MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 16/1974

Arbeitsgemeinschaft über Teichmüller - Räume

16.4. bis 2o.4.1974

Die Frühjahrs-Arbeitstagung 1974 stand unter der Leitung von Herrn H. Helling und behandelte die Theorie der Teichmüller-Räume, wie sie vor allem von L.Ahlfors und L.Bers entwickelt wurde. Im wesentlichen stützte sie sich auf die folgende Literatur, auf die auch in den Vorträgen verwiesen wird.

[1] L.Ahlfors - L.Bers: Riemann's Mapping Theorem for Variable Metrics, Ann.Math. 72(2) (196o) p.385-4o4, abgekürzt [A- B]

[2] L.Ahlfors: Some Remarks on Teichmüller's Space of Riemann Surfaces. Ann.Math. 74 (1) 1961, p.171-191, abgekürzt [A]

Es handelt sich darum, dem Teichmüller-Raum der abgeschlossenen Riemannschen Flächen vom festgehaltenen Geschlecht $g\geq 2$, der topologisch isomorph zu einer 6g-6-Zelle ist, mit Hilfe der Bers-Koordinaten eine komplexe Struktur aufzuprägen.

Bedauerlicherweise wurde beschlossen, dieses Thema nicht auf der folgenden Herbsttagung zu vertiefen. So konnten die Eigenschaften des Teichmüller-Raumes und seines Quotienten, des Riemann-Raumes, nur kurz referiert werden und auch der Zusammenhang der Bers-Koordinaten mit den natürlichen 3g-3 Moduln aus der Periodenmatrix für nicht-hyperelliptische Flächen hätte zur Klärung mehr Zeit gebraucht.

Teilnehmer

R. Bernat, Hamburg
R. Böhme, Göttingen
T. tom Dieck, Saarbrücken
P. Draxl, Bielefeld
W. Fischer, Bremen
A. Frey, Erlangen
W.D. Geyer, Erlangen
E. Gottschling, Mainz

B.Hain, Erlangen
H. Helling, Bielefeld
H.C. Im Hof, Bonn
J. Hurrelbrink, Bielefeld
M. Knebusch, Regensburg
M. Kneser, Göttingen
H. Kraft, Bonn
M. Lindner, Saarbrücken
E. Maus, Göttingen
J. Mennicke, Bielefeld
J. Neukirch, Regensburg
A. Pfister, Mainz
K. Pommerening, Mainz
G. Ringel, Bonn
S. Suckow, Mainz
R. Vogt, Saarbrücken
K. Wohlfahrt, Heidelberg

Es folgen die Vortragsauszüge in derselben Reihenfolge, in der die Vorträge während der Tagung gehalten wurden.

Vortragsauszüge

M.KNESER: **Beltrami-Differentialgleichungen und Abhängigkeit der Lösung von im Beltrami-Koeffizienten steckenden Parametern**

Es wurden quasi-konforme Abbildungen auf der komplexen Zahlenebene eingeführt als Abbildungen, deren lokaler Verzerrungskoeffizient global beschränkt ist, weiter der Raum der auf $\mathbb{C}$ meßbaren und durch k<1 beschränkten Funktionen μ, die Beltramikoeffizienten und für p>2 L_p, der Raum der auf $\mathbb{C}$ p-integrierbaren Funktionen.
Für meßbares μ mit $|\mu| \leq k < 1$ und $\sigma \in L_p$ wurde die inhomogene Beltrami-Differentialgleichung

$$\omega_{\bar z} = \mu\, \omega_z + \sigma$$ untersucht.

Sei für p>2 B_p der Banachraum aller auf $\mathbb{C}$ stetigen Funktionen f mit: f(0)=0, f_z und $f_{\bar z}$ existieren als verallgemeinerte Ableitungen und liegen in L_p. B_p bekommt die Norm (abweichend wie in A-B: p387):

$$\|f\|_{B_p} = \|f_z\|_p + \|f_{\bar z}\|_p$$

Dann gibt es für obige Differentialgleichung für bestimmtes p>2, [siehe Vortrag 2], eine eindeutig bestimmte Lösung in B_p.
Dabei wurden die Existenz und Eigenschaften der singulären Integraloperatoren P und T ohne Beweis benutzt. Sie sind

Gegenstand des nächsten Vortrages.

Außerdem gilt: Hängen μ und σ stetig bzw. differenzierbar, bzw. reell-, bzw. komplexanalytisch von Parametern ab, so auch ω als Element von B_p.

Hat überdies μ kompakten Träger, so hat $f_{\bar z} = \mu f_z$ genau eine stetige Lösung f mit $f_z - id \in L_p$, $f(0)=0$, dieses f ist unabhängig von p und ein Homöomorphismus von $\mathbb{C}$ auf sich.

Literatur: [A-B]

E.MAUS: Verallgemeinerte Ableitungen, Hilbert-Transformation

Für stetige Funktionen $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ wurden verallgemeinerte Ableitungen f_z und $f_{\bar z}$ definiert und ein Approximationssatz durch C_c - Funktionen bewiesen.

Dann wurden die im vorigen Vortrag benutzten Integraloperatoren

$$P:L_p \simeq B_p \quad \text{und} \quad T:L_p \to L_p$$

für $p>2$ eingeführt. Definition:

$$Ph(z)= \frac{1}{2\pi i} \int h(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta}\right)d\zeta\wedge d\bar\zeta \qquad \text{für h aus } L_p$$

$$Th(z)=\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z|\geq\varepsilon} \frac{h(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\, d\zeta\wedge d\bar\zeta \qquad \text{für h aus } C_c^2$$

Th existiert nur f.ü. als Cauchyscher Hauptwert.

Es gilt: (1) T läßt sich fortsetzen zu einem stetigen und beschränkten Operator auf L_p, $p\geq 2$, d.h.: $\|Th\|_p \leq C_p \|h\|_p$

(folgt aus der Calderón-Zygmund-Ungleichung)

(2) Ph ist Hölderstetig mit dem Hölderexponenten $1-\frac{2}{p}$

(3) $\frac{\partial}{\partial \bar z} \circ P = id$, $\frac{\partial}{\partial z} \circ P = T$

(4) T ist Isometrie auf L_2 und $|T|_p \to 1$ für $p\to 2$

(5) P ist topologischer Isomorphismus von L_p auf B_p.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Das p im Existenz- und Eindeutigkeitssatz im Vortrag 1 muß so gewählt werden, daß $p > 2$ und $k \cdot |T|_p < 1$ ist. Nach (4) ist das möglich.

Literatur: [3] L. Ahlfors: Lectures on Quasi-conformal Mappings, von Nostrand Mathematical Studies, Nr. 10, Princeton, New Jersey, 1966

R. BÖHME: Über die Ungleichung von Calderón-Zygmund

Sei $C_c^i(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Raum der i-fach stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit kompakten Träger, entsprechend $C_c^i(\mathbb{C}, \mathbb{R})$.

Sei $h \in C_c^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Es gilt der folgende Satz: Das Integral

$$Th(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|z-\zeta| \geq \varepsilon} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2}\, dxdy$$

existiert für alle $p \geq 2$ als Cauchyscher Hauptwert und für alle $p \geq 2$ $\exists$ $C_p < \infty$ mit $\|Th\|_{L_p} \leq C_p \cdot \|h\|_{L_p}$.

Angegeben wurde, daß sogar $p > 1$ angenommen werden darf.

Der Beweis wurde in drei Schritten durchgeführt.

Da $\int h(z) \frac{1}{(\zeta - z)^2}\, dxdy$ die Faltung von h mit dem Kern $\frac{1}{z^2}$ ist, betrachtet man erst für $f \in C_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ den Kern $\frac{1}{x}$, dann für $f \in C_c^2(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ den Kern $\frac{1}{z \cdot |z|}$ und zum Schluß den eigentlichen Operator T d.h. für $f \in C_c^2(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ den Kern $\frac{1}{z^2}$.

Literatur: Siehe Vortrag 2

W.D.GEYER: Kettenregel bei quasikonformen Abbildungen und Gruppenstruktur auf der Einheitskugel im Raum der Beltramkoeffizienten

Die bekannten Kettenregeln für die Differentiation von Kompositionen stetig differenzierbarer Funktionen nach z und $\bar{z}$ wurden übertragen auf die Bildung verallgemeinerter Ableitungen, die für $p \geq 2$ lokal L_p-integrierbar sein sollen.

Auffallend war, daß für die Existenz solcher Ableitungen, die dann lokal in gewissen L_r liegen, in der Komposition $f \circ g$ quasikonform sein muß. Es gilt

$$(f \circ g)_z = (f_z \circ g) g_z + (f_{\bar z} \circ g) \cdot \overline{g}_z$$

$$(f \circ g)_{\bar z} = (f_z \circ g) g_{\bar z} + (f_{\bar z} \circ g) \cdot \overline{g}_{\bar z}$$

Als Anwendung wurde die Vieldeutigkeit gewisser Lösungen der Beltrami-Differentialgleichung studiert und eine kanonische Gruppenstruktur auf dem Raum der meßbaren Funktionen μ eingeführt. μ muß beschränkten Träger haben und $\|\mu\|_\infty < 1$ erfüllen.

Es gilt die Formel: $\rho \bullet f^\lambda = \frac{\mu - \lambda}{1 - \bar{\lambda}\mu} \cdot \left(\frac{f^\lambda_z}{\overline{f^\lambda_z}}\right) \Leftrightarrow f^\mu = f^\rho \circ f^\lambda \Leftrightarrow \mu = \rho \bullet \lambda$

Man beachte, daß in dieser Formel kein $\bar{\mu}$ vorkommt, was später für die Definition der Holomorphie komplexwertiger Funktionen auf dem Teichmüllerraum von fundamentaler Wichtigkeit ist.

A.PFISTER: Existenz und Eindeutigkeit normierter quasikonformer Abbildungen der Ebene und des Einheitskreises auf sich

Die Existenz μ-konformer Homöomorphismen der Ebene und des Einheitskreises auf sich werden für allgemeine μ, also nicht notwendig mit kompaktem Träger, gezeigt. Da die Lösung bis auf konforme Abbildung eindeutig bestimmt ist, wird durch Festsetzung von $\omega^\mu(0)=0$, $\omega^\mu(1)=1$ und $\omega^\mu(\infty)=\infty$ die Eindeutigkeit der Lösung $\omega^\mu_{\bar z} = \mu \cdot \omega^\mu_z$ für $\omega^\mu : \Omega \simeq \Omega$ erreicht. Dasselbe tut die Normierung $W^\mu(0)=0$, $W^\mu(1)=1$ für μ-konforme Homöomorphismen der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe auf sich.

- 6 -

Sei $\mu=0$ für $|z|\geq 1$. Dann gilt für $|z|=1$ die Abschätzung

$$c^{-1} \leq |\omega^{\mu}(z)| \leq c.$$

Für allgemeines μ gilt

$$\|\omega^{\mu}\|_{R,p} \leq c(R) \text{ für alle } R,\ 0<R<\infty ,$$

dabei ist $\|\omega\|_{R,p} = \sup\limits_{\substack{|z_1|\leq R\\ |z_2|\leq R}} \dfrac{|\omega(z_1)-\omega(z_2)|}{|z_1-z_2|^{1-\frac{2}{p}}} + \left(\int\limits_{|z|\leq R} |\omega_{\bar{z}}|^{p}\,dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$

Dieses Resultat gewinnt man aus einer sphärischen Hölderungleichung.

H.KRAFT: Stetige Abhängigkeit μ-konformer, normierter Homöomorphismen ω^{μ} von Parametern, von denen der Beltramkoeffizient stetig abhängt

Aus der Abschätzung $\|\omega^{\mu}-\omega^{\nu}\|_{B_{R,p}} \leq c(R)\cdot\|\mu-\nu\|_{\infty}$, in der $c(R)$ auch noch von k und p abhängt, wobei $k<1$ gemeinsame obere Schranke für $\|\mu\|_{\infty}$ und $\|\nu\|_{\infty}$ ist, und der Abschätzung für die sphärische Distanz

$$[\omega^{\mu}(z),\omega^{\nu}(z)] \leq c\|\mu-\nu\|_{\infty} \quad \text{(unabhängig von z)}$$

folgt unter Zuhilfenahme der Sätze von Ascoli und der Tatsache, daß $L_2(\Omega)$ schwach lokal kompakt ist: $\mu_n\to\mu$ f.ü. $\Rightarrow \omega^{\mu_n} \to \omega^{\mu}$ in der $B_{R,p}$-Norm, d.h.: $\|\omega^{\mu_n} - \omega^{\mu}\|_{B_{r,p}} \to 0$.

H.C. IMHOF: Differenzierbare und holomorphe Abhängigkeit quasikonformer Abbildungen $\omega^{\mu(t)}$ bei entsprechender Abhängigkeit von $\mu(t)$

Es wurde folgendes gezeigt: Unter gewissen Voraussetzungen an a und $\alpha(s)$ als beschränkte meßbare Funktionen von z existiert

$$\theta^{a} = \lim_{s\to 0} \frac{\omega^{sa+s\alpha(s)} - z}{s} \quad \text{in } B_{R,p} \text{ für alle } R>0$$ und explizit gilt:

$$\theta^{a}(z) = P\,a(z) - zP\,a(1)$$

falls a und α in einer Umgebung von ∞ verschwinden.

Im Unterschied zu [A-B], p. 400, wird für a und α, die für kleine $|z|$ verschwinden, gesetzt:

$$\theta^a(z) = -z^2(P\tilde{a})(\tfrac{1}{z}) + zP\tilde{a}(1), \quad \tilde{a}(z)=a(\tfrac{1}{z})\cdot\frac{z^2}{(\bar{z})^2}.$$

Die Bildung von $P\hat{a}$ ist überflüssig.

Es konnte auch nur eine modifizierte Abschätzung ([A-B]-Lemma 22i)) gezeigt werden:

$$|\theta^a(z)| \leq c\cdot\|a\|_\infty \; (|z|^{1-\frac{2}{p}} + |z|^{1+\frac{2}{p}})$$

Aber auch daraus folgt [A-B], Lemma 22iii :

$$\dot{\theta} - \theta^{\mu,a} = O(|\omega^\mu|^{1+\frac{2}{p}}) \quad \text{und damit} \quad \theta = \theta^{\mu,a}.$$

Es gilt der folgende wichtige Satz (Th 11. in [A-B]): Falls μ holomorph von komplexen Parametern $(\tau_1,\dots,\tau_n)$ als Element in L_∞ abhängt, dann hängt ω^μ holomorph als Element des Banachraumes $B_{R,p}$ von diesen Parametern ab.

Für $\mu\in L_\infty$ $(|z|<1)$ und W^μ gilt die analoge Aussage nur für reell-analytisch statt holomorph.

P.DRAXL: Die analytischen Funktionen $\phi[\nu]$, ihre Abhängigkeit von ν und eine Kennzeichnung des Nullraumes N

Sei E die offene Kreisscheibe, λ auf E meßbar und $\|\lambda\|_\infty<1$. $f^\lambda: E\to E$ sei λ-konform mit den Fixpunkten bei $1,-1,i$. Damit ist f^λ 1-deutig bestimmt.

Seien μ,ν meßbar und $\|\mu\|_\infty<1$, $\|\nu\|_\infty<\infty$, $t\in\mathbb{R}$. Die"Richtungsableitung" wird definiert als

$$\dot{f}^\mu[\nu] = \lim_{t\to 0}\frac{f^{\mu+t\nu}-f^\mu}{t} \quad \text{und}$$

$$\dot{f}[\nu] = \dot{f}^o[\nu].$$

Für $\phi[\nu] = \dot{f}[\nu]+i\,\dot{f}[i\nu]$ gilt:

$\phi[\nu]$ ist holomorph in E, $\phi[\nu](z)=0$ für $z=+1,-1,i$ und $\nu\mapsto\phi[\nu]$ ist

- 8 -

komplex antilinear, während $\nu \mapsto \dot{f}[\nu]$ reell linear ist.

Es gibt eine explizite Darstellung von $\dot{f}[\nu]$:

$$\dot{f}[\nu](\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_E \frac{\nu(z)\,dxdy}{z-\zeta} - \frac{1}{\pi}\int \frac{\zeta^3\bar{\nu}(z)\,dxdy}{1-\bar{z}\zeta} + M(\zeta) \;.$$

$M(\zeta)$ ist quadratisches Polynom der Form $a+2bi\zeta - \bar{a}\,\zeta^2$ mit $b\in\mathbb{R}$.

Mit N bezeichnet man den Unterraum von $L^\infty(E)$ aller ν mit $\phi[\nu]=0$.

Es gilt: $\phi[\nu]=0 \Leftrightarrow \dot{f}[\nu](\zeta) = 0$ für alle $\zeta\in$ RdE

$$\Leftrightarrow \int_E \nu(z)F(z)\,dxdy=0 \quad \text{für alle } F \text{ mit}$$

F holomorph in E und $\int_E |F(z)|\,dxdy<\infty$.

J.HURRELBRINK: Kennzeichnung der als $\phi[\nu]$ auftretenden analytischen Funktionen

Es sei $\mathfrak{M}_1=\{\phi[\nu] \mid \|\nu\|_\infty<\infty\}$ und $\mathfrak{M}_2=\{\phi:E\to\mathbb{C},\ \phi$ holomorph in E, $\phi(z)=0$ für $z=+1,-1,i$ und $|\phi'''(z)| \le C\cdot(1-|z|^2)^{-2}\}$.

Wegen $\phi=\phi[\nu]$ für $\nu=-\frac{1}{4}\,\phi'''\cdot(1-|z|^2)^2$, $\phi\in\mathfrak{M}_2$ folgt die Aussage $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_2$.

Aus der expliziten Darstellung von $\dot{f}[\nu]$ folgt für $\phi\in\mathfrak{M}_2$ und obiges ν:

$$\dot{\rho}[\nu] = 0 \quad \text{falls} \quad \rho^\mu=\frac{|f^\mu_z|^2-|f^\mu_{\bar z}|^2}{(1-|f^\mu|^2)^2} \quad \text{ist und} \quad \dot{\rho}[\nu]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,(\rho^{t\nu}-\rho^{0}).$$

K.WOHLFAHRT: Deformationen diskreter Untergruppen in $SL_2(\mathbb{R})$ und reelle Koordinaten auf dem Teichmüller-Raum

Sei $g\ge 2$, $\Omega:=SL_2(\mathbb{R})$, $H=\{z,\ \mathrm{Im}\ z>0\}$,

$\Sigma = \{\Gamma<SL_2(\mathbb{R}),\ \Gamma$ diskret,
$S=\Gamma\backslash H$ ist kompakte
Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g\}$

Man fixiere Γ_o aus Σ mit Erzeugern ${}^oA_1, \dots {}^oA_{2g}$ und der Standard-Relation ${}^oA_1\ {}^oA_2\ {}^oA_1^{-1}\ {}^oA_2^{-1} \dots {}^oA_{2g}^{-1} = 1.$

$\tilde{T} := \{\ \theta : \Gamma_o \cong \Gamma,\ \ \Gamma \in \Sigma\}.$

Setze $\theta_1 \sim \theta_2$ falls $\theta_1 \circ \theta_2^{-1}$ von einem inneren Automorphismus von $\Omega^{\bullet}$ herrührt. Dann ist $T = \tilde{T}/\sim$ der Teichmüller-Raum der Riemannschen Flächen vom Geschlecht g. Das entspricht der Einteilung der Riemannschen Flächen in Klassen konform äquivalenter Flächen.

Sei $A_i = \theta({}^oA_i) = {}^oA_i{}^{\theta}$. In jeder Aequivalenzklasse τ gibt es genau ein θ, so daß A_1 die Fixpunkte 0 und ∞ und A_2 1 als attraktiven Fixpunkt hat (d.h.: $\lim\limits_{n \to \infty} A_2^n(z) = 1$ für $z \in H$.)

Es sei M die Menge der 2g-tupel $(A_1, \dots, A_{2g})$ aus Ω^{2g}, die obige Standard-Relation und außerdem $A_1(0)=0$, $A_1(\infty)=\infty$, $A_2(1)=1$ und $C = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}$ nicht parabolisch erfüllen.

Aus einem Matrizenlemma über $\mathbb{C}$ folgt: M ist 6g-6 dimensionale reellanalytische Mannigfaltigkeit. Lokale Koordinaten sind geeignete Quotienten aus den Koeffizienten der $A_3, \dots, A_{2g}$.

Es folgt: Jedes normierte $\theta \in \tilde{T}$ liefert einen Punkt von M, diese Abbildung identifiziert T mit einer Untermenge in M. Ein späterer Vortrag soll zeigen, daß T offen in M liegt.

H.HELLING: <u>Der Hauptsatz von Teichmüller</u>

Es wird der Hauptsatz von Teichmüller über die Existenz und Eindeutigkeit einer extremalen quasikonformen Abbildung zwischen zwei markierten Riemannschen Flächen (S,α) und (S',α') vom Geschlecht $g \geq 2$ gezeigt. Die Markierung α ist ein Isomorphismus von Γ_o [siehe Vortrag 10] mit $\pi_1(S)$. Der Satz besagt: Es gibt eine quasikonforme Abbildung f von (S,α) nach (S',α') und in $[f]$ gibt es genau eine Teichmüller-Abbildung, d.h. eine Lösung der Beltramidifferentialgleichung $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ mit $\mu = k \cdot \frac{\bar{\vartheta}}{|\vartheta|}$, wo ϑ ein holomorphes nicht verschwindendes quadratisches Differential auf S ist. Da die maximale Dilatation K für diese Abbildung minimal ist, definiert $\log K$ eine Metrik auf T.

Außerdem ist das quadratische Differential ϑ bis auf einen positiven reellen Faktor bestimmt und da es $6g-6$ reell-linear unabhängige quadratische Differentiale $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{6g-6}$ gibt, so wird durch

$$\mu = \Psi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{6g-6}) = |\zeta| \cdot \frac{\sum_{i=1}^{6g-6} \zeta_i \vartheta_i}{\left| \sum_{i=1}^{6g-6} \zeta_i \vartheta_i \right|}$$

eine stetige Abbildung Ψ der Einheitskugel im $\mathbb{R}^{6g-6}$ in den Raum $\widetilde{M}$ der Beltramikoeffizienten definiert.

Damit ist aber auch eine quasikonforme Abbildung f^{μ} und durch f^{μ} ein Punkt im Teichmüllerraum der markierten Riemannschen - Flächen bestimmt. [siehe Vortrag 12]. Nach [4] {L.Bers: Quasiconformal mappings in: Analytic Functions, No. 24 Princeton Mathematical Series, 1960} gilt: Die Komposition obiger Abbildungen ist ein Homöomorphismus der Einheitskugel im $\mathbb{R}^{6g-6}$ auf den Teichmüller-Raum.

G.FREY: Beltrami-Differentiale und quadratische Differentiale auf Riemannschen Flächen

Sei $E = \{z, |z| < 1\}$ und Σ wie in [Vortrag 10, H ersetzt durch E], also für $\Gamma\in\Sigma$ ist $S=E/\Gamma$ eine kompakte Riemannsche Fläche S vom Geschlecht $g\geq 2$. Es sei

$B(\Gamma) = \{\nu\in L_\infty(E),\ \|\nu\|<\infty,\ (\nu o A)\cdot\overline{A'} = \nu\cdot A'$ für alle $A\in\Gamma\}$,

dann ist $B_1(\Gamma)$ die Menge der Beltramikoeffizienten für S.
Sei $Q(\Gamma)$ die Menge der quadratischen Differentiale auf S und $\varphi\in Q(\Gamma)$. Dann ist die Funktion auf $\mathbb{E}$:

$$z \mapsto \frac{1}{2}\int_{z_o}^{z}\varphi(\zeta)(z-\zeta)^2 d\zeta+\theta(z)$$

in Π_2, (siehe Vortrag 9).
Andererseits ist $\phi[\nu]'''$ für $\nu\in B(\Gamma)$ ein quadratisches Differential auf S. Sei $N(\Gamma)=\{\nu,\phi[\nu]'''=0\}$.
Es gilt der Satz:
$\phi[\nu]'''$ ist C-antilineare Bijektion von $B(\Gamma)/N(\Gamma)$ auf $Q(\Gamma)$. Also folgt $\dim_{\mathbb{R}} B(\Gamma)/N(\Gamma) = 6g-6$. Sei $\mu\in B_1$ und f^μ μ-quasikonform. Dann gilt für $A\in\Gamma$: $f^\mu oA=A^\mu of^\mu$ mit einem eindeutig bestimmten $A^\mu\in\Omega^\bullet$. Damit ist durch

$$\theta^\mu:\Gamma \to \Gamma^\mu,\qquad A \mapsto A^\mu = f^\mu oAo(f^\mu)^{-1}$$

ein Punkt im Teichmüllerraum definiert. Sei $\dot{A}^\mu[\nu]=\lim\limits_{t\to o}\frac{1}{t}(A^{\mu+t\nu}-A^\mu)$.
Es ist $\dot{A}[\nu]=\dot{A}^o[\nu]$ holomorph und $\nu\in N(\Gamma)$ gleichbedeutend mit $\dot{A}[\nu]=0$ für alle $A\in\Gamma$.

E.GOTTSCHLING: <u>Komplexe Struktur auf dem Teichmüller-Raum und die Holomorphie der Bers-Koordinaten</u>

Seien $T=T_g$ und $M=M_g$ wie im Vortrag 10. T und M sind 6g-6-dimensionale reell-analytische Mannigfaltigkeiten und T liegt offen in M. Ein Punkt $x\in T$ entspricht einer Aequivalenzklasse von Abbildungen $\theta:\Gamma_o\tilde{\to}\Gamma$.

Nach Vortrag 12 gilt für $B=B(\Gamma)$ und $N=N(\Gamma)$: $\dim_{\mathbb{C}} B/N=n=3g-3$. Sei $\{\overline{v}_1,\ldots,\overline{v}_n\}$ eine Basis von B/N, v_i aus B und sei Δ eine genügend kleine Umgebung der 0 in $\mathbb{C}^n$, sodaß

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\zeta_i v_i \text{ für alle } \zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in\Delta \text{ in } B_1 \text{ liegt.}$$

Sei f^μ Lösung von $f_{\bar{z}}=\mu f_z$, θ^μ sei die Abbildung von Γ_o nach Γ^μ, die ein $a\in\Gamma_o$ nach $f^\mu\circ\theta(a)\circ(f^\mu)^{-1}$ aus Γ^μ abbildet. Damit haben wir eine Abbildung von Δ nach M konstruiert, sodaß die Real- und Imaginärteile von ζ lokale reellanalytische Parameter von Γ um den Punkt x bilden.

Der Satz von Bers sagt nun aus, daß diese ζ_i, $i=1\ldots n$, auf T eine komplexe Struktur definieren. Siehe [A, p.184-186], dabei wird für θ aus T definiert: Eine Funktion F auf T ist genau dann komplexanalytisch, falls $F(\theta^\mu)$ komplexanalytisch als Funktion von μ in einer Umgebung von $\mu=0$ ist. Eine Funktion H auf B ist genau dann komplexanalytisch, falls $\dot{H}(\mu)[\nu]$ existiert, stetig von μ abhängt und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\dot{H}(\mu)[i\nu]=i\dot{H}(\mu)[\nu]$ erfüllt.

W.FISCHER: Die Teichmüllersche Modulgruppe als Gruppe isometrischer, (biholomorpher) Abbildungen des Teichmüllerraumes auf sich

Die Teichmüllersche Modulgruppe $M_g^{\bullet}$ ist der Quotient aller Automorphismen von $\pi_1(S_o)$ nach den inneren Automorphismen. Sie operiert kanonisch auf dem Teichmüller-Raum. Bezüglich der Teichmüllermetrik ist diese Operation isometrisch, außerdem eigentlich diskontinuierlich.

Leider wurde ohne Beweis angegeben, daß sie auch bezüglich der Bers-Koordinaten [siehe Vortrag 13] biholomorph operiert und damit $M_g^{\bullet}$ sowohl die Gruppe der Isometrien als auch der holomorphen Automorphismen von T ist (Royden). Der Riemann-Raum R ist als Quotient von T nach $M_g^{\bullet}$ normaler komplexer Raum der Dimension 3g-3 ($g\geq 2$). Kravetz fand, daß T negative Krümmung besitzt und noch folgende bemerkenswerte Eigenschaft gilt: Sei G endlich Untergruppe von $M_g^{\bullet}$. Dann gibt es eine nicht-leere Menge gemeinsamer Fixpunkte.

Rauch untersucht den singulären Ort von R_g, $g\geq 2$. Für g=2 liefert die algebraische Kurve $y^2=x^6-x$ den einzigen singulären Punkt (Igusa). Für g=3 besteht der singuläre Ort aus den hyperelliptischen Flächen, die mehr Automorphismen als die kanonische Involution besitzen.

M.LINDNER: Holomorphie der Periodenmatrix

Wir gehen von einer kompakten Riemannschen Fläche $S_o=\Gamma\backslash E$ vom Geschlecht $g\geq 2$ aus, die uns den Nullpunkt τ_o im Teichmüller - Raum T darstellt. Einen Punkt τ in T kann ich dann darstellen durch eine markierte Riemannsche Fläche $[S,f_\tau]$, siehe Vortrag 11, dabei fassen wir f_τ als Homöomorphismus von S_o mit S auf.

Dann gilt nach [5, siehe Theorem I+II]:

1) zu $\tau\in T$ existiert ein beschränkter Jordanbereich $D(\tau)$ in $\mathbb{C}$. $D(\tau)$ läßt eine Parameterdarstellung $\sigma(z,\tau)$, $0\leq|z|\leq 1$ zu, die für festes z holomorph in τ ist (T habe die Bers-Koordinaten um τ_o).

2) Es gibt 2g biholomorphe Abbildungen $A_1(\tau),..A_g(\tau), B_1(\tau),..B_g(\tau)$,

die die Standardrelation erfüllen, und eine Gruppe $\Gamma(\tau)$ erzeugen, für die gilt: $S(\tau)=\Gamma(\tau)\backslash D(\tau)$ ist kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g, $S(\tau_0)$ biholomorph zu S_0, $S(\tau)$ entsprechend zu S und es gibt $f(\tau)$, sodaß $[S(\tau), f(\tau)]$ gleich τ ist.

3) $M=\{(z,\tau),\ z\in D(\tau),\ \tau\in T\}$ ist offen in $\mathbb{C}^{3g-2}$.

4) Auf M gibt es 5g-5 holomorphe Funktionen ϕ_i, die für alle τ den Körper der meromorphen Funktionen von $S(\tau)$ erzeugen.

Weiter kann man zeigen, daß es auch g auf M holomorphe Funktionen $p_k(z,\tau)$ gibt, die das Transformationsverhalten abelscher Differentiale haben und für alle τ auf $S(\tau)$ eine Basis für die normalisierten abelschen Differentiale liefern.

Ist $\delta_{ik}=\int\limits_{\gamma_i(\tau)} p_k(\zeta,\tau)d\zeta$ und $Z_{ik}(\tau)=\int\limits_{\delta_i(\tau)} p_k(\zeta,\tau)d\zeta$, $\gamma_i(\tau)$ und $\delta_i(\tau)$ passende Integrationswege, so gilt der folgende Satz:

Die Abbildung $\tau\longmapsto Z=(Z_{ij}(\tau))$ ist holomorphe Abbildung des Teichmüllerraumes in den Raum aller Siegelmatrizen. Wenn die Menge $\{p_i(z,\tau_0)\otimes p_j(z,\tau_0)\}$ für $i\in I, j\in J$ eine Basis der quadratischen Differentiale von $S(\tau_0)$ bildet, so gilt in der Nähe von τ_0 : τ ist auch umgekehrt durch diese $\{Z_{ij}(\tau), i\in I, j\in J\}$ eindeutig bestimmt.

Literatur: [5]: L. Bers: On Moduli of Riemann Surfaces, ETH Zürich, Lecture notes, 1964

Martin Lindner (Saarbrücken)