschend einfache Beweis benutzt, daß von den Koeffizienten von h^8 gerade einer negativ ist. Entsprechendes gilt für andere wichtige Klassen von Eigenwerten der genannten Dgln : $b_{2n+2}(h^2)$, $a_{2n+1}(h^2)$, $b_{2n+1}(h^2)$, $\lambda_{\nu+2n}(h^2)$ (ν reell, nicht ganz), $\lambda_\nu^\mu(\gamma^2)$ ($\nu = \mu$, $\mu + 2$, $\mu + 4, \dots$ bzw. $\nu = \mu + 1$, $\mu + 3, \dots$) ($\mu \geqq 0$, nicht halbzahlig, nicht zu groß) und für die algebraischen Approximationen der a_{2n} und Verallgemeinerungen.

R.SIPS : Une représentation asymptotique uniforme pour les fonctions de Mathieu

Les fonctions de Mathieu sont les solutions périodiques de l'équation suivante

$$y'' + \left(a - \frac{k^2}{2} \cos(2\eta) \right) y = 0 \; ,$$

où a et k sont des constantes, qui se réduisent à $\sin(n\eta)$ ou $\cos(n\eta)$ lorsque $k \to 0$ et qui satisfont à la condition de normalisation

$$\int_0^{\pi/2} ce_n^2(\eta)d\eta = \int_0^{\pi/2} se_n^2(\eta)d\eta = \frac{\pi}{4} \quad .$$

Il est possible de former des représentations asymptotiques de ces fonctions, lorsque k est réel et très grand, qui sont valides pour toutes les valeurs réelles de η, et qui ont les formes suivantes

$$ce_{2n} \sim \sum_{m=0}^{N} c_{2m}\,(D_{2m}(\beta) + D_{2m}(\tilde{\beta})) \quad ,$$

$$se_{2n+1} \sim \sum_{m=0}^{N} c_{2m}\,(D_{2m}(\beta) - D_{2m}(\tilde{\beta})) \quad ,$$

$$ce_{2n+1} \sim \sum_{m=0}^{N} c_{2m+1}\left(\cos(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\eta}{2})D_{2m+1}(\beta) + \cos(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\eta}{2})D_{2m+1}(\tilde{\beta})\right) \quad ,$$

$$se_{2n+2} \sim \sum_{m=0}^{N} c_{2m+1}\left(\cos(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\eta}{2})D_{2m+1}(\beta) - \cos(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\eta}{2})D_{2m+1}(\tilde{\beta})\right) \quad ,$$

où les c_m sont des constantes, les $D_m(\beta)$ sont les fonctions paraboliques

$$D_m(\beta) = \exp\left(-\frac{\beta^2}{4}\right) He_m(\beta)$$

(He_m = polynôme d'Hermite de degré m) et où

$$\beta = 2\sqrt{2k}\,\sin(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\eta}{2}) \quad , \quad \tilde{\beta} = 2\sqrt{2k}\,\sin(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\eta}{2}) \quad .$$

Une formule très simple donne une limite supérieure pour l'erreur commise. Comme on n'utilise que des sommes finies, aucun problème de convergence ne se pose.

La comparaison numérique entre les valeurs exactes et approximatives, pour $k = 12$, des dix premières fonctions $ce_o, \ldots, ce_4, se_1, \ldots, se_5$ montre que l'erreur absolue est de l'ordre de 10^{-6} pour ce_o et se_1, et de l'ordre de 10^{-3} pour ce_4 et se_5.

B.A.HARGRAVE : Uniform asymptotic expansions for ellipsoidal wave functions

The ellipsoidal wave equation

$$w'' - (a + bk^2 sn^2(z,k) + qk^4 sn^4(z,k))w(z) = 0$$

where $sn(z,k)$ is a Jacobian elliptic function with modulus k, admits doubly periodic solutions, whenever a and b assume eigenvalues, depending on q. These solutions are known as ellipsoidal wave functions.

Non-uniform asymptotic expansions are known, and here a method, using the theory of second order turning points of differential equations, is developed for uniform asymptotic expansions of ellipsoidal wave functions, when $|q|$ is large.

These latter results may then be used to determine the leading term of the asymptotic series of the second solution of the ellipsoidal wave equation from integral formulae.

HERM.SCHMIDT und L.NECKERMANN (Vortragender): Zur Neuhausschen Entwicklung des Restglieds der asymptotischen Darstellung des Exponentialintegrals $E_1(z)$

Für die Entwicklungskoeffizienten in der hier im Vorjahr von Neuhaus hergeleiteten Restgliedentwicklung:

$$e^{-z} E_1(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t} dt = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{(-1)^\nu \nu!}{z^{\nu+1}} + R_N(z) ,$$

$$\frac{(-1)^N \; z^{N+1}}{N!} R_N(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} A_\mu(N,z) + r_{N,m}(z) \;,\quad |r_{N,m}(z)| < 2K \; A_m(N,x)$$

(m, gerade; K, geeignete Konstante, $\frac{|z|}{x} = O(1)$, $x = \text{Re } z$)

besteht folgender, für exakte Abschätzungen wichtiger Zusammenhang zu Laguerreschen Polynomen (bzw. Poisson-Charlierschen Polynomen $p_n(x) = \sqrt{\frac{n!}{a^n}} \; L_n^{(x-n)}(a)$)

$$2^{\mu+1} \; A_\mu(N,z) = \frac{\mu!}{z^\mu} \; L_\mu^{(-N-1-\mu)}(-z) \;.$$

Für $N+1-z =: \xi$ ($|\xi| < \Delta$) ist $L_\mu^{(-N-1-\mu)}(-z)$, wie mit Hilfe der erzeugenden Funktion der Laguerreschen Polynome folgt, ein Polynom in z vom Grad $\leq \lambda = [\frac{\mu}{2}]$, $z^{-\lambda} A_\mu(N,z)$ also bei festem μ beschränkt. Für $z \to \infty$, $N \to \infty$ bei $|\xi| < \Delta$ gilt dann die verallgemeinerte asymptotische Potenzreihenentwicklung mit beschränkten Koeffizientenfunktionen:

$$\frac{(-1)^N \; z^{N+1}}{N!} R_N(z) \sim \frac{1}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} z^{-\lambda} \left\{ \frac{A_{2\lambda}(N,z)}{z^\lambda} + \frac{A_{2\lambda+1}(N,z)}{z^{\lambda+1}} \right\}$$

im Sinn von Herm. Schmidt (Math.Ann. 113, (1937)).

E.WAGENFÜHRER (Vortragender) und R.MENNICKEN :

Über die Konvergenz unendlicher Determinanten

Eine Methode zur Bestimmung des charakteristischen Exponenten der endlichen Hillschen Differentialgleichung

$$y''(x) + \left(\lambda + 2 \sum_{n=1}^{k} t_n \cos 2nx \right) y(x) = 0$$

ist die Berechnung der Determinante einer unendlichen Matrix

$A = (\alpha_{ij})_o^\infty$ mit den Eigenschaften

$$\alpha_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad |i-j| > k, \sum_{i=o}^{\infty} |\alpha_{ii}-1| < \infty, \quad \sum_{i,j=o}^{\infty} |\alpha_{ij}-\delta_{ij}|^2 < \infty .$$

Für solche Matrizen wird eine asymptotische Formel für det A_N - det A_{N-1} aufgestellt und daraus ein Prinzip der Konvergenzverbesserung abgeleitet, das die numerische Berechnung der unendlichen Determinante einschließlich einer Fehlerabschätzung ermöglicht.

Eine ähnliche Darstellung von det A_N - det A_{N-1} wird benutzt, um die Existenz der unendlichen Determinante auch bei schwächeren Eigenschaften von A zu zeigen.

B.L.J.BRAAKSMA und H.S.V.de SNOO :

Generalized translations associated with a singular differential operator I,II

We consider the following Cauchy problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (2p+1)\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - (q(x)-q(y))u = 0$$

with $u(x,0) = f(x)$, $u_y(x,0) = 0$, $x > 0, y > 0$. We denote the unique solution $0 \leqq y \leqq x$ by $(T^y f)(x)$; by symmetry $(T^y f)(x) = (T^x f)(y)$ for $0 \leqq x \leqq y$. $T^y f$ is called translation of f over y . The case $q \equiv 0$ has been treated by Delsarte, whereas the case $p = -\frac{1}{2}$ has been treated by Levitan. If $p \geqq 0$ and $tq(t) \in L(0,\infty)$ translation is bounded in sup-norm, whereas if $-\frac{1}{2} \leqq p \leqq 0$, $t^{2p+1}q(t) \in L(0,1)$, $tq(t) \in L(1,\infty)$, the translation is bounded on suitably chosen spaces. There exists a representation

$$(T^y f)(x) = \int_{|x-y|}^{x+y} K(x,y,z)f(z)z^{2p+1}dz ,$$

where K is symmetric in x,y and z.
Under suitable conditions for q, K and T^y are positive. This implies boundedness of translation on suitably chosen L^n spaces. This may be used to derive properties of the convolution $(u * v)(y) = \int u(x)(T^y v)(x)x^{2p+1}dx$. The generalized Fourier transform associated with the differential equation $y'' + \frac{2p+1}{x} y' - qy = \lambda^2 y$ on $L^1(0,\infty)$ maps the convolution into a product. Furthermore Paley-Wiener theorems may be derived for this differential equation. This generalizes work by Koornwinder and Flensted-Jensen.

H.-D.NIESSEN : <u>Linksdefinite singuläre kanonische Eigenwertprobleme I</u>

Es werden singuläre linksdefinite kanonische Differentialgleichungssysteme und die zugehörigen Randwertprobleme betrachtet. Für diese Probleme wird eine Spektraltheorie hergeleitet, die insbesondere einen Norm-Entwicklungssatz und einen punktweisen Entwicklungssatz ergibt.

A.SCHNEIDER : <u>Linksdefinite singuläre kanonische Eigenwertprobleme II.</u>

Es wird eine Erweiterung des direkten Entwicklungssatzes für die "ersten" Komponenten aller Funktionen angegeben, für die der Normentwicklungssatz gilt. Anschließend werden die zum Rand-Eigenwertproblem gehörenden Integraltransformationen behandelt und die Umkehrformeln angegeben. Die Ergebnisse von Weyl und Shotwell lassen sich in die Betrachtungen einbeziehen.

K.ENDL : <u>Über die Konstruktion von dicht-vollständigen Systemen in allgemeinen normierten Räumen .</u>

Es werden zwei Methoden zur Konstruktion von dicht-vollständigen Systemen in normierten Räumen gegeben, eine funktionentheoretische und eine funktionalanalytische.Ausgangspunkt der Arbeit ist ein Aufsatz von Müntz über Bernoulli-Polynome. Verallgemeinerungen von Szasz u.a. sind als Spezielfall der allgemeinen Theorie enthalten.

J.SUNLEY: <u>Non-Analytic Eisenstein Series of the Siegel Modular Group</u>

The function $E(Z,s) = |Y|^s \sum_{\{C,D\}} \|CZ + D\|^{-2s}$ is being investigated with the intent of developing some generalisations of the Kronecker limit formula. This is done by considering the Fourier coefficients in the expansion of this function. These coefficients are given by integrals which in the case $n=1$ are seen to yield the Bessel functions of the classical case. In cases for $n>1$, some generalisation of the Bessel function is clearly indicated. For positive definite or negative definite matrices, these can be evaluated at $s=\frac{n+1}{2}$, the largest real pole of the function. For each value of n, Fourier coefficients in lower dimensions are also involved. It is clear a generalisation of the limit formula can be obtained, but until these integrals can be evaluated more precisely it is unclear what form it will take.

B.SCHOENEBERG: <u>Invarianzgruppen Dedekindscher Funktionen</u>

Für die mehrfach untersuchten Dedekindschen Funktionen $\eta_g(\tau)$ der Stufe N gilt bekanntlich:

$$\eta_g(A\tau) = e^{\pi_g(A)}\eta_g(\tau), \quad \text{wenn } A \in \Gamma[N];$$

dabei sind die $\pi_g(A)$ bis auf elementare Summanden Dedekindsche Summen. In einer Hamburger Dissertation (R.Eckard) wurde gezeigt, daß der Kern des Homomorphismus

$$\begin{aligned} \Gamma[N] &\longrightarrow \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1 \} \\ A &\longrightarrow e^{\frac{p}{q}\pi_g(A)}, \qquad p,q \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

in $\Gamma[N]$ Normalteiler von endlichem Index und keine Kongruenzgruppe ist, wenn

$$q \geqq 3 \ \text{ bei } N=2, \quad q \geqq 2 \ \text{ bei } N>2 \text{ und } (g,N)=1.$$

In den übrigen Fällen ist er Kongruenzgruppe.

P.BUNDSCHUH: <u>Ein funktionentheoretisches Analogon zum Satz von Lindemann</u>

Beim Beweis des Lindemannschen Satzes über die algebraische Unabhängigkeit von Werten der Exponentialfunktion spielt folgender analytischer Sachverhalt eine wesentliche Rolle: Sind $a_1,\ldots a_m \in \mathbb{C}$, $a_i \neq a_j$, so sind $\exp(a_1 z),\ldots,\exp(a_m z)$ über $\mathbb{C}[z]$ linear unabhängig. Mit derselben (einfachen) Methode läßt sich zeigen die folgende Verallgemeinerung: Sind $f_1(z),\ldots,f_m(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f_i - f_j$ nicht konstant, so sind $\exp(f_1(z)),\ldots,\exp(f_m(z))$ über $\mathbb{C}[z]$ linear unabhängig. Narasimhan hat 1971 einen Beweis dieses Satzes gegeben unter der schwächeren Voraussetzung, daß die $f_i(z)$ ganze Funktionen sind. Der Narasimhansche Satz wird dahingehend ergänzt, daß gezeigt wird: Sind $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ ganz, $f_i(z)-f_j(z) \notin \mathbb{C}[z]$ für $i \neq j$, so sind $\exp(f_1(z)),\ldots,\exp(f_m(z))$ linear unabhängig über dem Ring der ganzen Funktionen endlicher Wachstumsordnung.

M.POHST: Die Minimaldiskriminante total reeller Körper 7.Grades

Der Beweis des folgenden Satzes wird geschildert:
Satz: Die Minimaldiskriminante total reeller algebraischer Zahlkörper siebten Grades beträgt $d_o = 20\,134\,393$. Als - bis auf Isomorphie - einzigen Körper mit dieser Diskriminante erhält man $K_o = \mathbb{Q}(w)$ mit einer Wurzel w der Gleichung

$$x^7 + x^6 - 6x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0.$$

H.HELLING: Über Teichmüller-Räume

Für Teichmüller-Räume werden reelle affine, über $\mathbb{Z}$ definierte algebraische Modelle vorgeführt. Die Teichmüllersche Modulgruppe operiert auf diesen als Gruppe biregulärer, über $\mathbb{Z}$ birationaler Transformationen. Grundlage dafür ist die Funktionalgleichung $s(\alpha\beta) + s(\alpha^{-1}\beta) = s(\alpha)s(\beta)$ für die Spur von 2×2-Matrizen der Determinante 1.- Es stellt sich heraus, daß man auch für Charaktere höheren Grades eine kennzeichnende Funktionalgleichung herstellen kann.- Einzelheiten siehe Inventiones Mathematicae 1972 und Communications in Algebra 1974.

H.LANG: Über einfache periodische Kettenbrüche und das Legendresche Symbol

Sei $\alpha>1$ eine reell-quadratische Irrationalität und

$$\alpha = [b_1,\dots,b_j,\overline{a_1,\dots,a_l}]$$

ihre Entwicklung in einen einfachen periodischen Kettenbruch, bei dem die Länge j der Vorperiode und die Periodenlänge l minimal gewählt seien. Dann werde α die Summe

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^{l} (-1)^i a_i$$

zugeordnet. Über die arithmetische Struktur dieser Summen sind von P. und S.Chowla mehrere Vermutungen geäußert worden, von denen die folgende bewiesen wurde:

Satz: Es seien p und q Primzahlen mit $p\equiv 3 \bmod 4$ und $q\equiv 5 \bmod 8$. Dann gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{S_{\sqrt{pq}}} .$$

H.NIEMEYER: Über die Kroneckersche Grenzformel für reell-quadratische Zahlkörper I

G.Herglotz hat eine Methode entwickelt, nach der man die Kroneckersche Grenzformel für die Zetafunktion einer absoluten Klasse so umformen kann, daß die Dedekindsche Funktion $\eta(\tau)$ durch elementare Funktionen ersetzt wird. Diese Methode wird dargelegt, und es wird gezeigt, daß sie auch auf Zetafunktionen der Strahlklassen anwendbar ist. Man gelangt so zu einer neuartigen Entwicklung der Kroneckerschen Grenzformel auch für diese Zetafunktionen.

C.MEYER: Über die Kroneckersche Grenzformel für reell-quadratische Zahlkörper II

In der Kroneckerschen Grenzformel für die (absolute) Klassen-Zetafunktion eines reell-quadratischen Zahlkörpers Ω tritt als wesentliches klassenabhängiges Glied ein Integral des Typs

$$\exp\left\{-\frac{1}{\log \varepsilon}\int_1^{\varepsilon} \log \mathfrak{D}(\mathfrak{r}(x))\, d\log x\right\}$$

auf.

Dabei bezeichnet $\varepsilon>1$ die Grundeinheit von Ω , und $\mathbb{D}(\mathfrak{r}(x))$ ist die einem Divisor $\mathfrak{r}$ von Ω invariant zugeordnete Modulnormfunktion, gebildet für das $\mathfrak{r}$ entsprechende komplexe Gitter $\mathfrak{r}(x)$. $\mathbb{D}$ ist im wesentlichen die homogenisierte komplexe Norm der Dedekindschen η-Funktion.

Es läßt sich nun ein Zusammenhang mit dem sog. geometrischen Mittel $G(f) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(t)\,dt\right\}$ einer modulo 2π periodischen Funktion $f>0$ herstellen. Hierfür gilt ein Entwicklungssatz nach sog. Kernpolynomen bzgl. f, die wesentlich mittels einer Toeplitzschen Matrix aus den Fourierkoeffizienten von f gebildet werden.

U.HALBRITTER: <u>Über die Poissonsche Summenformel und ihre Anwendung auf gewisse Gitterpunktprobleme</u>

Mittels der Poissonschen Summenformel für Funktionen mehrerer Veränderlicher in einer Fassung, die im wesentlichen von Bochner stammt, läßt sich der folgende Satz beweisen:

<u>Satz:</u> Sei $R = (a_{kl}) \in M_n(\mathbb{Z})$ eine reguläre und symmetrische Matrix. Sei $K \in \mathbb{N}$. Dann ist die Anzahl der Restsysteme mod K in

$$G(R) = \det R \cdot R^{-1}\left([0,K)^n\right)$$

gleich $|\det R|^{n-1}$.

Im Beweis wird die Poissonsche Summenformel angewandt auf

$$g(\underline{x}) = \sum_{m_1=0}^{K\cdot|\det R|-1} \cdots \sum_{m_n=0}^{K\cdot|\det R|-1} h_n(-\underline{m} + R(K\underline{x}+\underline{\gamma})) \quad \text{mit}$$

$$\gamma \in [0,K\cdot|\det R|)^n \cap Z^n \;, \quad h_n(\underline{y}) = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sin\pi\, y_j}{\pi\, y_j}\right)^2 .$$

Das gleiche Verfahren läßt sich auch zur Bestimmung der Anzahl der Restsysteme in gewissen Simplices im $\mathbb{R}^n$ heranziehen.

R.SCHERTZ: <u>Über die Ringklassenkörper der komplexen Multiplikation</u>

Für die Ringklassenkörper Ω über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper Σ hat C.Meyer in seiner Monographie "Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern", Berlin 1957, Klassenzahlformeln aufgestellt, die die Relativklassenzahl h_Ω/h_Σ in Beziehung zu Einheiten von Ω setzt, welche durch singuläre Werte von Modulfunktionen dargestellt werden. Durch Untersuchung dieser Klassenzahlformeln gewinnt man zum Beispiel die folgenden Ergebnisse:

1) $N_\Omega h_\Omega/h_\Sigma \in \mathbb{N}$ mit $N_\Omega \in \mathbb{N}$ und $N_\Omega / (24[\Omega:\Sigma])^M$, $M \in \mathbb{N}$.

2) $\Omega = \prod_{i=1}^{r} \Omega_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \Sigma$ für $i \neq j \Longrightarrow N_\Omega \frac{h_\Omega}{h_\Sigma} = m \prod_{i=1}^{r} N_{\Omega_i} \frac{h_{\Omega_i}}{h_\Sigma}$, $m \in \mathbb{N}$:

Für die Teilkörper von Ω, die den Grundkörper Σ nicht enthalten, lassen sich analoge Aussagen herleiten.

D.Schmidt (Konstanz)
H.-J.Stender (Köln)