MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 8/1974

Funktionentheorie

17.2. bis 23.2.1974

Die diesjährige Funktionentheorietagung stand unter der Leitung von Ch.Pommerenke (Berlin), K.Strebel (Zürich) und H.Wittich (Karlsruhe). Neben den deutschen Teilnehmern konnte in diesem Jahr wieder eine große Zahl ausländischer Gäste begrüßt werden, die auch durch ihre Vorträge zum Gelingen der Tagung beitrugen. Vorgetragen wurden Ergebnisse aus den verschiedensten Gebieten der Funktionentheorie einer Veränderlichen. Die am häufigsten behandelten Themen waren: Schlichte Funktionen, konforme und quasikonforme Abbildungen, Wertverteilungslehre.

Teilnehmer

J.M.Anderson, London
I.N.Baker, London
J.Becker, Berlin
H.Begehr, Berlin
C.Constantinescu, Zürich
A.Dinghas, Berlin
K.Doppel, Hannover
G.Ehrig, Berlin
H.Epheser, Hannover
C.H.FitzGerald, London
G.Frank, Dortmund
W.H.Fuchs, London
F.Gackstatter, Berlin
D.Gaier, Giessen
H.Grunsky, Würzburg
K.Habetha, Dortmund
G.Halâsz, Budapest
H.Herold, Würzburg
A.Huber, Zürich
F.Huckemann, Berlin
J.A.Hummel, College Park
A.Hyllengren, Stockholm
J.A.Jenkins, Princeton
S.Keller, Basel
O.Knab, Karlsruhe
H.Köditz, Hannover
A.J.Lohwater, Cleveland
H.H.Martens, Trondheim
B.Maskit, Stony Brook
E.Mues, Karlsruhe
J.Nikolaus, Bonn
M.E.Noble, Canterbury
A.E.Obrock, Cleveland
E.Peschl, Bonn
A.Pfluger, Zürich
Ch.Pommerenke, Berlin
W.Raab, Bonn
L.Reich, Graz
H.M.Reimann, Bern
G.Schmeißer, Erlangen
H.S.Shapiro, Stockholm
T.Sheil-Small, York
H.Tietz, Hannover
St.Timmann, Hannover
L.Volkmann, Berlin
Weill, Brooklyn
J.Winkler, Berlin
H.Wittich, Karlsruhe
D.Wrase, Karlsruhe

Vortragsauszüge

G.M.ANDERSON: Über nichtfortsetzbare Potenzreihen

Es sei $f(x)$ eine auf $[0,1]$ stetige Funktion und α eine irrationale Zahl. Sei ferner $\{n\alpha\}_{n=1}^{\infty}$ die Bruchteiler von $n\alpha$. Die zu f zugehörige Fourier-Entwicklung ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikx}$ und $K(f) = \{k \mid -\infty < k < \infty,\ c_k \neq 0\}$.

Satz: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe

$$G_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\{\alpha n\}) z^n$$

über $|z| = 1$ fortzusetzen ist, ist, daß die Bruchteiler $\{k\alpha\}_{k\epsilon K}$ nicht überall dicht auf dem Segment $[0,1]$ liegen.

Bemerkung: Der Satz ist außerdem ganz trivial, wenn $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| = \infty$ ist.

I.N.BAKER: Functions which take every value at least k-times in the unit disc

Let $n(a)$ = Number of solutions z of $f(z) = a$ in D, counted with multiplicity. Let $k = k(f) = \min_{a\epsilon f(D)} n(a)$.

We show: If f is entire, $\exists$ entire h such that $k(h) = 1$, $h(z^{k(f)}) \equiv f(z)$.

The proof depends heavily on the use of the fact that f is entire. One might expect that:
If f regular in $|z| \leq 1$ and $k = k(f) > 1$ then $\exists$ h regular in $|z| < 1$ and a Blaschke product B of degree k such that $f = h(B)$ in $|z| \leq 1$.

The result has applications to the theory of Toeplitz operators.

J.BECKER: Hinreichende Bedingungen für Schlichtheit und homöomorphe Fortsetzbarkeit

Es wird folgende Differentialgleichung behandelt:

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} \underset{\text{f.ü.}}{=} h(z,t)\, z\, \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} \qquad (|z| < 1,\ 0 \le t < \infty)\ ,$$

$h(z,t)$ analytisch in z, meßbar in t, Re $h(z,t) > 0$; $h(0,t)$ integrierbar in jedem Intervall $[0,T]$ $(T > 0)$,

$$\int_0^\infty \mathrm{Re}\, h(0,t)\, dt = \infty .$$

Es werden Bedingungen angegeben, unter denen die Lösungen $f(z,t)$ (analyt. in z, absolut stetig in t) schlicht sind und nach der Vorschrift

$$F(Re^{i\varphi}) = f(e^{i\varphi}, \log R) \qquad (R \ge 1)$$

eine homöomorphe Fortsetzung von $f(z,0)$ liefern.
Man erhält z.B. folgende Kriterien für Schlichtheit und quasikonforme Fortsetzbarkeit einer analytischen Funktion $f(z)$ $(f'(0) \neq 0)$

a) $$\max_{|z|=e^{-t}} \left| 2\, \frac{a(t) - e^{-t}}{\dot a(t)+a(t)}\, z\, \frac{f''}{f'}(z) - \frac{\dot a(t)-a(t)}{\dot a(t)+a(t)} \right| \underset{\text{f.ü.}}{\le} k\ ,$$

b) $$\max_{|z|=e^{-t}} \left| e^{t}\, \frac{(a(t)-e^{-t})^2}{\dot a(t)+a(t)}\, z^2 \{f(z),z\} - \frac{\dot a(t)-a(t)}{\dot a(t)+a(t)} \right| \underset{\text{f.ü.}}{\le} k\ ,$$

$a(t)$ absolut stetig, $a(0) = 1$, Re $\dot a(t)/a(t) > 0$ f.ü., $a(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$. Wenn $k = 1$ ist, folgt Schlichtheit, falls $k < 1$ ist, existiert eine k-quasikonforme Fortsetzung von $f(z)$ auf die ganze Ebene.
Wählt man $a(t) = (e^{t} - ce^{-t})/(1-c)$ $(|c| \le 1,\ c \neq 1)$, so ergeben sich 2 Bedingungen von Ahlfors.

H.BEGEHR: Über beschränkte verallgemeinerte analytische Funktionen

Es werden einige auf Carathéodory zurückgehende Ungleichungen für approximative analytische und für pseudoanalytische Funktionen hergeleitet, die aber im Unterschied zum analytischen Fall nur in einem Teilbereich gelten. Die Ursache hierfür ist in einem beim Maximumprinzip zusätzlich auftretenden Faktor zu sehen. Dennoch reichen diese unscharfen Abschätzungen, um den Satz von Liouville

folgendermaßen abschwächen zu können:
Gibt es für die in $\mathbb{C}$ (F,G)-pseudoanalytische Funktion

$$w(z) = \lambda(z)F(z) + \mu(z)G(z) \qquad (\lambda,\mu \text{ reellwertig})$$

eine nichtnegative Konstante A mit $|\lambda(z)| \leq A < +\infty \quad (z \in \mathbb{C})$, so ist w eine pseudoanalytische Konstante, d.h. λ und μ sind konstant.

C.CONSTANTINESCU: Ein nichtlineares Dirichletsches Problem

In der axiomatischen Potentialtheorie (Theorie der harmonischen Räume) existieren mehrere Methoden um zu zeigen, daß das Dirichletsche Problem resolutiv ist. Eine von diesen Methoden benutzt die Linearität des Garbendatums nicht, sondern nur eine Folgerung dieser Linearität, nämlich die Tatsache, daß die Summe zweier hyperharmonischer Funktionen hyperharmonisch ist. Man konstruiert zuerst eine schwächere nichtlineare axiomatische Theorie in der der obige Beweis für die Resolutivität des Dirichletschen Problems noch gilt. Der Weg von dieser Theorie zu den partiellen Differentialgleichungen geht durch die lineare axiomatische Theorie. Man nimmt eine offene Menge X im Euklidischen Raum und endlich viele partielle Differentialgleichungen in X, derart, daß jede Differentialgleichung einen harmonischen Raum auf X definiert. Mittels einer Perturbation, die die unbekannten Funktionen mischt und die Differentialgleichungen nichtlinear macht, erhält man ein Garbendatum, das die obigen nichtlinearen Axiome erfüllt.

A.DINGHAS: Über den Schwarz-Pickschen Verzerrungssatz für die Fundamentalbereiche von C^n

Die Cartansche Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas auf Funktionensysteme von n komplexen Veränderlichen. (Eigene Arbeiten). Zusammenhang mit der Bergmanschen Kernfunktion (Überblicksvortrag). Der inhaltlich neue Teil des Vortrags erscheint in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Math.-Phys. Klasse 1974.

K.DOPPEL: Schlichte Funktionen im Hornichraum

Es wurde über einen von H.Hornich definierten Banachraum H von im offenen Einheitskreis analytischen Funktionen berichtet. Besonders wurde auf die Frage des Zusammenhangverhaltens der schlichten Familie in H eingegangen und die Möglichkeit der Existenz einer isoliert liegenden schlichten Funktion ausgeschlossen.

G.EHRIG: Koeffizientenabschätzungen im Zusammenhang mit der Bieberbachschen Vermutung

Aus einer Ungleichung von Fekete/Szegö werden zwei Beziehungen zwischen den Beträgen der Koeffizienten a_2, a_3 einer Funktion $f \in S$ gefolgert, die den Koeffizientenbereich W_3 der Punkte $(|a_2|, |a_3|)$ bestimmen. Mit Hilfe der Randdarstellungen von W_3 wird aus einer positiv semidefiniten quadratischen Form, die den FitzGerald-Ungleichungen zugeordnet ist, bewiesen, daß gilt:

Satz: Es existieren streng monoton wachsende Folgen $(K_n)_{n\geq 7}$ und $(L_n)_{n\geq 9}$ von reellen Zahlen K_n und L_n mit $\lim_{n\to\infty} K_n = 1.709$ und $\lim_{n\to\infty} L_n = 2.434$, so daß gilt

$$|a_n| < n \quad \text{für} \quad |a_2| \leq K_n \text{ für alle } n \geq 7 \text{ und alle } f \in S$$

und

$$|a_n| < n \quad \text{für} \quad |a_3| \leq L_n \text{ für alle } n \geq 9 \text{ und alle } f \in S.$$

Die Zahlen K_n und L_n können explizit angegeben werden. Weiter wird gezeigt, daß für jedes $n \geq 7$ ein Bereich $B_n \subset W_3$ konstruiert werden kann, in dem $|a_n| < n$ für alle $f \in S$ gilt.

C.H.FITZGERALD: Sums of Mappings onto Slit Domains

The problems of generalizing the following theorem are discussed.

Theorem: If D is an arbitrary domain which contains infinity, and $\varphi_o(z) = z + \ldots$ is a conformal mapping of D onto the complement of horizontal slits and points and $\varphi_{\pi/2}(z) = z + \ldots$ is a conformal mapping of D onto the complement of vertical slits and points, then $\dfrac{\varphi_0(z) + \varphi_{\pi/2}(z)}{2} = z + \ldots$ is a conformal mapping of D onto the complement of points, slits, and convex sets with positive area.

The desire is to replace the "horizontal slits" of φ_0 by slits in various directions, and the "vertical slits" of $\varphi_{\pi/2}$ by slits that are respectively orthogonal to those of φ_0.

G.FRANK: Bemerkung zu einer Vermutung von Hayman

f sei meromorph in $\mathbb{C}$. $f(z)\cdot f^{(k)}(z) \neq 0 \;\forall\; z \in \mathbb{C}$ und ein $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Dann, so lautet eine Vermutung von Hayman, folgt daraus

$$f(z) = e^{az+b} \quad \text{oder} \quad f(z) = \frac{1}{(Az+B)^n}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und a,b,A und B komplexe Zahlen.
Zu dieser Vermutung wird folgende Aussage gezeigt:

Satz: f meromorph in $\mathbb{C}$, f hat nur einfache Polstellen. Dann folgt aus $f(z)\cdot f^{(k)}(z) \neq 0 \;\forall\; z \in \mathbb{C}$ und ein $k \geq 2$ mit $k \in \mathbb{N}$

$$f(z) = e^{az+b} \quad \text{oder} \quad f(z) = \frac{1}{Az+B}\,.$$

Zum Beweis dieser Aussage wird das Problem in ein äquivalentes Problem aus der Theorie linearer Differentialgleichungen im Komplexen transformiert.

W.H.FUCHS: Über die Baernsteinsche Funktion

Al Baernstein (Proc.London Math. Soc. (3) 26 (1973), 418) hat die Funktion

$$T^*(re^{i\theta}) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi + N(r,f)$$

eingeführt. Hier ist f(z) eine meromorphe Funktion, N(r,f) hat die übliche Bedeutung und das Supremum wird über alle meßbaren Mengen des Maßes 2θ genommen. Baernstein bewies, daß $T^*(re^{i\theta})$

eine subharmonische Funktion in $0 < r < \infty$, $0 < \theta < \pi$ ist.
Er benutzte dies zum Beweis der "Spread Conjecture": Sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion der unteren Ordnung μ, $\frac{1}{2} < \mu < \infty$. Sei $\delta(\infty,f) = 1 - \cos \mu\beta$ $(0 < \mu\beta < \frac{\pi}{2})$. Dann ist für jede nach Null strebende Funktion $\eta(r)$

$$\liminf \left|\{\varphi \mid \log|f(r_n e^{i\varphi})| > \eta(r_n)\, T(r_n,f)\}\right| \geq \beta$$

wenn r_n durch eine Folge von Pólya peaks von $f(z)$ der Ordnung μ nach ∞ strebt.
Zu diesen schönen Resultaten von Baernstein möchte ich hier zwei Bemerkungen machen.
1. Man kann die Subharmonizität von $m^*(re^{i\theta})$ für $u = \log|f|$, f ganz, durch direkte Berechnung von Δm^* beweisen. Dieser Beweis ergibt auch notwendige und hinreichende Bedingungen, daß m^* harmonisch sein soll. Dies kann nur eintreten, wenn für $r > 0$ und jedes t die Menge

$$\{\varphi \mid \log|f(re^{i\varphi})| > t\}$$

aus einem einzigen Intervall besteht (oder leer ist) und wenn all diese Intervalle denselben Mittelpunkt haben.
2. Falls in (1) lim sup durch lim ersetzt werden kann, muß die Funktion $f(z)$ im wesentlichen folgendes Verhalten zeigen:
a) Es gibt Intervalle (S_n,R_n), $S_n \to \infty$, $R_n/S_n \to \infty$, so daß

$$T(r,f) \sim A_n r^{\mu} \qquad (S_n < r < R_n)$$

b) Die Pole von $f(z)$ in $S_n < |z| < R_n$ haben "im wesentlichen" alle das gleiche Argument und

$$N(r,f) \sim A_n \cos \mu\beta r^{\mu} \qquad (S_n < r < R_n)\ .$$

c) Es gibt einen Sektor Σ_n: $\gamma_n < \varphi < \gamma_n + 2\beta$, so daß

$$\log|f(z)| < \eta(|z|)T(|z|,f)$$

für $S_n < |z| < R_n$, $z \notin \Sigma_n$, während für $S_n < r < R_n$ und $\gamma_n + \delta < \varphi < \gamma_n + 2\beta - \delta < \gamma_n + 2\beta$ $\log|f(z)|$ "im wesentlichen" größer als $k(\delta)T(r,f) > 0$ ist. Der Zusatz "im wesentlichen" besagt, daß Ausnahmemengen vorkommen können, die aber nicht zu groß sind.

F.GACKSTATTER: Über vollständige Minimalflächen von endlicher Gesamtkrümmung

Einer vollständigen Minimalfläche von endlicher Gesamtkrümmung S im E^3 kann man zuordnen eine meromorphe Funktion g und ein gewöhnliches Differential $f\,d\zeta$, erklärt auf einer kompakten Riemannschen Fläche $\bar{\mathcal{R}}$ (nach A.Huber und R.Osserman). Zu N Punkten $\mathcal{G}_\nu \in \bar{\mathcal{R}}$ gehören Kelchstellen der Ordnung k_ν von S und es gilt

$$(*) \qquad 2G = 2p - 2 + \sum_{\nu=1}^{N} (k_\nu + 1) \; ,$$

dabei ist G die Blätterzahl von g (nach Y.W.Chen).

Es stellt sich das Umkehrproblem: Zu welchen $\bar{\mathcal{R}}$, g, $\mathcal{G}_\nu$, k_ν mit (*) gehört ein S ?

Durch Betrachtung von Freiheitsgraden (man hat ein Gleichungssystem und muß Nebenbedingungen erfüllen) erhält man den

Satz: Geg. $\bar{\mathcal{R}}$ mit $p = 0$, g bel.; $\mathcal{G}_1$ $(N = 1)$ bel. $\Rightarrow$ $\exists$ S .

Allgemein hängt die Umkehrbarkeit vom Rang des genannten Gleichungssystems ab. Es besteht eine Verwandtschaft zum Beweis des Satzes von Riemann-Roch.

G.HALÁSZ: Zufällige Polynome

ε_k $(k = 1,2,\dots)$ nehme unabhängig die Werte +1 und -1 mit Wahrscheinlichkeit je $\frac{1}{2}$ an, und es sei $p_n(\delta) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \cos k\delta$.

Salem und Zygmund haben gefunden

$$\frac{1}{2\sqrt{G}} \leq \lim \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \frac{\max\limits_{0\leq\delta\leq 2\pi} |p_n(\delta)|}{\sqrt{n \log n}} \leq 1$$

mit Wahrscheinlichkeit 1. Auf ihre Frage über die Existenz eines Grenzwertes wird eine positive Antwort gegeben:

$$\max_{0\leq\delta\leq 2\pi} |p_n(\delta)| = \sqrt{n \log n} + O\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}} \log \log n\right)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 (identisches Ergebnis für $\max\limits_{|z|=1} |\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z^k|$.) und Verschärfungs-, sowie Anwendungsmöglichkeiten werden angedeutet.

A.HUBER: Langsam wachsende subharmonische Funktionen

Bericht über Resultate, welche zum Teil gemeinsam mit M.Essén (noch unveröffentlicht), zum Teil gemeinsam mit M.Arsove (Indiana Math.J. 22 (1973), 1191-1199) erarbeitet wurden. Die wichtigsten unter ihnen ergänzen - und in gewissen Fällen verschärfen - Sätze aus der in diesem Gebiet grundlegenden Arbeit von W.Hayman (Comment.Math.Helv. 34 (1960), 75-84).

J.A.HUMMEL: Bounded univalent Functions

In "Inequalities of Grunsky Type for Aharonov Pairs", J.d'Analyse Math., 25 (1972) pp. 217-257, the writer obtained inequalities for bounded univalent functions $F(z) = a_1z+a_2z^2+\ldots$ in $U = \{z: |z| < 1\}$

$$2|\lambda|^2\log|a_1| + 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}C_0^t y + \|\lambda C_0 - Ax + Cy\|^2 + \|A^t y\|^2 \le \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Here x,y are any ℓ^2 vectors, λ any complex constant and C_0,C,A are vectors and matrices associated with F.

The known bounds $\left|\frac{a_2}{a_1}\right| \le 2(1-|a_1|)$ and $\left|\frac{a_3}{a_1}\right| \le (1-|a_1|^2)$ $(|a_1| > \frac{1}{e})$ are simply proved from these, but the first requires $F^{1/2}(z^2)$ to be used.

Let $f(z) = z+b_2z^2+\ldots$ be univalent in U. Suppose w_0 is such that $\{tw_0: t \ge 1\} \subset \mathbb{C}-f(U)$. Then letting $w_0 = -\frac{1}{4a_1}$, $f(z) = \frac{F(z)}{a_1(1-F(z))^2}$, F will be bounded and univalent. Let $\log\frac{F(z)}{z} = \sum c_nz^n$, then one proves

$$\sum_{n=1}^{N} n|c_n|^2 \le 4(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{N}) + 2\log 4|w_0| .$$

This holds in particular if f is starlike and w_0 is the point of $\partial f(U)$ closest to the origin.

A.HYLLENGREN: Nearly everywhere and almost everywhere

If f is bounded and analytic in the open unit disc, then the behaviour of f along $\arg z = \text{const.}$ is nice in some sense for almost all values of that const., and the behaviour of f is nice in some other sense for nearly all values of the const.. Almost means that there can be an exceptional set of measure zero. Nearly means that there can be an exceptional set of first category.

This kind of similar results in the same direction, Collingwood called duality.

There also exists examples where two results go in different directions.

If f is an entire function, then the lower order of f(z)exp(az) is at least one for almost all a , but for given a the same lower order is zero for nearly all f . (The topology is uniform convergence on compacts.)

J.A.JENKINS: The method of simple coverings

The method of the extremal metric was originally formulated as a method in the theory of conformal mapping. However I have developed two methods by which it can be applied to general regular functions. One of them, the method of simple coverings, was first formulated in my paper "Some results related to extremal length", Annals of Mathematics Studies, No.30, 1953, pp. 87-94. I have recently returned to this method and used it to solve a problem posed many years ago by R.Nevanlinna in his book "Eindeutige analytische Funktionen". Further in joint work with Nobuyuki Suita it has been used to generalize the so-called "annulus theorem" which deals with module conditions characterizing the regular mapping of one doubly-connected domain into another.

S.KELLER: Die Existenz einer Greenschen Funktion auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Eine vollständige einfachzusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Dimension n und der Schnittkrümmung K besitzt eine Greensche Funktion

1) im Fall $n \geq 3$, wenn K nirgends positiv ist
2) im Fall $n = 2$, wenn überall $K \leq c < 0$ (c eine Konstante) ist.

Es werden die geometrischen Ideen zur Herleitung dieses Resultats dargestellt. Dabei ergibt sich als Nebenresultat eine einfache isoperimetrische Ungleichung für vollständige einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit strikt negativer Schnittkrümmung.

O.KNAB: <u>Lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten</u>

Gegeben ist die Differentialgleichung mit Polynomkoeffizienten

$$a_n(z)w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n)} + \ldots + a_o(z)w = 0 ,$$

wobei $a_n(z) \not\equiv$ const. ist. Die in $|z| < \infty$ gelegenen Singularitäten seien Stellen der Bestimmtheit und $z = \infty$ Stelle der Unbestimmtheit.
Mit Hilfe des lokalen Zentralindex [G.Frank, manus.math.6(1972)] wird gezeigt, daß die Lösungen in $0 < \arg z < 2\pi$ vom Mitteltypus einer endlichen, positiven und rationalen Wachstumsordnung sind. Die möglichen Wachstumsordnungen können dem Puiseux-Diagramm der DGL. [J.Nikolaus, Archiv d.Math., Vol.XVIII(1967)] entnommen werden.
Aus der Kenntnis des lokalen Zentralindex und der Wachstumsordnung ergeben sich Abschätzungen der c-Stellenanzahl der Lösungen in Kreisscheiben, die keine Singularitäten und keine Punkte der positiven reellen Achse enthalten. Insbesondere werden Kreisradien so angegeben, daß beschränkte Werteverteilung vorliegt.

A.J.LOHWATER: <u>Fatou values of analytic functions</u>

An example is given of an inner function (f(z) analytic, $|f| < 1$ in $|z| < 1$, $\lim\limits_{r\to 1} |f(re^{i\theta})| = 1$ almost everywhere) where every value ω, $|\omega| \leq 1$, is a radial limit only on a set of first category on $|\omega| = 1$. It is then shown that every inner function has this property. Every inner function also has the property that the cluster set of f at each point $e^{i\theta}$ of $|z| = 1$ is either a single point $e^{i\lambda}$ of modulus 1 or else is the closed disc $\{|\omega| \leq 1\}$. However, if $|f| < 1$ in $|z| < 1$ and if $C(f(z), e^{i\theta})$ is either $e^{i\lambda}$ or $\{|\omega| \leq 1\}$, $f(z)$ need not be an inner function, and an example is exhibited.

It is shown that, for a holomorphic function $f(z)$ in $|z| < 1$, if the set of points $e^{i\theta}$ where $C(fe^{i\theta})$ consists of a single point is open and if ω_o is any complex number (including ∞), then the set of points on $|z| = 1$ where ω_o is a Fatou value is of first category. In particular, the conclusion holds if the set of Plessner points is dense on $|z| = 1$.

H.H.MARTENS: Remarks on the vanishing of Theta-nulls

The significance of vanishing even theta-nulls and their relation to hyperelliptic Riemann surfaces and splitting Abelian varieties is discussed. It is shown that the Andreotti-Mayer condition for special period matrices in genus 4 defines a reducible analytic subset of the Siegel upper half plane. The talk is in part based on joint work with L.Ehrenpreis.

B.MASKIT: Nice Kleinian Groups

Several equivalent definitions for nice Kleinian groups are given, for the case that the group is a function group; i.e., the group has an invariant component of the set of discontinuity. Basically, a group G is nice if for any other Kleinian group (also a function group) G^*, and conformal map $f: \Omega(G) \to \Omega(G^*)$ (here Ω denotes the set of discontinuity) which induces a single isomorphism $f g f^{-1}: G \to G^*$, f is fractional linear, Equivalently, G is nice if, in its action on hyperbolic 3-space it has a finite-sided fundamental polyhedron.

A.OBROCK: Some remarks on Jenkins' general coefficient theorem

Teichmüller introduced a coefficient inequality between quadratic differentials and schlicht functions in 1938. Jenkins developed general and precise forms of it during the years 1950-1962. However, in his main theorem there is a question he raised as to the exact status of the special condition on the deformation degree. There are also restrictions on the normalization of the function and the connectivity of its domain of definition. Our remarks pertain to the work I have done on this problem since 1969.

E.PESCHL: Die Rolle von Differentialinvarianten bei funktionentheoretischen Abschätzungen

Im Laufe der geschichtlichen Entwicklung der Funktionentheorie spielten die Differentialinvarianten an verschiedenen Stellen eine wichtige Rolle (Schwarz, Pick, Bieberbach, Nevanlinna, Ahlfors u.a.). Neuerdings wurde ein "modifiziertes Maximumprinzip" aufgestellt, das unter wesentlicher Verwendung von Differentialinvarianten 1. und 2. Ordnung Differentialungleichungen und daraus resultierende Koeffizientenabschätzungen herzuleiten gestattet [1]. Dieses Prinzip wurde später erheblich weiterentwickelt und verallgemeinert [2],[3],[4]. Die Ausdehnung auf Differentialungleichungen unter Anwendung von Differentialinvarianten 3. Ordnung begegnet jedoch erheblichen Schwierigkeiten [5]. Um diese zu überwinden, werden verschiedene Ansätze und Gesichtspunkte systematisch untersucht: (a) die Frage nach der zweckmäßigen Auswahl der absoluten Differentialinvarianten, (b) eine Aufstellung derjenigen partiellen Differentialgleichungen, die hierbei eine besondere Rolle spielen, (c) Parameterdarstellungen für den Rand von genauen Variabilitätsbereichen 3. Ordnung für spezielle Testfamilien, (d) die Durchrechenbarkeit eines allgemeinen Ansatzes und daraus sich ergebende Forderungen [6]. Lit.: [1] E.Peschl, Rendic.Sem.Mat.Messina 1 (1955), [2] E.Peschl, Ann.Acad.Sci. Fenn. 1963, [3] E.Peschl - K.W.Bauer, Sitzber.Bayr.Akad.d.

Wiss. 1963, [4] E.Peschl, Carathéodory-Symp. Athen 1973, [5] K.J.Wirths, Diss. Bonn 1970 = Bonner Math. Schriften 51 (1971), [6] Ausführliche Darstellung als Bericht des SFB Theoretische Mathematik Bonn 1974.

A.PFLUGER: Über den Rand der Koeffizientenkörper schlichter Funktionen

Für ein festes $n > 1$ wird die Klasse S der normierten schlichten Funktionen $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ durch die Abbildung $\alpha: f \to (a_2, \ldots, a_n)$ auf den sogenannten n-ten Koeffizientenkörper V_n abgebildet. Ein f aus S heißt kanonische Schlitzabbildung (zu n), wenn $f(D)$ aus $\mathbb{C}$ durch Wegnehmen von endlich vielen stückweise analytischen Schlitzen entsteht und ein $Q(w) = \frac{A_{n-1}}{w^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{w}$ existiert, so daß $Q(w)\left(\frac{dw}{w}\right)^2 \geq 0$ ist längs $\partial f(D)$. Von dem klassischen Satz, daß $\alpha^{-1}(\partial V_n)$ mit der Klasse S_σ der kanonischen Schlitzabbildungen identisch ist und $\alpha|_{S_\sigma}$ injektiv ist, wird ein neuer Beweis skizziert, der (neben Variationsmethoden) statt des Teichmüllerprinzips nur eine Art lokaler Version davon benützt und damit eine globale Diskussion der Trajektorienstruktur von $Q(w)\left(\frac{dw}{w}\right)^2$ überflüssig macht.

W.RAAB: Hyperbolische Integraltransformationen dritter Ordnung

Mit Hilfe der sogenannten "Hyperbelfunktionen dritter Ordnung", $a(z) = (e^z + e^{\varepsilon z} + e^{\bar\varepsilon z})/3$, $c(z) = da/dz$, $b(z) = dc/dz$ ($\varepsilon = e^{2\pi i/3}$), werden für eine bestimmte Klasse von trisymmetrischen meromorphen Funktionen $f(z)$, deren Pole nicht auf der positiven reellen Achse liegen, insbesondere für die Funktion $f(z) = \Gamma(1+z)\Gamma(1+\varepsilon z)\Gamma(1+\bar\varepsilon z)$, "hyperbolische Integraltransformationen dritter Ordnung":

$$\int_0^\infty f(x)\{a(xy) - b(xy)\}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sum \operatorname{res}\{f(z)e^{zy}\} \quad \left(\frac{2\pi}{3} < \arg z < \frac{4\pi}{3}\right)$$

eingeführt. Aus der für den Kern $K(x,y) = a(xy) - b(xy)$ geltenden Symmetriebeziehung: $K(x,y) + \varepsilon K(x,\varepsilon y) + \bar{\varepsilon} K(x,\bar{\varepsilon} y) = 0$ werden "hyperbolische Fourier-Entwicklungen dritter Ordnung":

$$\sum \operatorname{res}\{f(z)c(zy)\} = 0 \qquad \left(\frac{2\pi}{3} < \arg z < \frac{4\pi}{3}\right)$$

und deren iterierte Integrale hergeleitet.

L.REICH: Über die Abschätzung der Wachstumsordnung in der Fuchsschen Theorie

Von H. von Koch und O.Perron wurden Abschätzungen für die Wachstumsordnung von Lösungen von linearen analytischen Differentialgleichungen gegeben, deren Koeffizienten sich in Umgebung eines Punktes rational verhalten, bei Annäherung an die Singularität innerhalb eines in die Singularität einmündenden Winkelraums mit endlichem Öffnungswinkel. Bieberbach übertrug diese Methode auf analoge Systeme 1. Ordnung. In vorliegendem Vortrag geht es um eine wesentliche Verbesserung der Abschätzung von Bieberbach. Die Methode besteht in folgendem: 1. Es wird die bei Perron auftretende Transformation verfeinert. 2. Zur Verbesserung der Abschätzung ist ein gewisses lineares Optimierungsproblem (auf einer konvexen Menge) möglichst explizit zu lösen. Auf offene Fragen wird eingegangen (Schärfe, Berücksichtigung der Koeffizienten des Differentialsystems, Zusammenhang mit asymptotischen Untersuchungen von Jurkat-Lutz).

H.M.REIMANN: Über die Jacobi-Determinante von quasikonformen Abbildungen

Eine reellwertige, auf $\mathbb{C}$ definierte Funktion u ist von beschränkter mittlerer Oszillation ($u \in BMO$), falls

$$\sup_{Q \subset \mathbb{C}} \fint_Q |u(z) - u_Q| \, dx\,dy = \|u\|_* < \infty .$$

Das Supremum erstreckt sich über alle Quadrate $Q \subset \mathbb{C}$;
$u_Q = \fint_Q u(z)\,dx\,dy = \frac{1}{m(Q)} \int u(z)\,dx\,dy$ ist der Mittelwert von u.

Ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine quasikonforme Abbildung mit Jacobi-Determinante J_f, so ist $\log J_f \in$ BMO. Der Raum BMO ist invariant unter quasikonformen Abbildungen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$A^{-1} \|u\|_* \leq \|u \circ f^{-1}\|_* \leq A \|u\|_*$$

sowie auch unter der Abbildung z^{-1}. Entsprechende Resultate gelten in höheren Dimensionen.

H.S.SHAPIRO: An extremal problem for schlicht functions

This is a report of joint work with Dov Aharonov. We consider, within the class of functions $f(z) = z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^n + \dots$, univalent in $|z| < 1$ and with prescribed Taylor coefficients up to order n, the problem of finding f with least Dirichlet integral. Assuming $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ are such that there is at least one competing function with finite Dirichlet integral, the existence of an extremal function is easily established. We derive some properties of the extremal functions, in particular they are bounded in $|z| < 1$. For $n = 2$ we conjecture that the extremal f maps $|z| < 1$ onto a specified domain (cardioid with a rectilinear slit) and prove that this follows from an assumption concerning the topological nature of the domain on which f maps $|z| < 1$. The area of the conjectured extremal domain is $\frac{27}{8} \pi (2 - |\alpha_2|^{-2})$.

T.SHEIL-SMALL: On polynomials with zeros on or about a circle

Let $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ be a polynomial with all its zeros on $|z| = 1$. Then for each $\lambda > 0$

$$\int_0^{2\pi} |P(e^{i\vartheta})|^\lambda d\theta \leq \left(\frac{M(P)}{2}\right)^\lambda \int_0^{2\pi} |1 + e^{i\vartheta}|^\lambda d\theta$$

where $M(P) = \max_{|z|=1} |P(z)|$. The case $\lambda = 1$ proves a conjecture of Erdös (Bull. Amer. Math. Soc. 1940). In the case of $\lambda = 2$ we get

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leq \frac{1}{2} M^2$$

which gives $|a_k| \leq \frac{1}{2}M$ if $k \neq \frac{1}{2}n$. This solves for odd n a conjecture of Clunie in Hayman's problem book. On the way to this result we prove

$$M(P') = \frac{n}{2} M(P)$$

for every self-inversive polynomial P. The middle coefficient for even n remains open, but Clunie has shown $|a_{\frac{1}{2}n}| \leq M/\sqrt{3}$.

ST.TIMMANN: Fixpunkte schlichter Funktionen

Die folgende Frage ist Spezialfall eines von Herrn Obrock 1972 in Oberwolfach vorgeschlagenen Problems:
Wie viele Fixpunkte $z_k = f(z_k)$ kann eine schlichte Funktion $f\colon EK \to \mathbb{C}$, $f \not\equiv z$, besitzen ?
Doppel, Köditz und Timmann (Hannover) zeigten

1) Es gibt keine schlichte Funktion $f \not\equiv z$, deren Fixpunkte sich gegen jeden Punkt des Einheitskreisrandes häufen.

2) Sei E abgeschlossene Menge auf dem Einheitskreisrand. Sei $k_n(\varepsilon)$ die minimale Anzahl von Kreisen $K(\zeta_j, n^{-(1+\varepsilon)})$ mit Mittelpunkt $\zeta_j \in E$ und Radius $n^{-(1+\varepsilon)}$, die E überdecken. Für ein $\varepsilon > 0$ gelte $K_n(\varepsilon)/n \to 0$ für $n \to \infty$. (E kann positive Kapazität haben.) Dann gibt es schlichte Funktionen $f \not\equiv z$, deren Fixpunkte sich gegen jeden Punkt von E häufen.

Das Resultat 2) verschärft Ergebnisse von Hornich und Zinterhof. In der Diskussion verwies Herr Shapiro auf eine Arbeit von Caughran (MR 40 # 5868). Mit Hilfe eines Resultats aus dieser Arbeit kann man zu beliebiger Carleson-Menge E eine schlichte Funktion $f \not\equiv z$ konstruieren, deren Fixpunkte sich gegen jeden Punkt von E häufen.

J.WINKLER: Über meromorphe Funktionen, die außerhalb kleiner Punktmengen groß sind

Behandelt wurde die folgende Frage: In der komplexen Ebene sei eine Folge von Kreisscheiben $|z - a_\gamma| < r_\gamma$ vorgegeben. Existiert dann stets eine nicht rationale ganze Funktion $f(z)$, für die im Komplement der Vereinigung dieser Kreisscheiben $|f(z)| \geq 1$ gilt ?

Es wurde erläutert, daß diese Frage mindestens dann mit "Nein" zu beantworten ist, wenn (unabhängig von den a_γ) die Folge der r_γ hinreichend schnell gegen Null konvergiert (z.B. $\sum (\log|\log r_\gamma|)^{-1} < \infty$ gilt).

D.WRASE: Zur Analytischen Kapazität

$E \subset \mathbb{C}$ sei beschränkt und abgeschlossen, ferner sei G das Außengebiet zu E und $B_0(E) = \{ \varphi \mid \varphi$ holomorph in G, $\varphi(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$ bei $\infty\}$.

Dann nennt man $\gamma(E) = \max\limits_{\varphi \in B_0(E)} |a_1|$ die analytische Kapazität von E. Besteht E aus endlich vielen disjunkten analytischen Jordankurven, so existiert eine in G holomorphe Funktion $\psi(z) = 1 + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$ die GARABEDIAN-Funktion, mit $\gamma(E) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial G} |\psi(z)|ds$, wobei ds das Bogenelement von ∂G bezeichnet.

Eine Untersuchung des Integrals der Garabedian-Funktion ergibt:

1.) Besteht die Menge E aus abzählbar vielen Kontinuen E_ν von denen ein jedes symmetrisch zur reellen Achse ist, dann gilt $\gamma(E) = \min\limits_{f \in S(E)} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial G} |f'(z)|ds$, mit $S(E) = \{f \mid f(z) = z + a_0 + \ldots$ schlicht meromorph in G$\}$.

2.) Ist C eine differenzierbare Kurve und $E \subset C$, so gilt $\gamma(E) = 0$ genau dann, wenn das lineare Maß von E gleich Null ist.

E. Mues (Karlsruhe)