MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 7/1974

Arbeitstagung über Wahrscheinlichkeitsmaße auf Gruppen

10.2. bis 16.2.1974

Die dritte Arbeitstagung über Wahrscheinlichkeitsmaße auf Gruppen stand wieder unter der Leitung der Herren H.Heyer (Tübingen) und L.Schmetterer (Wien). Zentrales Thema der Tagung waren Fragen aus der Theorie Markoffscher Ketten auf diskreten Halbgruppen. Daneben trugen die Herren M.S. Bingham, H.Carnal, Y.Derriennic, E.Dettweiler, W.Guth, W.Hazod, H.Muthsam und L.K.Schmetterer über eigene Ergebnisse aus dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie vor.

Teilnehmer

M.S.Bingham, Hull	H.Heyer, Tübingen
H.Carnal, Bern	T.P.Maroudas, Tübingen
Y.Derriennic, Rennes	H.Muthsam, Wien
E.Dettweiler, Tübingen	H.Scheller, Tübingen
H.F. de Groote, Tübingen	L.Schmetterer, Wien
W.Guth, Wien	E.Siebert, Tübingen
W.Hazod, Tübingen	M.Wolff, Dortmund

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Die Herren A.Badrikian (Clermont-Ferrand), W.Böge (Heidelberg), J.Cigler (Wien), I.Csiszâr (Budapest), P.Georgiou (Athen), M.Keane (Rennes), J.Michalicek (Hamburg), K.R.Parthasarathy (Manchester), A.Ruchin (Leningrad), K.Schmidt (London), A.Tortrat (Paris), K.Urbanik (Wroclaw) konnten der Einladung zur Tagung leider nicht folgen.

Vortragsauszüge

I. Markoffsche Ketten auf diskreten Halbgruppen

(I.1) Herr Maroudas trug über das Einbettungsproblem für endliche Markoffsche Ketten und unendlich oft teilbare Wahrscheinlichkeitsmaße auf Halbgruppen vor.
(Literatur: S. Johansen: Some Results on the Imbedding Problem for Finite Markov Chains. Erscheint im J.London Math.Soc. 1974)

Eine stochastische n x n-Matrix P heißt einbettbar, wenn eine stetige Halbgruppe $(P(t) \mid 0 \leq t < \infty)$ stochastischer Matrizen existiert, so daß $P(0) = I$ (I Einheitsmatrix) und $P(1) = P$ ist. Nach J.L. Doob hat dann die Matrizenfunktion P(t) die Form $P(t) = \exp t\,Q \quad (0 \leq t < \infty)$, wobei Q eine Intensitätsmatrix ist. Mit Hilfe dieses Resultats und des Begriffs der "zulässigen Logarithmusfunktion" gelingt es, eine allgemeine Bedingung für die Einbettbarkeit einer stochastischen n x n - Matrix mit verschiedenen Eigenwerten zu beweisen.
Im Zusammenhang mit dem Problem der Einbettung stochastischer Matrizen wurden dann unendlich oft teilbare Maße auf einer endlichen Halbgruppe S untersucht. Mittels der Fortsetzung ϑ' einer Matrizendarstellung ϑ von S auf $\mathcal{M}^1(S)$ wurden unendlich oft teilbare Äquivalenzklassen von Wahrscheinlichkeitsmaßen definiert.
Die Charakterisierung unendlich oft teilbarer Äquivalenzklassen von W-Maßen einerseits und ihr Zusammenhang mit den unendlich oft teil-

baren W-Maßen auf der Halbgruppe $\mathcal{E}$ der Extremalpunkte der Menge aller stochastischen n x n - Matrizen andererseits bildeten den Schwerpunkt dieses Vortrages.

Es wurde gezeigt, daß eine nicht-singuläre stochastische n x n - Matrix P genau dann in eine zeitlich homogene endliche Markoffsche Kette eingebettet werden kann, wenn die Äquivalenzklasse $\{\nu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{E}) \mid \vartheta'(\nu) = P\}$, wobei ϑ' die Fortsetzung der identischen Darstellung von $\mathcal{E}$ ist, unendlich oft teilbar ist.

Abschließend wurde gezeigt:

Ist eine stochastische Matrix P mittels der Intensitätsmatrix $\alpha(P_o - I)$ eingebettet, wobei P_o eine stochastische Matrix und $\alpha \geqslant 0$ ist, und wird P_o durch $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{E})$ repräsentiert, so wird P durch das ε_I-Poissonmaß $\exp_{\varepsilon_I}[\alpha(\nu - \varepsilon_I)]$ repräsentiert.
Umgekehrt gilt: Repräsentiert $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{E})$ die stochastische Matrix P_o und $\exp_{\varepsilon_I}[\alpha(\nu - \varepsilon_I)] \in \mathcal{M}^1(\mathcal{E})$ die stochastische Matrix P, so kann P eingebettet werden: $P = \exp[\alpha(P_o - I)]$.

Im Falle doppelt stochastischer Matrizen können ähnliche Ergebnisse erhalten werden.

(I.2) Herr <u>Scheller</u> referierte über Produkt-Integrale
[S. 186-190 aus S. Johansen: A Central Limit Theorem for Finite Semigroups and its Application to the Imbedding Problem for Finite State Markov Chains. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete <u>26</u>, 171-190 (1973)]

Die Definition des Produktintegrals für matrizenwertige Funktionen auf Intervallen des $\mathbb{R}^1$ geschieht über Riemann-Summen. Verzichtet man darauf, in einem zweiten Schritt zu einer Art Lebesgue-Integral zu gelangen, so kann als Definitionsbereich eine beliebige totalgeordnete Menge und als Wertebereich eine Banach-Algebra genommen werden. Ist der Wertebereich überdies kommutativ, so läßt sich direkt der Begriff eines multiplikativen Maßes einführen.

<u>Definition:</u> Es seien $[a,b]$ ein kompaktes Intervall und $Q : [a,b] \longrightarrow M(n,\mathbb{R})$ eine matrizenwertige Funktion. Q heißt Riemann-produktintegrierbar mit Produktintegral $\prod_a^b (I+Q(u)\,du)$,

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{ a = t_o < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ von $[a,b]$ existiert, so daß für jede Verfeinerung $\mathfrak{Z}' = \{ a = s_o < s_1 < \cdots < s_{\ell} = b\}$ von $\mathfrak{Z}$

$$\left\| {}_a\prod^b (I + Q(u)\,du) - \prod_{j=o}^{\ell-1} (I + Q(s_j)(s_{j+1}-s_j) \right\| < \varepsilon \text{ gilt.}$$

Ist $Q : [a,b] \to M(n, \mathbb{R})$ Lebesgue-meßbar und ist $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig beschränkte Folge Riemann-produktintegrierbarer Funktionen $Q_n : [a,b] \to M(n, \mathbb{R})$, die fast überall gegen Q konvergiert, so existiert $\lim\limits_{n \to \infty} \prod_a^b (I + Q_n(u)du)$. Jede andere in dieser Weise approximierende Folge hat den gleichen Limes; er wird als das (Lebesgue-)Produktintegral $\prod_a^b (I + Q(u)du)$ bezeichnet.

Für das Produktintegral gilt ein Satz von der majorisierten Konvergenz (L. Schlesinger: Neue Grundlagen für einen Infinitesimalkalkül der Matrizen, Math.Z. <u>33</u>, 33-61 (1931)).

Johansen beweist als Hilfsmittel für die Untersuchung zerlegbarer stochastischer Matrizen die folgenden beiden Sätze:

(1) Es sei $Q : [a,b] \to M(n, \mathbb{R})$ eine wesentlich beschränkte meßbare Funktion. Dann erfüllt die durch $Q^{\pi}(t) := {}_a\prod^t (I + Q(u)du)$ $(a \leq t \leq b)$ definierte "Stammfunktion" fast überall die Gleichung $\frac{d}{dt} Q^{\pi} = Q^{\pi} Q$.

(2) Ist $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen $Q_k : [a,b] \to M(n, \mathbb{R})$ mit $\| Q_k \| \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die in der $\sigma(L^{\infty}, L^1)$-Topologie gegen eine Funktion $Q : [a,b] \to M(n, \mathbb{R})$ konvergiert, so konvergiert $(Q_k^{\pi})_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen Q^{π}.

Eine Beziehung zwischen dem Produktintegral und dem gewöhnlichen Integral wird durch die Formel

$$\prod_o^1 (I + Q(u)du) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{o<u_1<\cdots<u_n<1} Q(u_1)\cdots Q(u_n)du_1\cdots du_n$$

hergestellt.

(I.3) Nach diesen Vorbereitungen trug Herr Hazod über den wahrscheinlichkeitstheoretischen Teil der oben genannten Arbeit von Johansen vor.

Zunächst wird der Zusammenhang zwischen Einbettungsproblemen von W-Maßen auf endlichen Halbgruppen und Einbettungsproblemen stochastischer Matrizen hergestellt.

Definition: Sei S eine endliche Halbgruppe mit Einselement e. Ein W-Maß $\mu \in \mathcal{M}^1(S)$ heißt einbettbar (in eine nicht stationäre Halbgruppe), wenn es eine Familie $(\mu_{s,t})_{0\le s\le t\le 1}$ von W-Maßen $\mu_{s,t}$ gibt, so daß folgendes gilt:

(i) $\mu_{0,1} = \mu$

(ii) $\mu_{s,t}\,\mu_{t,r} = \mu_{s,r}$ $\quad (0 \le s \le t \le r \le 1)$

(iii) $\mu_{s,s} = \varepsilon_e$ $\quad (0 \le s \le 1)$

(iv) $s \longmapsto \mu_{s,t}$ und $t \longmapsto \mu_{s,t}$ sind stetig.

Entsprechend heißt eine stochastische n x n - Matrix P einbettbar, wenn es eine Familie $(P_{s,t})_{0\le s\le t\le 1}$ stochastischer n x n - Matrizen $P_{s,t}$ gibt, so daß die Eigenschaften (i) - (iv) (mit $P_{s,t}$ bzw. P anstelle von $\mu_{s,t}, \mu$) erfüllt sind.

Sei nun $\mathcal{E}$ die Halbgruppe der Extrempunkte der Menge $\mathcal{P}$ aller stochastischen n x n - Matrizen, $\vartheta' : \mathcal{M}^1(\mathcal{E}) \to \mathcal{P}$ der im Referat (I.1) eingeführte Homomorphismus. Vermöge ϑ' entsprechen sich einbettbare Maße und einbettbare Matrizen:

Satz 1: Ist $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{E})$ einbettbar, so ist auch $\vartheta'(\mu)$ einbettbar. Ist umgekehrt $P \in \mathcal{P}$ einbettbar, so existiert ein einbettbares $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{E})$ mit $\vartheta'(\mu) = P$.

Daran anschließend wurde das Problem der Einbettung nicht-singulärer stochastischer Matrizen behandelt.

Definition: $P \in \mathcal{P}$ heißt Limes eines infinitesimalen Dreiecksystems, wenn es eine Familie $(P_{i,j} \mid 1 \le i \le m_j,\ j \in \mathbb{N})$ in $\mathcal{P}$ gibt, so daß

$$\lim_{j\to\infty} \max_{1\le i\le m_j} \| P_{i,j} - I \| = 0 \quad \text{und} \quad P = \lim_{j\to\infty} \prod_{i=1}^{m_j} P_{i,j}$$

ist.

P heißt zerlegbar, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$

$$P = \prod_{i=1}^{m_j} P_{i,j}$$

ist.

Dann gilt:

Satz 2: $P \in \mathcal{P}$ sei nicht-singulär. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) P ist einbettbar;

(2) P ist Limes eines infinitesimalen Dreiecksystems;

(3) P ist zerlegbar;

(4) Es gibt eine Abbildung $t \mapsto Q(t)$ von $[0,1]$ in die Menge der Intensitätsmatrizen, so daß P als Produktintegral

$$P = \prod_{o}^{1} (I + Q(t)dt)$$

darstellbar ist.

(5) P ist Limes von Produkten unendlich teilbarer stochastischer Matrizen.

Die Herren Siebert und Guth referierten dann über zwei Arbeiten von V.M. Maksimov:

Random processes with independent increments with values in an arbitrary finite group.

Theory Prob.Appl. 15, 215-228 (1970)

und

Divisible Distributions on Finite Groups

Theory Prob.Appl. 16, 308-322 (1971)

(I.4) Additive Prozesse mit Werten in endlichen Gruppen

Es seien $G = \{e_1,\dots,e_n\}$ eine endliche Gruppe mit Einselement $e = e_1$ und $t \mapsto x(t) \in \mathcal{M}^1(G)$, $t \in I = [a,b]$, ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen $x(u,v) \in \mathcal{M}^1(G)$ $(a \leq u < v \leq b)$, also $x(v) = x(u)\, x(u,v)$, und es sei $x(a) = e$. Die Abbildung $t \mapsto x(t)$ sei stetig. Bezeichnet R die reguläre Darstellung von $\mathcal{M}^b(G)$ in $M(n,\mathbb{C})$ (n ist die Ordnung von G), so sei überdies

$$H(x(t)) := -\frac{1}{n} \log \left| \det R(x(t)) \right| < \infty$$

für jedes $t \in I$.

Ziel der hier referierten Untersuchungen ist die Darstellung des Prozesses $(x(t))_{t \in I}$ durch ein Exponentialintegral.

Eine stetige Abbildung $m : I \to \mathcal{M}^b(G)$ heißt Charakteristik, wenn $m(a) = 0$, $m_1(t) = -\sum_{i=2}^{n} m_i(t)$ für alle $t \in I$ und

$t \mapsto m_j(t)$ isoton ist für alle $j \geq 2$.

(Die m_j sind die Koeffizientenabbildungen: $m(t) = \sum_{j=1}^{n} m_j(t)\, e_j \ (t \in I)$).

Für jede Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{ a = t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b \}$

von I seien $\eta(\mathfrak{Z}) = \max_{1 \leq i \leq k-1} (t_{i+1} - t_i)$

und $\Delta_i m = m(t_{i+1}) - m(t_i)$ $(i=1,\dots,k-1)$.

Man kann nun zeigen, daß

$$\int_a^b \exp(dm) = \lim_{\eta(\mathfrak{Z}) \to 0} \prod_{j=1}^{k-1} \exp(\Delta_j m) \text{ existiert.}$$

Das so definierte W-Maß $\int_a^b \exp(dm)$ heißt das Exponentialintegral zur Charakteristik m.

Der Zusammenhang des Exponentialintegrals mit dem in der Johansen'schen Arbeit betrachteten Exponentialintegral ist folgender:

Ist die Charakteristik m absolutstetig mit Ableitung m', so ist

$$\prod_a^b (e_1 + m'(u)du) = \int_a^b \exp(dm) \quad .$$

Dann gilt

<u>Satz 1:</u> Zu jeder Charakteristik m auf I wird durch $x(t) := \int_a^t \exp(dm)$ ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen

$$x(u,v) := \int_u^v \exp(dm)$$

definiert, für den

$$H(x(t)) < \infty \quad (t \in I)$$

und $\lim_{|u-v| \to 0} x(u,v) = e$ gelten.

<u>Satz 2:</u> Zu jedem Prozeß $(x(t))_{t \in I}$ mit unabhängigen Zuwächsen $x(u,v)$, der $H(x(t)) < \infty$ $(t \in I)$ und $\lim_{|u-v| \to 0} x(u,v) = e$ erfüllt, existiert

genau eine Charakteristik m auf I mit $x(t) = \int_a^t \exp(dm)$

für alle $t \in I$.

(I.5) Teilbare Verteilungen auf endlichen Gruppen

Es werden teilbare Verteilungen auf endlichen Gruppen betrachtet, d.h. solche Verteilungen e, zu denen in jeder Umgebung V der Punktmasse in der Einheit von G Verteilungen $e(i,V)$ $(i=1,\dots,n(V))$ existieren, so daß $e = \prod_{i=1}^{n(V)} e(i,V)$ ist. Nach den vorher angegebenen Resultaten sind solche Verteilungen einbettbar. Teilbare Kurven nennt man Abbildungen x von einem Intervall in die Menge der Verteilungen, so daß $x(t_2) = x(t_1)\, x\, (t_1,t_2)$ $(t_1 < t_2)$ mit einer geeigneten Familie $x(s,t)$ gilt. Es wurde dann gezeigt: $x(t)$ konvergiert für $t \to \infty$; die Endverteilungen $x(t,\infty)$ konvergieren gegen das Haarsche Maß einer Untergruppe, die von den Elementen e_i mit $\lim_{t\to\infty} m_i(t) = \infty$ $(i \geq 2)$ aufgespannt wird ($m(t) = \sum_{i=1}^{r} m_i(t)\, e_i$ ist die vorher erklärte Charakteristik).

Der Träger einer teilbaren Kurve ist das Produkt von Untergruppen. Die Konvergenz von Produkten $t_n = x_1 \cdots x_n$ von Verteilungen wird durch den Begriff der vollständigen Menge axiomatisiert. Die teilbaren Verteilungen bilden in diesem Sinne eine vollständige Menge. Vollständige Mengen sind stabil gegenüber der Bildung von abgeschlossenen einhüllenden Halbgruppen und, falls für eine Menge die Wahrscheinlichkeit der Einheit nach unten beschränkt ist, auch gegenüber Vereinigungen. Insbesondere ergibt sich, daß keine maximale vollständige Menge existiert.

(I.6) Summe Markoffscher Ketten auf Halbgruppen

Herr Muthsam berichtete über seine in den Monatsheften f. Math. 76, 43-54 (1972) publizierten Ergebnisse.

Es sei S eine diskrete Halbgruppe (nicht notwendig endlich), $X = (X_0, X_1, \dots)$ eine Markoffsche Kette mit Zuständen in S und zeitlich stationärer Übergangsmatrix $P = (p_{gh})_{g,h \in S}$.

- 9 -

Es werden Halbgruppen mit zweiseitigem universellen Minimalideal K betrachtet.
$\{L_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ bzw. $\{R_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ seien die Mengen der minimalen Links- bzw. Rechtsideale von S. S erfülle die Bedingung

(A) Zu jedem $h \in S$ existiert $i_h \in \mathcal{I}$ mit $K\,h \subseteq L_{i_h}$.

Unter diesen Voraussetzungen wird der Summenprozeß $Y = (Y_o, Y_1, \dots)$ studiert ($Y_i := X_o \cdots X_i$). Dazu wird der Prozeß $Z = \binom{X}{Y}$ benutzt, der eine Markoffsche Kette ist. Das Grenzverhalten der Übergangsmatrixpotenzen von Z wird unter Zuhilfenahme des Studiums der Klasseneinteilung von Z untersucht und daraus Schlüsse über Y gezogen.

II. Vorträge über verschiedene Themen

(II.1) Herr Bingham trug über
Additive Prozesse mit Werten in abelschen Gruppen
vor. Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie und $X(t)$, $t \in [0,1]$, ein stochastisch stetiger G-wertiger stochastischer Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen, so daß $X(0) = e$ ist (e ist das neutrale Element von G). Sei $D[0,1]$ der Raum aller rechtsseitig stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow G$, so daß für jedes $t \in (0,1]$ $f(t-) = \lim_{s \uparrow t} f(s)$ existiert.
Es wurde folgender Satz bewiesen:

Theorem: Es existiert ein zu $X(t)$ stochastisch äquivalenter G-wertiger stochastischer Prozeß $X^*(t)$, $t \in [0,1]$, dessen Pfade mit Wahrscheinlichkeit Eins zu $D[0,1]$ gehören. Ferner existieren G-wertige stochastische Prozesse $W_k(t)$, $k = 0,1,2,\dots$, und $C(t)$, so daß

$$X^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t) + C(t)$$

mit Wahrscheinlichkeit Eins gleichmäßig in $t \in [0,1]$ gilt. Die Prozesse $W_k(t)$ und $C(t)$ haben folgende Eigenschaften:

(i) $C(t)$, $W_o(t)$, $W_1(t)$, ... sind paarweise unabhängig und haben unabhängige Zuwächse;

(ii) der Prozeß $C(t)$ ist (im Sinne von Parthasarathy) Gauss'sch und seine Pfade sind mit Wahrscheinlichkeit Eins stetig;

(iii) die Pfade von $W_k(t)$ haben mit Wahrscheinlichkeit Eins höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen in $[0,1]$. Diese sind die Unstetigkeitsstellen eines reellen stochastisch stetigen (möglicherweise nichthomogenen) Poisson-Prozesses ($k = 0,1,2,\ldots$).

Literatur: M.S. Bingham: Stochastic processes with independent increments taking values in an abelian group. Proc.London Math.Soc. (3) 22 (1971), 507-530.

(II.2) Herr Schmetterer trug vor über

Ein gruppentheoretisches Problem und Zusammenhänge mit einem speziellen Einbettungsproblem der Wahrscheinlichkeitstheorie

Es sei G eine total geordnete Gruppe (TO-Gruppe) mit neutralem Element e. Sei $a \in G$, $a \neq e$. a heißt unendlich teilbar, wenn zu jedem natürlichen $n \geqslant 2$ ein $a_n \in G$ existiert, so daß $a_n^n = a$ ist. a heißt einbettbar, wenn ein Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}_+ \longrightarrow G$ existiert ($\mathbb{Q}_+$ ist die Gruppe der positiven rationalen Zahlen), der $\varphi(1) = a$ erfüllt. Nun gilt das folgende

Lemma: Ist G eine TO-Gruppe und ist $a \in G$ unendlich teilbar, so ist a auch einbettbar.

Dies folgt aus Eigenschaften der Ordnungsstruktur von G und dem Spezialfall eines bekannten Satzes:

Wenn für jedes n die Menge der Wurzeln eines normierten Maßes μ schwach kompakt ist, so ist μ einbettbar.

Betrachtet man die Gruppe G_1, welche durch die von $\{x_1, x_2, \ldots\}$ erzeugte freie Gruppe modulo $x_1 = x_n^n$ ($n \in \mathbb{N}$) erklärt ist, so ist bekanntlich x_1 nicht einbettbar.

Da jede torsionsfreie abelsche Gruppe eine TO-Gruppe ist, folgt, daß die abelsche Version von G_1 Torsionselemente enthalten muß, was man auch direkt nachweisen kann. Jedoch ist, wie man zeigen kann, die nichtabelsche Version der Gruppe G_1 torsionsfrei. Trotzdem folgt jetzt aus obigem Lemma, daß G_1 nicht TO-Gruppe ist. Überdies ist es sehr wahrscheinlich, daß G_1 keine periodischen Elemente enthält.

(II.3) Herr Guth trug vor über

Zweiparametrige Familien von W-Maßen auf kompakten Gruppen

Auf einer kompakten Gruppe mit neutralem Element e sei eine Familie $(\nu_{u,v})_{u,v\in[a,b]}$ von W-Maßen $\nu_{u,v}$ gegeben, so daß die $\hat{\nu}_{u,v}(V)$ (V stetige unitäre Darstellung von G) stetig differenzierbar von den Parametern u, v abhängen. Dann ist durch

$$M(t)(V)(e) = L(t)V + G(t)V + \int_{G\setminus\{e\}} (V(x) - E - \Gamma(x,V))d\eta_t(x)$$

eine in t stetige Familie erzeugender Funktionale auf der Koeffizientenalgebra gegeben, die $\lim_{\Delta\to o} \frac{1}{\Delta}(\hat{\nu}_{t,t+\Delta}(V) - E) = M(t)(V)(e)$ genügen (L(t), G(t), η_t und $\Gamma(x,V)$ sind dabei wie im Fall einer stetigen Halbgruppe als primitive Form, quadratische Form, Lévy-Maß und Lévy-Abbildung für alle t definiert). $\hat{\nu}_{u,v}(V)$ gestattet dann eine Darstellung als Produktintegral $\prod_a^b \exp(M(t)(V)(e)dt)$.

Umgekehrt wird durch eine stetige Familie erzeugender Funktionale eine zweiparametrige stetig differenzierbare Familie von W-Maßen gegeben.

Literatur: V.M. Maksimov: Nonhomogeneous Semigroups of Measures on Compact Lie Groups. Theory Prob.Appl. 17 (1972).

(II.4) Herr Hazod trug vor über

Stetige Halbgruppen von W-Maßen und erzeugende Distributionen

Sei $(\mu_t, t \geq 0, \mu_o = \delta_e)$ eine stetige Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einer Lie'schen Gruppe G. Weiter sei $\mathfrak{D}(G)$ der Raum der Testfunktionen, i.e. $\mathfrak{D}(G) = C^\infty(G) \cap C_c(G)$.

Dann läßt sich der infinitesimale Generator der Halbgruppe der Faltungsoperatoren R_{μ_t} $(R_{\mu_t} f(x) := \mu_t ({}_x f))$ als Faltungsoperator mit einer Distribution $F \in \mathfrak{D}'$ beschreiben:
$\mathfrak{D}$ liegt im Definitionsbereich von $\frac{d}{dt} R_{\mu_t}\Big|_{t=o}$ und für alle $f \in \mathfrak{D}$ gilt: $\frac{d}{dt} R_{\mu_t} f(x)\Big|_{t=o} = F({}_x f)$.

Darüber hinaus lassen sich diese Distributionen F genau beschreiben (s.G.A. Hunt: Trans.Amer.Math.Soc. 81 (1956), 264-293). Diese Resultate lassen sich auf beliebige lokalkompakte Gruppen übertragen (s. W. Hazod: Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.Geb. 25 (1973), 301-322; E. Siebert: Math.Z. 131 (1973), 313-333). Der Fall nicht Lie'scher Gruppen wurde jedoch nur am Rande gestreift.

1) Es läßt sich unter Verwendung eines Satzes von F. Hirsch (C.R. Acad.Sc., Paris 274 (1972), Série A, 43-46) zeigen, daß die Distribution F bzw. der Operator R_F folgende Eigenschaften besitzt: Für jedes $\lambda > 0$ ist $(R_F - \lambda I)\mathfrak{D}$ dicht in $C_o(G)$ resp. $(R_F|_{\mathfrak{D}})^- = \frac{d}{dt} R_{\mu_t}\Big|_{t=o}$.

2) Zu jeder offenen Umgebung $U = U(e)$ der Einheit e in G gibt es eine Zerlegung $F = F_1 + F_2$ von F, so daß F_2 ein Poissongenerator ist mit $Tr(F_2) \subseteq G \setminus U \cup \{e\}$ und $Tr(F_1) \subseteq U$.

3) Seien G und G_1 Lie'sche Gruppen, weiter seien U und V Umgebungen der Einheit in G resp. G_1, und $\varphi : U \to V$ sei ein bijektiver C^∞-Isomorphismus. Dann stimmen die "erzeugenden Distributionen" F_o von G, deren Träger in U liegt, mit jenen von F, deren Träger in V liegt, überein. Wenn insbesondere G die Lie-Algebra von G_1 und φ die Exponentialabbildung bezeichnet, dann erhält man: Aus der Kenntnis der erzeugenden Distributionen auf $G \cong \mathbb{R}^n$ und der Kenntnis der Poissongeneratoren lassen sich sämtliche erzeugenden Distributionen auf G_1 angeben.

4) Schließlich wurde gezeigt, daß Zufallsentwicklungen von Faltungshalbgruppen (s. T.G. Kurtz: Proc.Amer.Math.Soc. 35 (1972), 147-154) einige naheliegende Anwendungen besitzen.

(II.5) Herr Carnal trug vor über ein

Beispiel einer zweidimensionalen transienten Gruppe

Die Gruppe der Matrizen $\begin{pmatrix} 2^n & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{R})$ ist transient. Dies folgt aus einem allgemeinen Satz von Keane und Guivarc'h, kann aber auch direkt bewiesen werden.

Man nehme eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Elementen

$X_n = \begin{pmatrix} 2^{Y_n} & Z_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und bilde die Partialprodukte

$$S_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n = \begin{pmatrix} 2^{T_n} & U_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ und } U_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{T_{i-1}} Z_i .$$

Die Irrfahrt kann nur rekurrent sein, wenn $\{T_n\}_{n \geq 1}$ rekurrent ist, was hier angenommen werden soll.

Sei $\{n \mid n \geq 1, T_n = 0\} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ mit $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \ldots$.

Dann ist U_{τ_k} die Summe von k unabhängigen Variablen $V_1, V_2, \ldots, V_k$, die wiederum identisch verteilt sind. Man muß also zeigen, daß die gemeinsame Verteilung eine Transienzbedingung erfüllt, z.B.

$$\frac{1}{x^{1+\rho}} \int_{|y| \leq x} y^2 \, dF(y) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty \quad \text{für ein } \rho > 0.$$

Sei nun als einfachstes Beispiel $P(Y_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$,

$F_1 = P(V_i < x, Y_1 = 1)$ und $\varphi_1(t) = \int e^{itx} \, dF_1(x)$.

Man zeigt, daß $\varphi_1(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_1(2t) + \psi(t)$ gilt, wobei $\psi(t)$ charakteristische Funktion eines positiven Maßes ist. Daraus ergibt sich für eine positive meßbare Funktion f:

$$\int f(x) \, dF_1(x) \geq \iint f(x + 2y) \, dF_1(x) \, dF_1(y).$$

Indem man für f Funktionen der Form $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq |x| \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ betrachtet, erhält man für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ und ein B (ε) Beziehungen der Form

$$\int_{2(a-B) \leq |x| \leq 2(b+B)} x^2 \, dF_1(x) \geq 4\,(1-\varepsilon) \cdot \int_{a \leq |x| \leq b} x^2 \, dF_1(x),$$

sobald a und b groß genug sind. Da(außer im trivialen Fall, der durch die Bedingung der Aperiodizität ausgeschlossen wird) beliebig große Werte a und b gefunden werden können derart, daß die rechte Seite positiv ist, folgt

- 14 -

$$\int_{|x| \leq 2^n(b+B)} x^2 \, dF_1(x) \geq c \left[4(1-\varepsilon) \right]^n \quad (c > 0),$$

wodurch die erwähnte Bedingung erfüllt wird. Im allgemeinen Fall definiert man

$$A_k := \left\{ T_i \notin \{-k, -2k, -3k, \ldots\},\ 1 \leq i \leq \tau_1 \right\}$$

und $B_k = \left\{ \exists j\ 1 \leq j \leq \tau_1 \text{ mit } T_j = k \right\} \cap A_k$.

Mit $F_k(x) = P(\lfloor V_i < x \rfloor \cap A_k)$ erhält man ähnlich wie oben Beziehungen der Form

$$\int_{|x| \geq 2^{nk}(b+B)} x^2 \, dF_k(x) \geq c \left[2^{2k}(1-\varepsilon) \frac{P(B_k)}{1-P(A_k)} \right]^n \quad (c > 0).$$

Man muß jetzt nur noch zeigen, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer für ein geeignetes k größer als $2^{(1+\varsigma)k}$ ist, was nach einigen Fallunterscheidungen auch gelingt.

(II.6) Herr Derriennic trug vor über

Irrfahrten auf nicht-abelschen lokalkompakten Gruppen

Es wurde über neuere Resultate aus dem Gebiet der Irrfahrten auf nicht-abelschen lokalkompakten Gruppen berichtet, die von verschiedenen Mitgliedern der Abteilung für Wahrscheinlichkeitstheorie der Universität Rennes (Frankreich) erzielt wurden.

1) Ein Rekurrenz-Kriterium für die Gruppe der Bewegungen der euklidischen Ebene
(Pierre Crépel; erscheint demnächst in C.R. Acad. Sc., Paris)

Satz 1: Sei μ ein aperiodisches Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Gruppe $G = \{(z,b) \mid z,b \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ $((z,b)(z',b') := (zz', b+zb'))$, so daß $\int_G |b(g)|^2 \mu(dg) < \infty$ ($b(g)$ ist die zweite Komponente von $g \in G$) ist. Dann induziert μ eine rekurrente Irrfahrt auf G.

2) Ein Erneuerungssatz für nicht-amenable Gruppen (Y. Derriennic und Y. Guivarc'h: C.R. Acad.Sc., Paris, 277 (1973), 613-615)

Satz 2: Ist die lokalkompakte Gruppe G nicht amenabel, so induziert jedes aperiodische Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf G eine transiente Irrfahrt auf G und es gilt:
Für jede auf G stetige Funktion f mit kompaktem Träger ist $\lim_{x \to \infty} (\varepsilon_x * A)(f) = 0$, wobei A das Potential-Maß $\sum_{n \geq 0} \mu^n$ ist.

3) Die Resultate von Dynkin und Malyutov (Random walks on groups with a finite number of generators: Soviet Math. 2, (1961), 399-402) über den Martin'schen Rand von Irrfahrten auf freien Gruppen können auf die allgemeinere Klasse der von irreduziblen Wahrscheinlichkeitsmaßen mit endlichem Träger induzierten Irrfahrten ausgedehnt werden.

(II.7) Herr Dettweiler referierte über
Stabile Maße auf lokalkonvexen Räumen

Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Eine kompakte, konvexe, kreisförmige Menge $K \subset E$ heiße Hilbertmenge, wenn $E_K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n\,K$, versehen mit der Norm $p_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$, ein Hilbertraum ist. Liegt jede kompakte Teilmenge von E in einer Hilbertmenge, so heißt E ein Badrikianscher Raum.

Die Klasse der Badrikianschen Räume umfaßt die Hilberträume und die starken Duale von nuklearen Räumen.

Für Wahrscheinlichkeitsmaße auf Badrikianschen Räumen läßt sich eine relativ weitreichende Konvergenztheorie entwickeln. Dies liegt vor allem daran, daß sich die sog. gleichmäßige Straffheit einer Familie von W-Maßen durch eine topologische Eigenschaft der zugehörigen Familie der Fouriertransformierten charakterisieren läßt. U.a. lassen sich z.B. für die Konvergenz eines gleichmäßig infinitesimalen Dreieckssystems gegen ein vorgegebenes Gaußsches Maß notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, die im Falle des $\mathbb{R}^p$ gerade das Lindeberg-Lévy-Kriterium liefern.

Stabile Maße auf einem Badrikianschen (oder allgemeiner lokalkonvexen) Raum werden wie im klassischen Fall definiert. Unter leicht einschränkenden Bedingungen an den Badrikianschen Raum erhält man die spezielle Gestalt der Lévy-Chintschin-Formel für stabile Maße, die für stabile Maße auf dem $\mathbb{R}^p$ gerade die klassische Formel liefert. Mit Hilfe dieses Resultates und der allgemeinen Grenzwertsätze lassen sich dann notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, wann ein Wahrscheinlichkeitsmaß zum Anziehungsbereich eines vorgegebenen stabilen Maßes gehört.

Dr. H. de Groote (Tübingen)