MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 15/1974

Darstellungstheorie Liescher Gruppen

7.4 bis 13.4.1974

La rencontre a porté sur les représentations des groupes de Lie semi-simples. Une première série d'exposés a été consacré aux groupes p-adiques (degré formel des représentations supercuspidales, décomposition KNK, modèles de Whittaker, représentations de carré intégrable des groupes nilpotents, ...). Une deuxième série d'exposés a abordé divers problèmes d'analyse harmonique non commutative (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) (phénomène de Kunze et Stein, série discrète holomorphe, opérateurs de Sturm-Liouville, etc...) .

Tagungsleiter: Prof. Dr. G. Schiffmann (Strasbourg)

Teilnehmer

G. ARSAC, Lyon
P. BARRAT, Paris
W. BEIGLBOCK, Heidelberg
G. BOHNKÉ, Nancy
J. BRACONNIER, Lyon
Y. BROWN, Rennes
R. BUSAM, Heidelberg
J. CAILLIEZ, Nancy
D. CASTRIGIANO, Munich
H. CHEBLI, Strasbourg
F. CHOUCROUN, Orsay
N. CONZE, Rennes
A. DERIGHETTI, Lausanne
G. van DIJK, Leiden
DUHAUT, Nancy
P. EYMARD, Nancy
J. FARAUT, Strasbourg
M. FLENSTED-JENSEN, Copenhague
E. FREITAG, Mainz
M. FRISCH, Paris
M.O. GEBUHRER, Strasbourg
F. GIACINTI, Strasbourg
J.E. GILBERT, Austin/Texas
R. HOWE, Bonn
D. JULLIOT, Nancy
R. KIEHL, Mannheim
KEHLET, Copenhague
J.A.C. KOLK, Utrecht
T. KOORNWINDER, Amsterdam
R. KRIER, Luxembourg
J.J. LOEB, Strasbourg
N. LOHOUÉ, Orsay
M. MIZONY, Lyon
I. MULLER, Strasbourg

H. NEUNHOFFER, Heidelberg
M. NICHANIAN, Strasbourg
P. NOUYRIGAT, Lyon
J. OBERDOERFFER, Nancy
J.P. PIER, Luxembourg
S. RALLIS, Strasbourg
F. RODIER, Paris
H. RUBENTHALER, Strasbourg
M. SCHAAF, Munich
G. SCHIFFMANN, Strasbourg
A. SILBERGER, Bonn
C. SOULÉ, Paris
N. SUBIA, Strasbourg
E. THOMA, Munich
M. VERGNE, Paris

Vortragsauszüge

H. CHEBLI : Théorème de Paley-Wiener et Distributions de "type positif" associées à un opérateur de Sturm-Liouville .

On associe à un opérateur de Sturm-Liouville sur $[0,\infty[$ des opérateurs de translation généralisée au sens de Delsarte ; sous certaines conditions sur l'opérateur différentiel, ces opérateurs de translation généralisée sont positifs. On en déduit une représentation intégrale d'une certaine solution φ , fonction "propre" de l'opérateur différentiel, cette représentation intégrale est l'analogue de la formule d'Harish-Chandra dans le cas où l'opérateur différentiel est la partie radiale de l'opérateur de Laplace Beltrami sur un espace riemannien doublement transitif et de type non compact. De cette représentation intégrale

$$\varphi(x,\lambda) = \int_{-x}^{x} e^{(i\lambda-\rho)t}\, d\nu_x(t)$$

où ν_x est une mesure positive de masse 1 , on en déduit un théorème de Paley-Wiener caractérisant les fonctions $C^{\infty}(R)$ paires et à support compact ainsi que les distributions à support compact. D'une méthode présentée dans le volume IV de Gelfand et Vilenkin on déduit une représentation intégrale des distributions de "type positif" relativement aux opérateurs de translation généralisée .

F. CHOUCROUN : Fonctions sphériques de type ϑ.

Soient $\underline{\underline{G}}$ un schéma en groupes de Chevalley sur $\mathbb{Z}$, Ω un corps p-adique, dont $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers, $\bar{k}$ le corps résiduel, $\underline{\underline{T}}$ un tore déployé, $\underline{\underline{B}}$ un Borel $\supset \underline{\underline{T}}$.

Soit α un caractère de $\underline{\underline{T}}(\bar{k})$ prolongé à $\underline{\underline{B}}(\bar{\mathcal{I}})$, ρ une représentation contenue dans $\operatorname{Ind}_{\underline{\underline{B}}(\bar{\alpha}) \uparrow \underline{\underline{G}}(\bar{\mathcal{I}})} \alpha$ (avec multiplicité p_e), ϑ la représentation de $\underline{\underline{G}}(\mathcal{O})$ la relevant. Alors les représentations de la série principale (unitaire) de $\underline{\underline{G}}(\Omega)$ (relativement à $\underline{\underline{B}}(\Omega)$) forment un système complet de représentations de la sous-algèbre de $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{G}}(\Omega))$ se transforment par $\underline{\underline{G}}(\mathcal{O})$ suivant ϑ. On en déduit :

1) si $p_e = 1$ l'algèbre des fonctions sphériques de type ϑ est commutative.

2) si I désigne le sous-groupe d'Iwahori de $\underline{\underline{G}}(\Omega)$ toute représentation complémentaire irréductible de $\underline{\underline{G}}(\Omega)$ contient 1_I au plus Card(W) fois, où W est le groupe de Weyl de $\underline{\underline{G}}_1/\underline{\underline{B}}$. On utilise le lemme :

Soit G un groupe muni d'une donnée radicale de type Φ dont W est le groupe de Weyl, S l'ensemble des réflexions par rapport aux racines simples si $U = \langle U_a \mid a \in \Phi^+ \rangle$, $V = \langle U_{-a} \mid a \in \Phi^+ \rangle$ et $B = TU$ on a :

$BwB \cap Bw'V \neq \emptyset \Leftrightarrow w' = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ où $s_1 \dots s_n$ est une décomposition réduite de S.

A. DERIGHETTI : On the Weak Containment.

Let G be a locally compact group with left Haar measure dx and π an arbitrary continuous representation of G. For every $a, x \in G$ $f \in L^1(G)$ $A_a f$ denotes the function on G defined by $A_a f(x) = f(xa)\, \Delta_G(a)$ and $\mathfrak{a}$ is the convex hull of $\{A_a \mid a \in G\}$.

Proposition : The representation π weakly contains the one-dimensional identity representation i_G of G iff $\inf_{A \in \mathfrak{A}} \| \pi(Af) \| = | \int_G f(x)dx |$ for every $f \in L^1(G)$; π does not weakly contain i_G iff $\inf_{A \in \mathfrak{A}} \| \pi(Af) \| = 0$ for every $f \in L^1(G)$. Let H be a closed subgroup of G and $d\dot{x}$ a quasi-invariant measure on G/H . For every π continuous unitary representation of H and $f \in L^1(G)$ we define $N_\pi(f) = \int_{G/H} \|T_\pi f(x)\| \, d\dot{x}$ where $T_\pi f(x)$ is the bounded operator defined by $\int_H \frac{f(xh)}{q(xh)} \pi(h)dh$. Let $\mathfrak{A}_H$ be the convex hull of $\{A_h | h \in H\}$ and $\|T_H f\|_1 = \int_{G/H} | T_{i_H} f(x) | \, d\dot{x}$.

Proposition : Let π be a unitary contain representation of H . Then $\inf_{A \in \mathfrak{A}_H} N_\pi(Af) \le \|T_H f\|_1$. The representation π weakly contains i_H iff $\inf_{A \in \mathfrak{A}_H} N_\pi(Af) = \|T_H f\|_1$ for every $f \in L^1(G)$; π does not weakly contain i_H iff $\inf_{A \in \mathfrak{A}_H} N_\pi(Af) = 0$ for every $f \in L^1(G)$. Applications to the case $G = \mathbb{R}$ $H = \mathbb{Z}$ and to the theory of induced representation are given. Finally some comments are made on the closed subgroups H of G for which $\inf_{A \in \mathfrak{A}_H} \|A_f\|_1 = \|T_H f\|_1$ for every $f \in L^1(G)$.

G. van DIJK : Square-integrable representation of p-adic unipotent groups .

Let k be a local field of characteristic zero, G the group of k-points of an algebraic group consisting of unipotent matrices and defined over k . Let $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of G . G acts on $\mathfrak{g}$ by Ad and hence on $\mathfrak{g}^*$, the vectorspace-dual of $\mathfrak{g}$. According to Kirillov (real case) and Moore (p-adic case) there is a one-to-one correspondence between the set of equivalence classes of irreducible unitary representations of G and the G-orbits on $\mathfrak{g}^*$.

Let Z be the center of G , $d\dot{x}$ a Haarmeasure on G/Z . An irreducible unitary representation π of G is called square-integrable mod Z if $\int_{G/Z} |<\pi(x)\,\xi,\eta>|^2\, d\dot{x} < \infty$ for a pair of non-zero vectors ξ,η in the Hilbertspace on which π acts . Recently Moore and Wolf have shown for real G that square-integrable representations mod Z occur iff there are G-orbits Θ in $\mathcal{G}^*$ of dimension Θ = dimension G/Z and in that case they correspond one-to-one unter the Kirillov-isomorphism. We indicate how to prove the same results for p-adic groups. We gave a proof of the following additional result for p-adic groups G . Let π be an irreducible unitary representation of G on $\mathcal{H}$. A vector $\xi \leq \mathcal{H}$ called locally constant if the map $x \to \pi(x)\xi$ $(x \in G)$ is locally constant .

<u>Theorem</u> : π is square-integrable mod Z iff for each pair of locally constant vectors $\xi,\eta \in \mathcal{H}$ the matrix coefficient $x \to <\pi(x)\xi,\eta>$ is a loc. constant complex-valued function on G with compact support mod Z .

P. EYMARD et N. LOHOUÉ : <u>Phénomène de Kunze et Stein pour les espaces symétriques</u>.

Soit G un groupe de Lie semi-simple non compact, connexe et de centre fini ; $G = KAN = K\bar{A}_+K$ des décompositions d'Iwasawa et de Cartan. On suppose (pour la commodité de l'exposé) l'espace symétrique $X = G/K$ de rang un . Soient α et éventuellement 2α les racines positives ; m et n leurs multiplicités ; on pose $\rho = m/2 + n$. Soit M le centralisateur de A dans K , et $B = K/M$ la frontière de Furstenberg de X . Le noyau de Poisson sur $X \times B$ est

$$P(gK,kM) = e^{-2\rho H(g^{-1}k)} ,$$

où $H(*)$ est la composante dans A de * pour $G = K'AN$.

Théorème : Le noyau racine carrée du noyau de Poisson applique, pour tout $q > 2$, l'espace $L^2(B, dk_M)$ dans l'espace $L^q(X, dx)$, où dk_M est K-invariante sur B, et dx G-invariante sur X.

Interprétation : Soit π la représentation quasi-régulière de G dans $L^2(G/_{MAN}) \simeq L^2(B)$. Alors, pour toute $f \in L^2(B)$, les coefficients $g \mapsto (\pi(g)1|f)$ de π sont, pour tout $q > 2$, de puissance q-ième intégrable. On en déduit, plus généralement, que, pour tout $q > 2$, sont de puissance q-ième intégrable ceux des coefficients de toute représentation de la série principale de G, qui sont invariants à gauche par K.

M. FLENSTED JENSEN : Spherical Functions.

Let G be a simply connected semi-simple Lie group, non compact. Let K be a maximal subgroup s.t $K/Z(G)$ is compact. $Z(G)$ = center of G.

In the lecture, we discussed those irreducible, unitary representations π for which the restriction π/K contain a 1-dimensional representation of K. We discussed there by the method of spherical functions. There are two essentially different cases. Let K_o be the maximal semi-simple subgroup in K :

1) the K_o-bi-invariant functions in $L^1(G)$ form a commutative subalgebra. This is the case if and only if $K_oM = K$ and if and only if G/K does not contain a component of tube type.

The spherical functions are parametrized and the above reps. are described by means of there.

2) The K_o-bi-invariant functions in $L^1(G)$ is not a commutative subalgebra. By means of an extension G^1 of G and spherical functions of G^1 w.r.t. a compact subgroup K^1 we described the above representations of G.

M. FRISCH : Asymptotic properties of tori's vibrations .

Let $f(x,t) : T^n \times R \to \mathbb{C}$ be a solution of wave equation $\Delta f = \frac{\delta^2 f}{\delta t^2}$ on the n-dimensional torus. Such solutions, even with C^2 initial conditions, need not be bounded $(n \geq 5)$. One ask if regularity, either of initial conditions, or more generally of values on a "time" interval, i.e. a set $T^n \times [-\ell,\ell]$, allows to control asymptotic growth when $t \to \infty$.

So you give an integer k and you want to know if there exist $\ell > 0$ and $w(t)$ such that for each solution f :

$$\begin{matrix} \forall x \in T^n \\ \forall t \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad |f(x,t)| \leq |w(t)| \; \| f \|_{C^k(T^n \times [-\ell,\ell])}$$

There is a critical index which is $\frac{n-1}{2}$ such that if $k > \frac{n-1}{2}$ such an estimation is possible, and that if $k < \frac{n-1}{2}$ it is not. Lipschitz spaces $\Lambda_\alpha\,(T^n \times [-\ell,\ell])$ allow to come close from the critical index and are a natural frame for fractionals derivatives operateurs which are used .

R. HOWE : On the integrality of formal degrees of supercuspidal representation of p-adic reductive groups in characteristic 0 (d'après Harish-Chandra) .

Let G be a reductive group over the p-adic field F of characteristic 0 . Let $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra, Ad the action of G on $\mathfrak{g}$. Let Λ be a small lattice in $\mathfrak{g}$, so that $K_n = \exp \pi^n \Lambda$ (π a prime of F) is an open compact subgroup. Let $Y_n = \mathrm{Ad}\, G(\Lambda)$.

A distribution on $C_c^\infty(\mathfrak{g})$, or $C_c^\infty(Y_n)$ is invariant if it is unchanged by Ad . If ρ is a supercuspidal representation of G , and θ_ρ the character of ρ , then $\theta_\rho \circ \exp$, the pullback of θ_ρ to Y_n by exp , is an invariant distribution. Another way of getting invariant distributions is via orbital integrals.

Given $x \in \mathfrak{g}$, $\Theta_x = \mathrm{Ad}\, G(x)$. Then Θ_x has an unique (up to multiples) invariant measure on it which gives an invariant distribution on $\mathfrak{g}$.

There is also Fourier transform. Let $(,)$ be the Killing form (or any $\mathrm{Ad}\, G$ invariant non-degenerate bilinear form on $\mathfrak{g}$). Let X be a character of F. Define $\hat{f}(x) = \int_{\mathfrak{g}} f(y) X((x,g))dy$. Then $\hat{}$ is an isomorphism of $C_c^\infty(\mathfrak{g})$, with $\hat{}^4 = 1$. Define $\hat{}$ on distributions by the recipe $\hat{D}(\hat{f}) = D(f)$. Then one has

<u>Theorem</u> : a) For sufficiently large n, one has the relation

$$\theta_\rho \circ \exp = \Sigma\, c_x(\rho)\, \hat{\Theta}_x ,$$

where x runs through a set of representatives for the nilpotent conjugacy classe in $\mathfrak{g}$. The $c_x(\rho)$ are complex numbers.

b) The coefficient $c_o(\rho)$ is, up to a factor independant of ρ, an integer.

c) The coefficient $c_o(\rho)$ is, up to a factor depending only on the normalization of Haar measure, the formal degree of ρ.

Comparing b) and c), it follows that the formal degree of ρ is essentially an integer, proving for example, that all representation of G are admissible. Given a), parts b) and c) follow from relatively simple consideration involving homogeneity properties of the functions $\hat{\Theta}_x$ under dilation of $\mathfrak{g}$. To prove c), one compares the expansion given in a) with the expansion of Shalika for F_f on a compact torus. Part a) follows from a study invariant distributions on $\mathfrak{g}$.

M. MIZONY : Analyse harmonique sphérique .

On généralise les résultats classiques de l'analyse harmonique commutative sur la transformation de Fourier aux espaces symétriques, par l'utilisation des algèbres de Fourier $A(G)$ et $B(G)$.

Soit G un groupe localement compact et K un sous-groupe compact tel que l'algèbre $L^1(G)^\natural$ des fonctions bi-invariantes soit commutative ; alors la transformation de Fourier se prolonge en des isomorphismes isométriques des espaces $A(G)^\natural$ et $B(G)^\natural$ sur les espaces $L^1(Z,d\mu)$ et $M^1(Z)$ respectivement. (Z étant l'ensemble des fonctions sphériques générales de type ≥ 0 et $d\mu$ étant la mesure de Plancherel). Si $C^*(0)^\natural$ est l'adhérence de $L^1(G)^\natural$ dans $C^*(G)$ alors $C^*(G)^\natural$ est isomorphe à $C_o(Z)$. On remarque que $A(G)^\natural = L^2(G)^\natural * L^2(G)^\natural$.

Par suite nous avons un produit de convolution sur $M^1(Z)$ et $L^1(Z,d\mu)$ obtenu par transport de structure. On obtient en particulier pour $\nu,\nu' \in M^1(Z)$ et $f \in C_o(Z)$ $\nu * \nu'(f) = \int_Z \int_Z \delta_\varphi * \delta_\psi (f)\, d\nu(\varphi)\, d\nu'(\psi)$.

H. NEUNHÖFFER : Analytische Fortsetzung von Poincaré-Reihen zu $SL(2,R)$.

Sei $H = \{z = x+iy,\ y > 0\}$, $\mathcal{G} = SL(2,R)$, $\Gamma = SL(2,Z)$. G operiert auf H in bekannter Weise. Der invariante Laplace-Operator auf H ist $\Delta = y^2\left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\right)$.

Man fragt nach Γ-invarianten Eigenfunktionen f von Δ : $f(M(z)) = f(z)\ \forall M \in \Gamma$, $(\Delta + \lambda) f(z) = 0$.

Geht man durch $w = \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}$ nun Einheitsbeweis als Modell der Poincaré-Ebene über, so wird eine im "Unendlich" abfallene Lösung von $(\Delta + \lambda)f = 0$ gegeben durch $(\lambda = s(1-s), Re(s) \geq \frac{1}{2})$

$$f(w) = w^n\, (1 - |w|^2)^s\, F(s+n, s\ ;\ 2s\ ;\ 1 - |w|^2) \quad (n \geq 0) .$$

Hierzu bildet man die Poincaré-Reihe

$$P(z,\zeta,s,n) = \sum_{M\in\Gamma} f(M(w)) \text{ , konvergent für } \operatorname{Re}(s) > 1 .$$

Um diese Reihe ins Spektrum analytisch fortzusetzen, biltet man

$$\tilde{P}(z,\zeta,\delta,n) = \sum_{M\in\Gamma} (M(w))^n (1-(M(w)(^2)^s .$$

Die Reihe für $P-\tilde{P}$ konvergiert für $\operatorname{Re}(s) > 0$. $\tilde{P}$ wird in diesem Bereich analytisch fortgesetzt indem man die Spektralentwicklung bezüglich Δ möglichst explizit ausrechnet und die Entwicklungskoeffizienten die im wesentlichen aus Γ-Fa ktoren bestehen, analytisch fortsetzt. Die analytische Fortsetzung in der linke Halbebene erfölgt durch eine Funktionalgleichung, die $P(z,\zeta,s,n)$ - $P(z,\zeta,1-s,n)$ durch Eisensteinreihen darstellt .

Man erhält das Ergebnis dass man alle quadratisch intergrierbaren Eigenfunktionen von Δ auf $_{\Gamma}\backslash H$ als Residuen der ausgegebenen analytisch fortgesetzten Poincaré-Reihen erhält. Die Singularitäten der $P(z,\zeta,s,n)$ als Funktion von z besitzt, wird in s analytisch und verschwinden bei der Residuenbildung .

S. RALLIS : Projection maps of Weil representation and a multiplicity one statement .

Let π be the metaplectic Weil representation of $G_2(Q) = \widetilde{SL}_2(Q) \times O(Q)$ (Q a quadratic form on $k^n = R^n$ and ($\widetilde{SL}_2(Q)$ = metaplectic group related to Q and $O(Q)$ = orthogonal group of Q) . We construct a projection map θ of $S(R^k)$ (Schwartz space) to a certain family of induced representations of $G_2(Q)$ modulo the group $P \times P_Q$, P a maximal parabolic subgroup of $O(Q)$ and $P_Q = \{\begin{pmatrix} x & o \\ y & x \end{pmatrix} (x \in R^* , y \in R)\}$; θ is an $G_2(Q)$ intertwinning map from $S(R^k)$ to the induced rep. of $G_2(Q)/\text{mod } P \times P_Q$.

We show that there is essentially one such map for every pair of parameters (λ_1,λ_2) quasicharacters on $R^* \times R^*$ (characterying the induced module) by using the socalled "closed Orbit" theorem of Bruhat. This is the first step in proving that the representation π of $G_2(Q)$ is "multiplicity free" in $L^2(R^n)$.

F. RODIER : Whittaker models and characters of representations.

Let K be a p-adic field, of characteristic 0 and residual characteristic $\neq 2$. Let G be a Chevalley group over K , B a Borel subgroup, U its unipotent radical, T a k-split torus maximal in B , R the root system of (G,T) , x_α the one-parameter subgroup associated with the root α . Let θ be the character of U defined by $\theta\left(\prod_{\alpha>0} x_\alpha(t_\alpha)\right) = \prod_{\alpha\in S} \tau(t_\alpha))$ where S is the set of simple roots, τ a character of K whose kernel is the ring $\mathcal{O}$ of integers of K . A Whittaker model of a representation π of G is a realisation of π in the space $W_\theta = \{f : G \to C \mid f(ug) = \theta(u)f(g)\}$. Let $\mathrm{Hom}_G(\pi,W_\theta)$ denote the set of intertwinning operators $\pi \to W_\theta$.

Let p be a maximal ideal in $\mathcal{O}$, $\bar{\omega}$ a prime element. Let G_n be the kernel of the homomorphism $G(\mathcal{O}) \to G(\mathcal{O}/p^n)$. The function ϕ_n on G_n defined by $\phi_n(bu) = \prod_{\alpha\in S} \tau(\bar{\omega}^{-2n} t\alpha)$ of $b \in G_n \cap \bar{B}(*)$, $u = \prod_{\alpha>0} x_\alpha(t_\alpha) \in G_n \cap U$ is a character of G_n . (**) .

If π is an irreducible representation. Let θ_π its character .

Theorem : $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi,W_\theta) = \lim_{n\to\infty} \theta_\pi(\phi_n)$. Some consequences of this result .

(i) Let $P = MV$ a parabolic subgroup containing B , τ an admissible irreducible representation of M which has a Whittaker model (in M) . Extend p to P trivially. Then $\mathrm{Ind}_P^G \tau$ has a composition series (Harish-Chandra, Casselman) and there exists a unique constituent which has a Whittaker model. It occurs with multiplicity 1 .

(ii) The Steinberg representation $(\theta_{st} = \sum_{P\supset B} (-1)^{rkP}\, \mathrm{Ind}_P^G 1_P)$ has a

Whittaker model .

(iii) $\theta_\pi \circ \exp = \sum_x C_x(\rho)\hat{\theta}_x$ as in R. Howe's lecture in this conference.

One can associate to θ a regular nilpotent element X_o in $\mathfrak{g}$ such that : $c(X_o) = 1$ or 0 if π has a Whittaker model or not .

(*) $\bar{B}$ is the Borel opposite to B ;

(**) The idea of considering such ϕ_n's is due to R. Howe .

G. SCHIFFMANN : Invariant distributionsunder the orthogonal group .

Let k be a local field, E a finite dimensional vector space over k and Q a non degenerate quadratic form on E . Put $\Gamma_t = \{y \in E \mid Q(y) = t , y \neq 0\}$. Then one can choose positive measures μ_t on Γ_t , invariant under the orthogonal group G of Q such that

$$\int_E f(y)dy = \int_k dt \int_{\Gamma_t} f(y)\, d\mu_t(y)$$

For $f \in C_c^\infty(E)$, put $M_f(t) = \int_{\Gamma_t} f(y)\, d\mu_t(y)$ we then caracterize the image of $C_c^\infty(E)$ by the map M_f . The result depends on k and the type of Q . For example if k is p-adic and $\dim E = n \geq 3$ then M_f is of the following form

$$M_f(t) = M_f(0) + |t|^{\frac{n}{1}-1} f(0)\,\theta(t) \qquad |t| \quad \text{small}$$

when θ is a "Heaviside function" , independant of f . By transposition we then get all σ invariant distributions on E . In particular for χ a unitary character of k^* and $s \in \mathbb{C}$, put

$$Z_f(\chi,s) = \int_E f(y)\, \chi(Q(y))\, |Q(y)|^{s-\frac{n}{2}}\, dy , \quad \mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2} - 1$$

We then prove that Z_f extends to a meromorphic function and has a functional equation .

This can be applied to the study of the intertwinning operators for the degenerate serie of representations of G associated to a maximal parabolic subgroup. In particular we get a criteria for irreducibility in the unitary case .

A. SILBERGER : KNK <u>for a simply connected p-adic group</u> .

B. Kostant has proved in his paper "On Convexity, the Weyl Group and the Iwasawa Decomposition" , Ann. Ecole Norm. Sup. (1974) (cf. also a talk here, 1973) that any semi-simple Lie group has a KNK decomposition (K maximal compact and N the unipotent radical of a minimal parabolic subgroup) . Moregenerally, let $C(a)$ denote the convex closure of the Weyl group orbit of $a \in A$, a maximal torus of G . Then $Ka'NK = \bigcup_{a=a'\epsilon} KaK$ for this talk we announced and sketched the proof of p-adic analogues for these results .

Let $\mathbb{R}$ be a locally compact p-adic field and $G = \underset{\sim}{G}(\mathbb{R})$ the group of $\mathbb{R}$-points of a simple s.c. alg. gp./$\mathbb{R}$. Let $A = A(\mathbb{R})$ be a maximal split torus of G and $M = Z_G(A)$. Let K be a maximal compact subgroup of G associated to A . Write $M = \cap \operatorname{Ker}(\chi)$ (all nat-chars χ of M) . The lattice $M/{}^{\circ}M$ injects into the "Lie algebra" $\mathfrak{a} = M/{}^{\circ}M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. The Weyl group $W = N_G(A)/Z_G(A)$ acts on $\mathfrak{a}$. Choose positive roots and let M^+ and $+M$ be pull-backs to M of respectively positive and dual characters in $\mathfrak{a}$. Let $P = MN$ be the minimal parabolic subgroup corresponding to the roots chosen. Let $C(m) = \{m' \epsilon M \mid H(m')$ lies in the convex closure of the Weyl group orbit of $H(m)$ in $\mathfrak{a}\}$, $H : M \to \mathfrak{a}$ the canonical mapping. THM $Km'NK = \bigcup_{m=m'\epsilon\,(m)} KmK$; in particular $G = KNK$.

There is no hope for a result like this if G is not simply connected .

For the proof we observed first that it is sufficient to check that

$Km_1K \cap Km_2NK \neq \emptyset \Leftrightarrow C(m_1) \supset C(m_2)$ for $m_1, m_2 \in M^+$.

<u>Lemma</u> : Let $m_1, m_2 \in M^+$. Then $C(m_1) > C(m_2) \Leftrightarrow m_1 m_2^{-1} \in +M$.

<u>Lemma</u> (Bruhat-Tits) : Let $m_1, m_2 \in M^+$. Then $Km_1K \cap Km_2N \neq \emptyset \Rightarrow m_1 m_2^{-1} \in +M$.

<u>Lemma</u> : If $+M \subset N \cap K.\bar{N}.K.$ ($\bar{N}$ opposite to N), then $Km_1K \cap Km_2\bar{N} \neq \emptyset$ for all $m_1, m_2 \in M^+$ such that $m_1 m_2^{-1} \in +M$; induced $Km_1K \cap Km_2N \neq \emptyset$, too.

<u>Lemma</u> : $+M \subset N \cap K.\bar{N}.K.$

Taking Bruhat-Tits work into consideration, it is sufficient to check the last lemma for split groups, i.e. for groups with a reduced root structure. We indicated in the lecture how one could prove the last lemma by an induction on the semi-simple rank of G.

M. VERGNE : <u>Continuation analytique de la série discrète holomorphe</u>.
(Travail en collaboration avec Hugo ROSSI)

Soit $\mathfrak{g} = k \oplus \mathfrak{m}$ une algèbre de Lie simple, telle que le centre de k soit de dimension 1. Soit $k = [k,k] \oplus \mathbb{R}Z$, et $\mathfrak{m}^C = \mathfrak{m}^+ + \mathfrak{m}^-$ où $\mathfrak{m}^- = \{X \in \mathfrak{m}^C, [Z,X] =$ Soit τ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\Delta_M^+ = \{\alpha \; ; \; \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{m}^+\}$. Soit $\Phi = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\} \subset \Delta_M^+$ avec γ_2 = la plus grande racine, et γ_i la plus grande des racines orthogonale à $(\gamma_i+1, \ldots, \gamma_r)$ puisqu'à épuisement. Soit $E_{\gamma_i} + E_{-\gamma_i} = X_{\gamma_i}$ et $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R} X_{\gamma_i}$, et $\mathfrak{g} = k \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ la décomposition d'Iwasawa. Soit c la transformée de Cayley ; on a $c(H_{\gamma_i}) = X_{\gamma_i}$; on note $\alpha_i = c(\gamma_i)$, soit p = mult. de $\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}(\alpha_i+\alpha_j)}_{i \neq j}$, s = mult. de $\mathfrak{n}^{\frac{\alpha_i}{2}}$.

Soit G le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et $K = [k,k] \exp \mathbb{R} Z$ le groupe analytique d'algèbre de Lie k et $Z(G)$ le centre de G ; soit λ un caractère unitaire de K, on pose $\lambda = \langle \lambda , H_\gamma \rangle$ soit $\mathcal{O}(\lambda) = \{\varphi, C^\infty$ sur G, telles que $\varphi(gk) = \lambda(k)^{-1} \varphi(g)$, et $X.\varphi = 0$ $\forall X \in \mathfrak{m}^-\}$ (où si $X \in \mathfrak{g}$ $(X.\varphi)(g) = \frac{d}{dt} \varphi(g \operatorname{expt} X)\big|_{t=0}$). On sait (Harish-Chandra) que si

$$H(\lambda) = \{\varphi \in \mathcal{O}(\lambda) \text{ telles que } \|\varphi\|_\lambda^2 = \int_{G/Z(G)} |\varphi(g)|^2\, dg < +\infty\}$$

$H(\lambda) \neq 0$ si et seulement si $\lambda + < \rho, H_{\gamma_2} > < 0$, dans ce cas la représentation unitaire T_λ du groupe G par translations à gauche est un membre de la série discrète relative de G.

Théorème : Si $- < \rho, H_{\gamma_r} > \leq \lambda < -\frac{(r-1)p}{2} \leq 0$ (r est le rang alors il est possible de définir une nouvelle norme $\|\varphi\|_\lambda$ sur $\mathcal{O}(\lambda)$, tel que si $H(\lambda) = \{\varphi \in \mathcal{O}(\lambda)\ \|\varphi\|_\lambda < +\infty\}$ soit $\neq 0$, et T_λ unitaire. Pour les r points $\lambda_1 = -<\rho, H_{\gamma_r}>$ $\lambda_i = \lambda_1 + (i-1)\frac{p}{2}$ les normes $\|\varphi\|_\lambda$ sont interprétés comme des normes du type espaces de Hardy partiels (on a $-\frac{(r-1)p}{2} = \lambda_r + (1 + \frac{s}{2}))$.

G. Schiffmann (Strasbourg)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft