MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

# T a g u n g s b e r i c h t 12 / 1974

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

17.3. - 23.3.1974

Nach einer zweijährigen Pause fand unter der Leitung von H.W. Knobloch (Würzburg) und R. Reißig (Bochum) die vierte Tagung über gewöhnliche Differentialgleichungen statt. Unter den Teilnehmern befanden sich wiederum namhafte ausländische Fachkollegen. Daß die dargebotenen Vorträge originell und teilweise von beachtlichem wissenschaftlichen Niveau waren, verdankt man aber nicht allein der regen internationalen Beteiligung, sondern auch der wachsenden Aktivität deutscher angewandter Mathematiker auf dem Gebiet der Differentialgleichungen. Dies ist um so mehr hervorzuheben, als die Forschung im Bereich der "Angewandten Analysis" in Deutschland nach wie vor vernachlässigt wird und einem internationalen Vergleich nicht standhält. Zweifellos haben die Oberwolfacher Tagungen dazu beigetragen, das Interesse an Problemen im Zusammenhang mit Differentialgleichungen zu verstärken, und es empfiehlt sich, auch weiterhin regelmäßig solche Tagungen durchzuführen, wobei zunächst noch an einem zweijährigen Turnus festgehalten werden sollte. Das Programm der diesjährigen Tagung läßt sich mit den Stichworten "Allgemeine Theorie - Kontrollprobleme - Periodische Lösungen und andere Randwertaufgaben - Stabilität - Lineare Differentialgleichungen im Reellen und im Komplexen - Konstruktionsverfahren" umreißen. Da ein erheblicher Teil der Vorträge der Anwendung von Fixpunktsätzen zum Nachweis von periodischen Lösungen spezieller nicht-autonomer Systeme gewidmet war, gab zum Schluß der Tagung K. Schmitt (z.Zt. Karlsruhe) einen Überblick über die Theorie des topologischen Abbildungsgrades

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

in endlich-dimensionalen Räumen sowie - darauf aufbauend - im Banach-Raum (Fixpunktsatz von Brouwer und von Leray-Schauder). Dieser Übersichtsvortrag gab eine ausgezeichnete Darstellung der Theorie und ihrer Anwendungsmöglichkeiten und war daher für alle Tagungsteilnehmer von besonderem Interesse.

Herrn Prof.Dr.M. Barner, Direktor des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach, und seinen Mitarbeitern gebührt der Dank der Tagungsleiter und -teilnehmer für die ausgezeichnete Organisation - auch unter den Erschwernissen der noch nicht beendeten Bautätigkeit - . Dadurch waren die Voraussetzungen für einen erfolgreichen Tagungsablauf gegeben. Anschließend wurde wiederum die Tagung auf dem eng benachbarten Gebiet "Regelungstheorie" durchgeführt. Selbstverständlich war der Durchschnitt der beiden Teilnehmermengen wie auch der Referentenmengen nicht-leer.

## Teilnehmer

J. Bebernes (Boulder/USA)
R. Conti (Firenze/Italien)
W. Eberhard (Marburg)
M. Essén (Stockholm/Schweden)
M. Giertz (Stockholm/Schweden)
W. Hahn (Bochum)
W. Hahn (Graz/Österreich)
A. Haimovici (Iasi/Rumänien)
W. Haußmann (Bochum)
E. Heil (Darmstadt)
H. Herold (Würzburg)
H. Jeggle (Berlin)
F. Kappel (Würzburg)
A.G. Kartsatos (Tampa/USA)
U. Kirchgraber (Zürich/Schweiz)
H.W. Knobloch (Würzburg)
H. Knolle (Bochum)
B. Laloux (Louvain/Belgien)
M. Laloy (Louvain/Belgien)
R. Mannshardt (Bochum)
M. Mikolás (Budapest/Ungarn)
R. Rautmann (Hamburg)
L. Reich (Graz/Österreich)
G. Reißig (Bochum)
R. Reißig (Bochum)
E. Roxin (z.Zt.Würzburg)
P. Sagirow (Stuttgart)
K. Schmitt (z.Zt.Karlsruhe)
U. Staude (Mainz)
K. Szilárd (Budapest/Ungarn)
M. Thoma (Hannover)
I. Troch (Wien/Österreich)
P. Volkmann (Karlsruhe)
J. Werner (Göttingen)

## Vortragsauszüge

### J.W. BEBERNES : Periodic Boundary Value Problems

Two methods for considering periodic boundary value problems (PBVP) are discussed. The first is based on a simple alternative theorem using Leray-Schauder degree. The second is based on subfunction theory, the classical Landau inequality, and the coincidence degree of Mawhin.

Let $I = [0,1]$, $D \subset I \times R^n \times R^n$ open and bounded with $\{(t,0,0): t \in I\} \subset D$. Consider, for $f: I \times R^n \times R^n \longrightarrow R^n$ continuous,

$$(1_\lambda) \qquad x'' = \lambda f(t,x,x') + (1-\lambda)\, x \,,$$

$$(2) \qquad x(0) = x(1) \;,\; x'(0) = x'(1) \,.$$

THEOREM. If for all $\lambda \in (0,1]$, every solution $x_\lambda(t)$ of $(1_\lambda)$-(2) has trajectory in D for $t \in I$, then PBVP $(1_0)$-(2) has at least one solution $x_0(t)$ with $(t,x(t),x'(t)) \in D$ for all $t \in I$. - This simple alternative theorem can be used to treat a number of periodic boundary value problems for second order systems.

Another PBVP considered is

$$(3) \qquad x''' = f(t,x,x',x'') \;,$$
$$f: I \times R \times R \times R \longrightarrow R \text{ continuous},$$

$$(4) \qquad x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1) \;,\; i = 0,1,2.$$

THEOREM. If

a) there exists $\psi: R \times R \longrightarrow [0,\infty)$ such that $f(t,x,x',x'') \geq -\psi(x',x'')$ where

$$(5) \qquad z'' = -\psi(z,z') \,,\; z(t_1) = z_1 \,,\; z(t_2) = z_2 \;\; (|t_1-t_2| \leq 1)$$

has at most one solution and IVP's for (5) extend to I;

b) $\exists\, R > 0 \ni f(t,x,x',0) \neq 0,\ |x| \geq R$;

c) $\exists\, \varphi: [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty) \ni$

$$\lim_{s+t \to \infty} (s^3+t^{3/2})/\varphi(s,t) = +\infty \text{ and } |f| \leq \varphi(|x'|,|x''|);$$

d) $\int_0^1 f(t,R_0,0,0)dt \cdot \int_0^1 f(t,-R_0,0,0)dt < 0$ where

$$R_0 = R + \int_0^1 z(t;0,1)dt \,,$$

then PBVP (3)-(4) has at least one solution.

R. CONTI : On Normal Control Processes

We consider a control process described by an ordinary differential equation

$$\frac{dx}{dt} - A(t)\,x = B(t)\,u(t)$$

where t is a real variable on a compact interval $I = [\tau, T]$, $x = x(t)$ is a real n-vector, $u(t)$ a real m-vector, and $A(t)$, $B(t)$ are real matrices of type $n \times n$, $n \times m$ respectively. The functions $t \longrightarrow A(t)$ and $t \longrightarrow B(t)\,u(t)$ are measurable and L-integrable on I.

Let $B_{p',r'}$ denote the unit ball of the Banach space $L^{p'}(I, l_m^{r'})$ $1 < p' \leqq +\infty$, $1 \leqq r' \leqq +\infty$. The notion of normal control process is known in the literature when the set of controls is the unit ball $B_{\infty,\infty}$; such a notion can be extended to more general sets of controls, in particular to $B_{p',r'}$. According to different values of p', r' we obtain six different types of normal processes, one of which is the classical one. The types reduce to three for constant matrices A and B. A characterization of each can be given in terms of A and B, via (any) fundamental solution matrix of

$$\frac{dx}{dt} - A(t)\,x = 0$$

or directly when A and B are constant. The relationships among the various types can be established and the normality with respect to $B_{\infty,\infty}$ and to $B_{\infty,1}$ turn to be the strongest.

The results in detail will appear in Journal of Optimization Theory and Applications.

W. EBERHARD : Über eine Klasse von nicht-selbstadjungierten Rand-Eigenwertproblemen

Es wird ein im allgemeinen nicht-selbstadjungiertes Eigenwertproblem $M\,y = \lambda\,N\,y$ untersucht mit linearen Differentialoperatoren M , N über dem Intervall $[0,1]$. Über die asymptotische Abschätzung eines Fundamentalsystems der zugrundeliegenden Differentialgleichung $m(y) = \lambda\,n(y)$ mit

$$m(y) = y^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)\,y^{(n-\nu)}, \quad n(y) = y^{(p)} + \sum_{\varrho=1}^{p} g_\varrho(x)\,y^{(p-\varrho)}$$

im Raum $C^m$ der komplexwertigen Vektorfunktionen wird eine Theorie von "N-regulären" Eigenwertproblemen entwickelt, die eine Verallgemeinerung der Birkhoff-Stoneschen Sätze über "reguläre" Eigenwertprobleme darstellt. Für N = I (Einheitsoperator) enthält sie diese Sätze als Spezialfälle. Das Verhalten der Greenschen Matrix sowie die asymptotische Verteilung der Eigenwerte können explizit beschrieben werden. Außerdem werden die Entwicklungssätze diskutiert und eine Teilklasse N-regulärer Rand-Eigenwertprobleme angegeben, für die der Äquikonvergenzsatz gilt, wonach die Entwicklung einer summierbaren Funktion nach den Eigenfunktionen eines N-regulären Problems das gleiche lokale Konvergenz- und Summierbarkeitsverhalten aufweist wie die gewöhnliche trigonometrische Fourier-Entwicklung. An Hand eines Gegenbeispiels wird gezeigt, daß für die restliche Klasse N-regulärer Probleme der Äquikonvergenzsatz im allgemeinen nicht mehr gilt.

M. ESSÉN : A Differential Inequality with Applications to Subharmonic Functions

Theorem 1: Let $p\colon (-\infty, 0] \longrightarrow [0,\infty)$ be a lower semicontinuous function which is locally bounded. Assume that there exists a solution of the inequality

$$(1)\qquad \Phi''(t) - p^2(t)\,\Phi(t) \geq 0\,,\ -\infty < t \leq 0\,,$$

$$\Phi(0) = 1\,,\quad \lim_{t\to-\infty} \Phi(t) \text{ exists.}$$

Let $t_0$ be given, $t_0 < 0$.

If $\inf\limits_t p(t) > 0$, there exists a nonnegative solution $\Psi$ of the equation

$$(2)\qquad \Psi''(t) - (p^*(t))^2\,\Psi(t) = 0\,,$$

$$\Psi(0) = 1\,,\ \Psi(-\infty) = 0\,,$$

such that

$$(3)\qquad \Phi(t_0) < \Psi(t_0)\,.$$

Here $p^*$ is a measure preserving, nondecreasing rearrangement of $p|_{[t_0,0]}$ on $[t_0,0]$ and $p^*(t) = \inf\limits_{s<0} p(s)$, $t < t_0$.

If $\inf_s p(s) = 0$, the statement (2) above will still be true except that the conclusion $\Psi(-\infty) = 0$ is replaced by $\Psi(t) = \Psi(t_o)$, $t < t_o$.

Remark 1: There is a short elementary proof if $\inf_s p(s) > 0$. If $\inf_s p(s) = 0$, a more complicated argument is necessary.

It is fairly easy to obtain an estimate of $\Psi(t_o)$. Inequality (3) gives us an estimate of $\Phi(t_o)$.

Applications:

1. The Beurling - Lewis projection theorem
2. Density theorems for meromorphic functions
3. Estimates of harmonic measures in $R^n$, $n \geq 2$ using Carleman means and certain new results of A. Baernstein and Chr. Borell.

M. GIERTZ : Properties of powers of certain Schrödinger operators

This lecture reports on joint work with Professor W.N. Everitt concerning powers of differential expressions $M[f] = -f'' + qf$ acting on functions in $L^2 = L^2(0,\infty)$. Here $q: [0,\infty) \longrightarrow R$ is such that $q^{(2n-3)} \in AC_{loc}[0,\infty)$ for some integer $n \geq 2$, so that $M^n[\cdot]$ exists as a differential expression. With

$$D_n(q) = \{ f \in L^2 : f^{(2n-1)} \in AC_{loc}[0,\infty) \text{ and } M^n[f] \in L^2 \}$$

we consider the following two questions:

Question of partial separation:
Under what conditions on q is it true that $f \in D_n(q)$ implies that $M^r[f] \in L^2$ for $r = 1,2,\dots,n-1$?

Question of complete separation:
When is it true that whenever f is in $D_n(q)$ then each term in the expansion

$$M^n[f] = \sum_{k=0}^{2n} a_{nk} f^{(k)}$$

is in $L^2$?

It turns out that $M^n[\cdot]$ is partially separated if and only if the equation $M^n[f] = \lambda f$ has exactly n linearly independent $L^2$-solutions for each non-real $\lambda$. This happens when there exist positive numbers k and $x_o$ such that $q(x) \geqq k > 0$ $(x > x_o)$ and $q^{-1/4}(q^{-1/4})''$ is in $L(x_o, \infty)$, and also whenever $q + k \in L(0,\infty)$ for some real k. Complete separation requires conditions on higher derivatives of q of the form $|q^{(k)}| \leqq c_k |q|^{1+k/2}$ $(k = 2,3,\ldots,2n-2)$.

A. HAIMOVICI : Über das Verhalten der Lösungen von Differentialgleichungssystemen mit Mengenfunktionen als Unbekannten

1. Man betrachtet das System

$$(1) \qquad \frac{d\varphi_i}{d\mu}(x) = F_i(x, \varphi(E_x)) ,$$
$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q) , \quad i = 1,2,\ldots,q ,$$

wo x ein Punkt in einem Gebiet $\Omega \subset R^n$ ist ,
$\mu$ das Lebesgue-Maß darstellt,
$\varphi_i$ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ definierte additive Mengenfunktionen sind,
E eine Abbildung $\Omega \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ bedeutet,
$F_i : \Omega \times R^q \longrightarrow R^q$ stetig sind und bezüglich $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ einer Lipschitz-Bedingung genügen.

Die Existenz der Lösung von (1) beweist man, indem man (1) in ein Integralgleichungssystem - mittels des Radon-Nikodymschen Satzes - überführt:

$$\varphi_i(E_x) = \nu_i(E_x \cap H) + \int_{E_x} F_i(y, \varphi(E_y))\, d\mu_y$$

($\nu$ ist ein singuläres Maß mit H als Träger).

2. Man betrachtet das lineare System

$$(2) \qquad \frac{d\varphi_i}{d\mu}(x) = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\varphi_j(E_x) ,$$

das die kanonische Form hat:

$$(3) \qquad \frac{d\psi_1}{d\mu}(x) = \lambda_1 \psi_1(E_x) , \quad \frac{d\psi_2}{d\mu}(x) = \lambda_1 \psi_1(E_x) + \psi_2(E_x) , \ldots$$

Ist das singuläre Maß durch eine Maßverteilung $\nu_i$ auf H gegeben, so kann man die Lösung von (3) als

$$\psi_1(E_x) = \int_H w(\lambda_1,x,x_o)\, d\nu_{1x_o} ,$$

$$\psi_2(E_x) = \int_H \{ w(\lambda_1,x,x_o)\, d\nu_{2x_o} + w_2(\lambda_1,x,x_o)\, d\nu_{1x_o} \}$$

. . .

schreiben, wobei

$$w(\lambda_1,x,x_o) = \chi_{E_x}(x_o) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1{}^k \mu_k(x,x_o) ,$$

$$w_s(\lambda_1,x,x_o) = \sum_{t=s-1}^{\infty} \binom{t}{s-1} \lambda_1{}^{t-s+1} \mu_{t-s+1}(x,x_o) ;$$

$$\mu_1(x,x_o) = \int_{E_x} \chi_{E_y}(x_o)\, d\mu_y , \quad \mu_k(x,x_o) = \int_{E_x} \mu_{k-1}(y,x_o)\, d\mu_y .$$

Sind die Funktionen $w_s$ beschränkt, so kann man die $\nu_i$ so wählen, daß $\|\psi\| < \varepsilon$ ; sind sie nicht beschränkt, so kann man eine Funktion $\omega(\lambda,x)$ als Lösung der Gleichung

$$\omega(\lambda,x) = 1 + \lambda \int_{E_x} \omega(\lambda,y)\, d\mu_y$$

finden, so daß

$$\frac{\|\psi\|}{\omega(1+\Lambda,x)} < \varepsilon \quad (\Lambda > |\lambda_1|).$$

3. Schließlich betrachtet man das System

$$\text{(4)} \qquad \frac{d\varphi_i}{d\mu}(x) = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, \varphi_j(E_x) + g_i(x,\varphi(E_x)).$$

Das Verhalten der Lösungen ist das gleiche wie beim System (2), wenn

$$|g_i| \leq A(x)\, \|\varphi\|^{1+\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

und

$$\int_{E_x} A(x) [\omega(1+\Lambda,x)]^{\alpha}\, dx < +\infty .$$

E. HEIL : <u>Eigenwertabschätzungen für die Hill'sche Differentialgleichung</u>

Gegeben sei die Differentialgleichung $x'' + \lambda\, p(t)\, x = 0$ , $p(t+T) \equiv p(t)$. Ist $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ eine Lösungskurve (durch ein Fundamentalsystem bestimmt), so läßt sich $\lambda\int_0^T p(t)dt$ als Flächeninhalt der polar-reziproken Kurve interpretieren. Auf Grund dieser geometrischen Deutung lassen sich untere Abschätzungen für die $\lambda$-Werte in den Stabilitätsintervallen sowie für die Eigenwerte angeben, die teils bekannt, teils neu sind. Sind $0 < \lambda_1 \leqq \Lambda_1 < \lambda_2 \leqq \Lambda_2 < \ldots$ die Eigenwerte, so erhält man für $p \geqq 0$

$$\lambda_n \geqq \frac{n^2}{4T\int_0^T p\,dt}, \quad \Lambda_n \geqq \frac{(n+1)^2}{4T\int_0^T p\,dt} \cos^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right).$$

Die Abschätzungen für $\lambda_n$ wurden von Žukovskii und Liapunov (für $n = 1$) und von Rapoport auf anderem Wege gefunden. Die Abschätzungen für $\Lambda_n$ wurden im Koexistenzfall ($\lambda_n = \Lambda_n$) schon von Guggenheimer angegeben. Entsprechend den Verallgemeinerungen des Ljapunovschen Stabilitätskriteriums für Funktionen p, die auch negative Werte annehmen, kann man vermuten, daß die obigen Abschätzungen in diesem Fall auch gelten, sofern man $\int p\,dt$ durch $\int |p|\,dt$ oder sogar durch $\int p_+\,dt$ ersetzt. - Nach oben läßt sich nur $\lambda_1$ abschätzen.

H. HEROLD : <u>Verallgemeinerung einer Ungleichung von Hardy-Littlewood</u>

Es wird die folgende Integralungleichung hergeleitet:
Sei $I = [a,b]$, $m \in N$ und $V = \{u \mid u \in C^m(I);\ u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0,\ i = 0,\ldots,m-1\}$. Dann gilt für jedes $u \in V$

$$\int_I u^{(m)2}(x)\,dx \geqq (2m)!\int_I \frac{u^2(x)}{(x-a)^m(b-x)^m}\,dx ,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur im Fall $u(x) = (x-a)^m(b-x)^m \cdot$ const. steht.
Der Fall $m = 1$ wurde von Hardy-Littlewood, der Fall $m = 2$ von Beesack behandelt.
Die Integralungleichung wird zur Gewinnung von Aussagen über die Nullstellen der Lösungen linearer Differentialgleichungen herangezogen.

F. KAPPEL : Ein algebraisches Stabilitätskriterium für autonome lineare Funktional-Differentialgleichungen

Gegeben sei das System von linearen autonomen Funktional-Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} [d\eta(\theta)] \; x(t+\theta) \; ,$$

wobei $\eta(.)$ eine $n\times n$-Matrix von endlicher Variation auf $[-h,0]$ ist. Die charakteristische Matrix von (1) ist

$$\Delta(\lambda) = \lambda E - \int_{-h}^{0} e^{\lambda\theta} \, d\eta(\theta) \; .$$

Die allgemeine Theorie für Systeme vom Typ (1) wurde von J.K. Hale entwickelt; sie stützt sich auf die Theorie der Transformationshalbgruppen. Die Wirkung der durch die Lösungen von (1) definierten Transformationshalbgruppe auf den zum Eigenwert $\lambda$ des entsprechenden infinitesimalen Generators gehörigen (endlich-dimensionalen) Eigenraum beschreibe die Matrix $B_\lambda$. Deren Jordan-Normalform wird angegeben. Daran anknüpfend wird das folgende Stabilitätskriterium bewiesen:
Die Ruhelage $x(t) \equiv 0$ von (1) ist genau dann stabil, wenn

1. sämtliche Wurzeln von $\mathrm{Det}\,\Delta(\lambda) = 0$ nicht-positiven Realteil haben;

2. für Wurzeln $\lambda_0$ mit $\mathrm{Re}\,\lambda_0 = 0$ und der Vielfachheit $m$ entweder

$$m < n \quad \text{und} \quad \mathrm{Rang}\,\Delta(\lambda_0) = n - m$$

oder

$$m = n \quad \text{und} \quad \Delta(\lambda_0) = 0 \; , \; \mathrm{Rang}\,\Delta'(\lambda_0) = n \quad \left(' = \frac{d}{d\lambda}\right)$$

gilt.

An Stelle der Bedingung 2. hatte man bisher die Forderung

" $\mathop{\mathrm{Res}}_{\lambda=\lambda_0} [e^{\lambda t}\Delta^{-1}(\lambda)]$ ist beschränkt für $t \longrightarrow \infty$ " .

**A.G. KARTSATOS** : On certain Boundary Value Problems on Infinite Intervals

Boundary value problems of the form

$$(1) \qquad \begin{cases} x' + A(t)\,x = f(t,x) \\ T\,x = r \end{cases}$$

are studied where A is an $n \times n$ continuous matrix on $[0,\infty)$, f is an n-vector continuous on $[0,\infty) \times R^n$, T is a (possibly) unbounded operator on a space of continuous and bounded functions defined on $[0,\infty)$ and r is a fixed vector in $R^n$. Existence methods are based on suitable applications of fixed point theorems, or of the theorem of Hildebrandt and Graves concerning the local invertibility of Fréchet differentiable mappings. Dependence of solutions on $A(t)$ , T is also studied in the case of a bounded linear T as well as extensions to heavily nonlinear problems of the form

$$(2) \qquad \begin{cases} x' + A(t,x) = f(t,x) \\ T\,x = M\,x \quad . \end{cases}$$

U. KIRCHGRABER : Mittelwertmethode mittels Lie-Reihen

Es bezeichne $x(t)$ die Lösung des Problems $\dot{x} = F^o(x) + \varepsilon\, F^1(x)$, $x(0) = x_o$, wobei $\varepsilon$ ein kleiner Parameter sei. Gesucht wird eine Näherungslösung $x_N(t)$ für $x(t)$.
Das Differentialgleichungssystem sei in einem beschränkten Gebiet $G \subset R^n$ definiert. Es bezeichne $C_o^\infty(G)$ die Klasse der beliebig oft differenzierbaren Funktionen, die in G definiert sind, Werte in $R^n$ haben und beschränkt sind samt ihren Ableitungen. Es seien $F^o$, $F^1$, $u^1$, ... , $u^N$ , $\bar{F}^1$, ... , $\bar{F}^N$ $(N \in \mathbb{N})$ in $C_o^\infty(G)$, und es möge in G folgendes Gleichungssystem erfüllt sein:

$$\sum_{r=0}^{i} \frac{1}{r!} \sum_{\substack{j_o+j_1+\dots+j_r=i \\ (j_o=0,1;\ j_s \in \mathbb{N})}} (F^{j_o} \times u^{j_1}) \times \dots ) \times u^{j_r} + F^i = \bar{F}^i$$

$i = 1, 2, \dots, N$ .

Dabei bedeutet:

$$F \circ G = \frac{\partial F}{\partial x} G \ , \quad F \times G = F \circ G - G \circ F \ .$$

Weiter sei:

$$U_N^{(\sigma)}(x) = x + \sum_{s=1}^{N} \varepsilon^s \sum_{r=1}^{N} \frac{(\sigma)^r}{r!} \sum_{j_1+\dots+j_r=s} (u^{j_1} \circ u^{j_2}) \circ \dots ) \circ u^{j_r} .$$

Es bezeichne $\varphi(t,z)$ die Lösung des Problems

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$\dot{y} = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i F^i(y) \ , \ y(0) = z \ .$$

Nun definieren wir die Approximation:

$$x_N(t) = U_N^{(1)}(\varphi(t,z_o)) \text{ mit } z_o = U_N^{-1}(x_o) \ .$$

Es gilt folgender Approximationssatz:

Es seien $T(\varepsilon)$, $\varrho(\varepsilon)$ auf $(0,\varepsilon_o)$ vorgegebene positive Funktionen.

Es ist $G'$ ein gewisses explizit angebbares Teilgebiet von $G$.

Es sind $Q(\varepsilon)$ und $M_i(\varepsilon)$, $i=1,2,3$, gewisse über $(0,\varepsilon_o)$ stetige, positive, explizit angebbare Funktionen.

Über $(0,\infty) \times (0,\varepsilon_o)$ sei eine stetige, positive, in s monoton wachsende Funktion $\omega(s,\varepsilon)$ definiert mit der Eigenschaft

$$\| \varphi(t,z_1) - \varphi(t,z_2) \| \leq \omega(|t|,\varepsilon) \| z_1 - z_2 \|$$
$$\text{für } (t,z_i) \in (-T,T) \times G' \ .$$

Es gelte

$$\{ x \mid \| x - \varphi(t,z) \| \leq \varrho \ , \ t \in [0,T), \| z - z_o \| \leq \varepsilon^{N+1} M_3 \} \subset$$
$$\subset G' \ .$$

Schließlich sei $T^*(\varepsilon) < T(\varepsilon)$ so bestimmt, daß

$$M_1 \ \varepsilon^{N+1} \omega(T^*,\varepsilon) \int_0^{T^*} \omega(s,\varepsilon) \, ds \leq \varrho \ .$$

Dann ist

a) $x(t)$ definiert auf $[0,T^*)$

und

b) $\| x(t) - x_N(t) \| \leq \{ \omega(t,\varepsilon) Q(\varepsilon) [M_1 \int_0^t \omega(s,\varepsilon) ds + M_3] + M_2 \} \varepsilon^{N+1}$

$$\text{für } 0 < \varepsilon < \varepsilon_o \ .$$

H.W. KNOBLOCH : Linearisierung , Integralmannigfaltigkeiten , Mittelwertmethode

Es wird über einen neuen Zugang zur Theorie der Integralmannigfaltigkeiten berichtet, der eine einheitliche Begründung der verschiedenartigsten Linearisierungsverfahren (Stabilität in kritischen Fällen, kleine Parameter, Methode von Krylov und Bogoljubov) ermöglicht. Dieser Zugang beruht nicht auf Fixpunktsätzen, sondern verwendet eine Art "direkte Methode", bei der die explizite Konstruktion im kleinen (d.h. auf kleinen t-Intervallen) vorgenommen und dann durch eine a priori-Abschätzung der Schrittlänge ergänzt wird. Diese Konstruktion wird durchgeführt für einen sogenannten "Standardtyp" von Differentialgleichungen, der den jeweiligen individuellen Typen dann durch eine Art lokale Identifizierung angepaßt wird. Dieser Standardtyp wird geschrieben als System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen der Form

$$(*) \qquad \dot{x} = A\,x + p(t,x,y)\ , \quad \dot{y} = B\,y + q(t,x,y)\ ,$$

wobei A und B konstante Matrizen sind (diese Bedingung kann weitgehend abgeschwächt werden) und A stabil ist. p und q sind samt ihren partiellen Ableitungen beschränkt (auf dem gesamten (t,x,y)-Raum), $\| p_x \|$, $\| q_y \|$ liegen unterhalb gewisser von den Matrizen A, B allein bestimmter Schranken.

<u>Hauptresultat</u>: Wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind,

1. $\beta$ = Minimum der Realteile der Eigenwerte von B $>$
   $\alpha$ = Maximum der Realteile der Eigenwerte von A

   (schwache Dichotomie)

2. $\delta(A) \cdot \mathrm{Max}\, \| p_y \| \cdot \mathrm{Max}\, \| q_x \| \cdot (\beta-\alpha)^{-2} < 1$

   (schwache Koppelung) ,

so existiert eine Integralmannigfaltigkeit M von (*) mit folgenden Eigenschaften

1. M kann durch eine Gleichung der Form $x = s(t,y)$ dargestellt werden.
2. $(t,x(t),y(t)) \in M \Longleftrightarrow x(t)$ beschränkt für $t \to -\infty$
3. M ist (für $t \to +\infty$) attraktiv und asymptotisch stabil.

H. KNOLLE : <u>Periodische Lösungen der Aisermanschen Differentialgleichung</u>

Zunächst wird ein Kriterium für die Existenz von $\omega$-periodischen Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \qquad x' = f(t,x) \equiv f(t+\omega,x),\ x \in R^n$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

hergeleitet.

Satz: Die $\omega$-periodischen Lösungen der Differentialgleichung

(2) $$x' = \lambda f(t,x) - (1-\lambda)\, f(t,-x)$$

seien a priori gleichmäßig für alle $\lambda \in [0,1]$ beschränkt. Dann hat (1) mindestens eine $\omega$-periodische Lösung.

Der Beweis kann mit der Leray-Schauder-Methode geführt werden, und zwar im wesentlichen auf Grund des Satzes über den Abbildungsgrad von ungeraden vollstetigen Vektorfeldern (Satz von Borsuk) sowie eines Homotopie-Arguments. Ein Vergleich des Satzes mit einem Existenzsatz von J.Mawhin wird durchgeführt.

Als Anwendungsbeispiel wird die "Aisermansche Gleichung"

(3) $$x''' + q(x'') + r(x') + s(x) = p(t) \equiv p(t+\omega)$$

betrachtet. Die folgenden Bedingungen erweisen sich als hinreichend für die Existenz $\omega$-periodischer Lösungen von (3):

(i) $y\, q(y) \leqq 0$ für alle $y$.

(ii) $x\, s(x) \geqq 0$ für alle $x$,
$s'(x) \geqq 0$ für alle $x$

(iii) $|q|$ wächst mindestens linear, und $|s|$ wächst stärker als $|q|$, wenn das Argument gegen $\pm\infty$ strebt.

B. LALOUX : Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations

One establishes the fundamental theorems of a bifurcation theory concerning equations of the form

$$L\,x = N(\mu, x)$$

where, $x$ belonging to a B-space $X$ and $\mu \in R$, the linear operator $L\colon D(L) \subset X \longrightarrow Z$ (another B-space) is not necessarily continuous and $L^{-1}$ does not exist, and where $N\colon R \times X \longrightarrow Z$ is a continuous mapping. With a compactness assumption on the pair $(L,N)$, one uses the coincidence degree theory, introduced by J.Mawhin, and extends notions of characteristic value, regular value and multiplicity to prove extensions of the method of M.A.Krasnoselskii who studied equations of the form $x = \mu\, N\, x$.

Then we apply these abstract results to examples in ordinary differential equations emanating from a chemical reaction chain and from the celestial mechanics.

R. MANNSHARDT : Kontinuierliche Näherungslösungen auf der Grundlage von Einschrittverfahren

Die Lösung $y(x)$ eines Anfangswertproblems $y' = f(x,y)$ , $y(x_o) = y_o$ läßt sich bekanntlich an diskreten Stellen $x_n$ $(n = 0,1,2,\dots)$ durch Werte $y_n$ annähern, die durch ein "Einschrittverfahren" definiert werden:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \cdot \phi(x_n, y_n, h_n)$$

$$(h_n = x_{n+1} - x_n) \; .$$

Der erste Rechenschritt werde nun dazu verwendet, $y(x)$ kontinuierlich durch einen analytischen Ausdruck zu approximieren:

$$\tilde{y}(x) = y_o + (x-x_o)\cdot\phi(x_o, y_o, x-x_o) \; .$$

Wählt man für $\phi$ den Taylor-Ansatz, so ergibt sich die übliche Potenzreihenentwicklung; wählt man ein Runge-Kutta-Verfahren, so ergibt sich eine Näherung ohne Ableitungen von f. Bei der Anwendung dieser Näherung sind folgende Fälle zu unterscheiden:

(i) $x \approx x_o$ (dabei kann f in $(x_o, y_o)$ auch singulär sein)

(ii) $x_o \leq x \leq x_e$ (mit festem $x_e$, Beispiel: Randwertprobleme)

(iii) $x \longrightarrow \infty$ (insbesondere bei autonomen Systemen).

Hierbei sind oft (aus verschiedenen Gründen) implizite Runge-Kutta-Verfahren besonders geeignet.

R. RAUTMANN : Die Anfangswertaufgabe einer inhomogenen substantiellen Differentialgleichung

Eine substantielle Differentialgleichung enthält als charakteristischen Term die substantielle Ableitung

$$\frac{D}{Dt}u = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v^i \cdot \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

der gesuchten Vektorfunktion $u(t,x) = (u^1,\dots,u^m)$ mit $t \in J = [0,a]$, $a > 0$, $x = (x^1,\dots,x^n) \in R^n$, $u \in C_1(J \times R^n)$. Die Vektorfunktion $v(t,x) = (v^1,\dots,v^n)$ ist in dem obigen Ausdruck mittels einer vorgegebenen Funktionaloperation K aus u zu bilden. Substantielle Differentialgleichungen spielen in der Strömungslehre eine zentrale Rolle. Für die Anfangswertaufgabe

$$(\cdot)\quad \begin{cases} \frac{D}{Dt} u = \varepsilon^{-1}\{v(t,x+\varepsilon u(t,x)) - v(t,x)\}\,, & t > 0; \\ u = u_o,\ t = 0 \\ v = K\,u \end{cases}$$

mit konstantem $\varepsilon > 0$ wird mit Hilfsmitteln aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ein globaler Existenzsatz bewiesen. Es sei $C_j^c$ die Klasse der auf $J \times R^n$ j-mal stetig differenzierbaren Vektorfunktionen mit kompaktem Träger, $C_{o;1}$ die Klasse der auf $J \times R^n$ mit ihren räumlichen ersten partiellen Ableitungen stetigen und beschränkten Vektorfunktionen, $|\operatorname{tr} u(t,.)|$ das Lebesguesche Maß des Trägers von $u(t,.)$ im $R^n$, $|\cdot|_o$ die übliche Supremum-Norm. Vorausgesetzt wird

(i) $u_o \in C_1^c$, $u_o = u_o(x)$

(ii) $K:\ C_o^c \longrightarrow C_{o;1}$

(iii) $|K\,u(t,.)|_o + |\nabla K\,u(t,.)|_o \leqq c_o\,|\operatorname{tr} u(t,.)|\,|u(t,.)|_o$,
$c_o$ positiv, $\nabla K\,u = 0$ für alle $u \in C_o^c$

(iv) K stetig bezüglich $|\cdot|_o$ .

Ist K gleichmäßig Lipschitz-stetig bezüglich $|\cdot|_o$ auf beschränkten Teilmengen von $C_o^c$, deren Elemente außerhalb einer festen Kugel im $R^n$ identisch verschwinden, so ergibt eine Anwendung des Kontraktionssatzes einen konstruktiven Existenz- und Eindeutigkeitssatz im Großen. Die Gleichung $(\cdot)$ stellt eine Näherung dar für die Helmholtzsche Wirbelgleichung (mod. $\varepsilon$). Für weitere Anwendungen vgl. R.Rautmann: Lösung einer Anfangswertaufgabe für substantielle Differentialgleichungen (in: R.Ansorge - W.Törnig, Springer Lecture Notes in Mathematics, 1974).

L. REICH : <u>Neuere Ergebnisse über Singularitäten verallgemeinerter Briot-Bouquetscher Differentialgleichungen</u>

Vom Verf. wurden, zusammen mit P.Bungartz, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine analytische Differentialgleichung $P(z,w,w',\dots,w^{(n-1)}, z\,w^{(n)}) = 0$, wobei P eine konvergente Potenzreihe in $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ ohne Absolutglied ist, eine holomorph in die Singularität $z = 0$ der Differentialgleichung einmündende Lösung $w = c_n z^n + \dots$ $(n \geq 1)$ besitzt. Es wurde, in einem geeigneten Raum dieser verallgemeinerten Briot-Bouquetschen Differentialgleichungen, die Häufigkeit (in einem präzisierbaren Sinne) solcher mit Integralen $w = c_n z^n + \dots$ angegeben (1967/69). Hier soll nun über Verallgemeinerungen in folgende Richtungen referiert werden:

1. Parameterabhängige Differentialgleichungen im Kleinen
2. Sätze vom Typ des Satzes von Poincaré über holomorphe Fortsetzbarkeit der in $z = 0$ holomorph einmündenden Lösungen für kleine Beträge des Parameters
3. Algebraisch verzweigt einmündende Integrale
4. Singularitäten verallgemeinerter Briot-Bouquetscher Differentialgleichungen in der nicht-archimedischen Analysis.

R. REISSIG : <u>Einige Ergänzungen zum Schwingungsproblem bei der verallgemeinerten Liénardschen Gleichung</u>

Für die Differentialgleichung

$$x'' + f(x)\,x' + g(x) = e(t) \equiv e(t+T)$$

haben Lazer ($f(x) = c$) und Mawhin ($f(x)$ beliebig) die folgenden hinreichenden Bedingungen für die Existenz T-periodischer Lösungen hergeleitet:

$$x\,g(x) \geqq 0 \quad (\leqq 0) \text{ für } |x| \geqq X$$

$$\frac{g(x)}{x} \longrightarrow 0 \quad (|x| \longrightarrow \infty)$$

$$\int_0^T e(t)\,dt = 0 .$$

Ihr Resultat läßt sich auch auf die Fälle

$$x\,g(x) \leqq 0 \text{ für } |x| \geqq X , \quad \int_0^T e(t)\,dt = 0$$

oder

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{x} = k \in (0,\omega^2) , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

ausdehnen.

Für die nichtlineare Charakteristik $g(x)$ kann man sogar den

Winkelraum zwischen den Resonanzgeraden 0-ter und erster Ordnung zulassen:

$$0 < \liminf_{|x| \to \infty} \frac{g(x)}{x} \leq \limsup_{|x| \to \infty} \frac{g(x)}{x} < \omega^2 .$$

Zum Beweis der Existenz wenigstens einer T-periodischen Lösung bildet man eine parameterabhängige Hilfsdifferentialgleichung, deren periodische Lösungen mittels einer Hammersteinschen Integralgleichung $x(t) = \mu\, U\, x(t)$ , $0 \leqq \mu \leqq 1$ ($\mu = 1$: ursprünglicher Fall) darstellbar sind. Nach Leray-Schauder genügt eine a priori-Abschätzung dieser Lösungen, die in $\mu$ gleichmäßig gilt. Um eine solche zu erhalten, stellt man zwei Hilfssätze über oszillatorische Lösungen auf:

(i) Sei $x(t)$ eine Lösung über $[0,T_0]$, $T_0 \leqq \frac{T}{2}$ , $x(0) = x(T_0) = 0$. Dann gilt: $|x(t)| \leqq K_0$; $|x'(t)| \leqq K_1$ mit Systemkonstanten $K_0$, $K_1$.

(ii) Sei $x(t)$ eine Lösung über $[0,T_0]$, $0 < \theta \leqq T_0 \leqq T$, mit $x(t) \geqq 0$ ($\leqq 0$).
Sei ferner
(a) $x(0) = x(T_0)$ , $x'(0) = x'(T_0)$
oder
(b) $x(0) = x(T_0) = 0$ , $|x'(0)-x'(T_0)| \leqq \sigma$ .
Dann gilt $|x(t)| \leqq L_0(\theta,\sigma)$, $|x'(t)| \leqq L_1(\theta,\sigma)$.

Durch Kombination beider Hilfssätze und Unterscheidung verschiedener Schwingungsformen folgt sofort die gewünschte Beschränktheitsaussage.

N. ROUCHE : Regularity of solutions and invariance properties of their limit sets

One proves, for differential equations in the sense of Carathéodory, a theorem on the regularity of the solutions with respect to variations of the initial conditions and, using a suitable topology, to variations of the second member. Further, one proves two theorems on semi- and quasi-invariance of the limit sets of solutions, according as the translates of the second member either converge to some function, or constitute a relatively compact family.

E. ROXIN : Differentialspiele mit allgemeiner Summe und mit N Spielern

Gegeben sei ein Differentialspiel durch eine Differentialgleichung des Typs

$$\dot{x} = f(t,x,u_1,u_2) \ ,$$

wo $x(t) \in R^n$, $u_i(t) \in R^{m_i}$, sowie durch vorgegebene Endbedingung und Auszahlungen

$$J_i = g(T,x(T)) + \int_{t_0}^{T} h_i(t,x(t),u_1(t),u_2(t))\,dt \, .$$

Es seien $J_i^m(t_0,x_0)$ die Maximin-Auszahlungen, die jeder Spieler sicherstellen kann, als Funktionen des Ausgangspunktes; diese $J_i^m$ sind als Lösungen von Null-Summen-Spielen zu ermitteln. Dann ist die Verhandlungslösung bei vorsichtigem Spiel durch die Vorschrift gegeben, daß im Intervall $[t,t+dt]$ die zwei Spieler das Produkt

$$(J_1(t+dt,x+dx)-J_1(t,x)+h_1(t,x,u_1,u_2)) \cdot$$
$$\cdot \, (J_2(t+dt,x+dx)-J_2(t,x)+h_2(t,x,u_1,u_2))$$

maximieren wollen. Verabreden sich dagegen die Spieler auf das Maximum des entsprechenden Produkts der endgültigen Auszahlungen, so können sie zwar vielleicht bessere Auszahlungen erzielen, gehen jedoch das Risiko ein, daß bei zeitweiliger Verminderung von $J_i^m(t,x)$ im Verlauf des Spieles der andere Spieler von der Verabredung abfallen könnte, um seinen momentanen Vorteil auszunutzen - zum Schaden des ersten. - Probleme bei Verallgemeinerung auf N Spieler werden erörtert.

P. SAGIROW : Optimale räumliche Drehungen um eine körperfeste Achse

Die Drehbewegungen eines starren Körpers um sein Massenzentrum werden durch die Euler-Gleichungen beschrieben. Fordert man, daß die Richtung der Winkelbeschleunigung während einer endlichen Drehung körperfest bleibt, so erhält man das System

$$\ddot{x} + \alpha_i \dot{x}^2 = u_i \ ; \ i = 1,2,3.$$

Betrachtet werden das zeitoptimale und das verbrauchsoptimale Problem mit den Randbedingungen $x(0) = -x_0$, $\dot{x}(0) = 0$; $x(T) =$

$\dot{x}(T) = 0$ und den Beschränkungen $|u_i| \leqq u_{i,max}$. Es wird gezeigt, daß die optimale Bewegung stets entweder auf dem Rand des zulässigen Gebietes $|\ddot{x} + \alpha_i \dot{x}^2| \leqq u_{i,max}$ oder auf den Parabeln $\ddot{x} = -\alpha_i \dot{x}^2$ erfolgt, wobei $u_{opt}$ im allgemeinen alle Werte $\pm u_{i,max}$, $i = 1,2,3$ durchläuft.

K. SCHMITT : Periodic Solutions of Nonlinear Functional Differential Equations

Using Leray-Schauder degree theoretic methods we establish existence results for T-periodic solutions of nonlinear functional differential equations. Specifically we verify the following result:

Theorem.
a) $\Theta$ a non-empty bounded open set in $R^n$, $G = C([0,T],\Theta)$
b) $f: R \times C([-h,0],R^n) \longrightarrow R^n$ continuous and maps bounded sets to bounded sets, $f(t+T,.) \equiv f(t,.)$
c) the vector field $F: u \longrightarrow -\int_0^T f(t,u)\,dt$, $u \in \bar{\Theta}$ is zero free on $\partial\Theta$, the Brouwer degree $d(F,\Theta,0) \neq 0$

Then for all $\varepsilon > 0$ sufficiently small the system

(A) $\qquad x' = \varepsilon f(t,Ux_t)$

has a T-periodic solution (here $Ux_t$ is a hereditary operator). If in addition all T-periodic solutions of (A) for $0 < \varepsilon \leqq 1$ do not belong to $\partial G$, then (A) has a T-periodic solution for all $\varepsilon$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$.

This result is applied to the quasilinear equation

(B) $\qquad x' = F(Ux_t) + f(t)$

where the forcing term f is T-periodic and $F: C_h \longrightarrow R^n$ is a bounded linear operator satisfying the condition that $\eta(0)-\eta(-h) = A$ be non-singular, where $\eta(s)$, $-h \leqq s \leqq 0$ is the $n \times n$-matrix of bounded variation such that $F(u) = \int_{-h}^0 d\eta(s)u$. Setting $\|F\| = \int_{-h}^0 |d\eta(s)|$ one obtains that (B) has a T-periodic solution for arbitrary continuous forcing terms f, as long as $1 - 12^{-1/2}\, T\|F\| > 0$.

U. STAUDE : Zur Eindeutigkeit periodischer Lösungen der Liénard-Gleichung

Das Liénardsche Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = y - F(x)\ ,\ \dot{y} = -x$$

besitzt unter den Voraussetzungen

a) $F(x) \in \mathrm{Lip}\ (R)$

b) $F(0) = 0$

c) $\frac{F(x)}{x} < k \in (0,2)$ für $0 < |x| \leqq \delta$

d) $F(x) < F(-x)$ für $0 < x < \delta$

e) $F(x) \leqq F(-x)$ für $0 \leqq x \leqq a$ $(\delta < a)$

f) $F(x) > F(-x)$ für $x > a$

g) $F(x)$ monoton nicht-fallend für $|x| \geqq a$

genau eine periodische Lösung (von Verschiebungen in t abgesehen).

Dieser Satz umfaßt die Mehrzahl der Eindeutigkeitssätze in: Reissig-Sansone-Conti, Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen (Sansone, Massera, Barbalat).

Bei Übertragung auf die verallgemeinerte Liénardsche Differentialgleichung bzw. das äquivalente System

$$\dot{x} = y - F(x)\ ,\ \dot{y} = -g(x)$$

ergibt sich ein Satz, der die Eindeutigkeitsaussagen von Lefschetz, Levinson-Smith, Brown als Spezialfälle enthält.

P. VOLKMANN : Über die positive Invarianz einer abgeschlossenen Teilmenge eines Banachschen Raumes bezüglich der Differentialgleichung $u' = f(t,u)$

In Anknüpfung an ein Ergebnis von R.M.Redheffer und W.Walter (erscheint in: Applicable Analysis) wird der folgende Satz bewiesen.

Satz. Es sei M eine abgeschlossene Teilmenge des Banachschen Raumes E. Die Funktion $f: (0,T) \times G \longrightarrow E$ (G offen in E) genüge für $0 < t < T$ der Bedingung

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \operatorname{dist}\ (M, x + h\, f(t,x)) = 0 \quad (x \in G \cap \operatorname{Rand} M)$$

sowie der Abschätzung

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leqq \omega(t, \|x-y\|)$$

$$(x \in G \cap \text{Rand } M\ ,\ y \in G - M),$$

$\omega$ wie unten.

Dann folgt für jede stetige Funktion $u: [0,T) \longrightarrow G$ aus $u(0) \in M$ und $u_r'(t) = f(t,u(t))$, $0 < t < T$ die Beziehung $u(t) \in M$ für $0 < t < T$.

Dabei bezeichnet $u_r'$ die rechtsseitige Ableitung von u, und $\omega: (0,T) \times (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ ist eine Funktion mit

$$\overline{\lim_{h \searrow 0}}\, \omega(t,s+h) \leqq \omega(t,s) \quad (0 < t < T,\ 0 < s < +\infty),$$

so daß für jede stetige Funktion $\eta: [0,T_1) \longrightarrow [0,+\infty)$, $T_1 \leqq T$ aus $\eta(0) = 0$ und

$$D^r \eta(t) \leqq \omega(t,\eta(t)),\ \text{falls}\ \eta(t) > 0 \quad (0 < t < T_1)$$

die Beziehung $\eta(t) \equiv 0$ auf $[0,T_1)$ folgt ($D^r$ = rechtsseitige, obere Dinische Ableitung). Erscheint in: J.Reine Angew.Math.

R.Reißig (Bochum)