MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 17/1974

Mathematische Logik

21.4. bis 27.4.1974

Die diesjährige Logiktagung stand wieder unter der Leitung von H. Hermes (Freiburg) und K.Schütte (München). Die Tagung wurde von 45 Teilnehmern besucht, darunter auch von Teilnehmern aus Frankreich, Großbritannien, Italien, den Niederlanden, Norwegen, Polen, der Schweiz und Spanien.

Aus den verschiedensten Gebieten der Logik wurden 27 Vorträge gehalten, die in zahlreichen Gesprächen vertieft wurden.

Teilnehmer

Altmann, P.,Aachen
Bernays, P.,Zürich
Börger, E.,Salerno
Buchholz, W., München
Carstens, H.G., Hannover
Deissler, R., Freiburg
Devlin, K., Heidelberg
Diller, J., Münster
Felgner, U., Heidelberg
Felscher, W., Tübingen
Fenstadt, J.E.,Oslo
Flannagan,T.B., Heidelberg
Flum, J., Freiburg
Fromageot, R., Aubiere
Gloede, K., Heidelberg
Guillaume, Aubiere
Heidler, K., Freiburg
Hermes, H., Freiburg
Hornung, J., Berlin
Läuchli, H., Zürich

Luckhardt,H., Frankfurt
Maaß, W., München
Mitschke, G., Darmstadt
Monk, J.D., Zürich
Müller, G.H., Heidelberg
Oberschelp, A., Kiel
Osswald, H., München
Pohlers, W., München
Prida, J.F., Madrid
Rasiowa, H., Warschau
Rauszer, C., Warschau
Rautenberg, W., Gießen
Schönfeld, W., Stuttgart
Schütte, K.,München
Schwabhäuser, W., Stuttgart
Schwichtenberg, H., Münster
Seeland, Stuttgart
Siefkes, D., Berlin
Specker, E., Zürich
Thomas, W., Freiburg
Todt,G., Kiel
Troelstra, A.S., z.Zt. Freiburg
Wainer, St.S., Leeds
Wirsing, München
Ziegler, M. Berlin

Vortragsauszüge

H. LUCKHARDT: Die realen Elemente der klassischen Analysis

Es wird gezeigt, daß das Hilbert'sche Konzept der realen und idealen Elemente in der mit intuitionistischen Prinzipien operierenden Beweistheorie auf dem Wege der Funktionalinterpretation in vollem Umfang für die klassische Analysis ($\simeq$ ZFC minus Potenzmengenaxiom) entwickelt werden kann. Für die in der Funktionalsprache formulierte klassische Analysis kann jeder beweisbaren Aussage effektiv eine ihr klassisch äquivalente Konstruktionsaussage $A^{\vee}$ zugeordnet werden, die in einem Funktionalkalkül intuitionistisch realisierbar ist.
Die realen Elemente der klassischen Analysis sind die bar-rekursiven Operationen und die in ihnen zum Ausdruck kommenden Uniformisierungen.

H. SCHWICHTENBERG: Bar Rekursion der Typen 0 und 1 führt nicht aus den primitiv rekursiven Funktionalen hinaus

Eine endliche Folge a0,...,a(n-1) von Funktionalen des Typs τ heißt gesichert (bzgl. Y vom Typ $(0 \to \tau) \to \tau$), wenn Y auf allen Fortsetzungen davon denselben Wert hat, d.h. wenn gilt $\forall b\ (\forall m<n\colon am = bm \to Ya = Yb)$. Für stetiges Y bilden also die ungesicherten Folgen einen wohlfundierten Baum. Gezeigt wird, daß für primitiv rekursives Y und $\tau = 0,1$ dieser Baum eine Tiefe $<\varepsilon_0$ besitzt. Dies gilt in dem scharfen Sinn, daß man eine in T definierbare Einbettung des Baumes in eine Standardwohlordnung eines Ordnungstyps $<\varepsilon_0$ finden kann. Daraus folgt dann leicht, daß die (Regel der) Bar Rekursion der Typen 0 und 1 nicht aus den prim.rek. Funktionalen hinausführt. (Dagegen führen bekanntlich sowohl die Regel der Bar Rekursion eines Typs der Stufe ≥ 2 als auch der Operator der Bar Rekursion vom Typ 0 aus den prim.rek. Funktionalen hinaus). Der Beweis verwendet die von Tait eingeführten unendlichen Terme und zugehörige Wertfunktionale; er läßt sich in T formalisieren.

J. HORNUNG: Über sog. logische Begründungen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Carnap'schen induktiven Wahrscheinlichkeiten $c(y|x)$ werden vermöge des Repräsentationstheorems von de Finetti als Transponierungswahrscheinlichkeiten $P_F(y|x)$ in einem Relaisexperiment interpretiert. Es zeigt sich, daß von allen Axiomen, die Carnap von seinen induktiven Wahrscheinlichkeiten fordert, nur ein einziges, nämlich das von W.E. Johnson stammende schwache Vergröberungsaxiom, nicht in jedem Falle auch schon von Transponierungswahrscheinlichkeiten erfüllt wird.

Allein das schwache Vergröberungsaxiom sondert aus der Klasse aller a-priori-Verteilungsfunktionen die Klasse der Dirichlet-Verteilungen mit den Dichten $f(p) = \beta(p|\lambda\cdot g)$ mit den Parametern $0 \leq \lambda \leq \infty$, $0 \leq g_i \leq 1$, $\Sigma g_i = 1$ aus. Für $k = 2$ (Münzwurfexperiment) läßt sich das Vergröberungsaxiom ebenfalls anwenden, wenn man zusätzliche Zufallsexperimente zur Aufspaltung eines der beiden Ergebnisse mit unbekannter Randomisierungswahrscheinlichkeit r durchführt.

J.DILLER: Die Hybridform der $^\wedge$-Interpretation

Ziel einer Interpretation der Arithmetik ist

(1) eine Abbildung $A \mapsto \exists x A^*$, so daß $\exists$ in A^* nicht auftritt, und

(2) ein Beweis des Interpretationssatzes: Wenn A herleitbar ist, so gibt es Terme b mit $\vdash A^*_x[b]$.

Beispiele sind Kleene's realizability für HA, modified realizability mr und $^\wedge$-Interpretation für HA_ω, und die Dialectica-Interpretation für HA. Der Interpretationssatz für $^\wedge$ liefert die Konservativität von $HA_\omega + \{A \leftrightarrow A^\wedge\}$ über $T_\wedge$ (das ist Gödels T, erweitert um einen beschränkten Allquantor) und die Zulässigkeit folgender Markov-Regel $\vdash \forall wB \rightarrow C \Rightarrow \vdash \exists$endl. Menge $W(\wedge w \in W \; B \rightarrow C)$ mit B,C aus $T_\wedge$.

Die Hybridform der r - und mr Realisierbarkeit ist die q-bzw. mq-Realisierbarkeit. Für diese gilt (2), aber nicht (1). Analog hierzu definieren wir eine Hybridform ' der $^\wedge$-Interpretation, für die wir (2) und daraus die Zulässigkeit der Auswahlregel und der $IP_\wedge$-Regel zeigen: $\vdash \forall wB \rightarrow \exists yC \Rightarrow \vdash \exists y(\forall wB \rightarrow C)$ mit B aus $T_\wedge$, y nicht in B.

W.BUCHHOLZ: Rekursive Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen

In Verallgemeinerung einer Idee von FEFERMAN beschreibt ACZEL

in einer unveröffentlichten Arbeit eine sehr allgemeine und natürliche Methode zur Definition von Normalfunktionen Θ_α. Diese Methode läßt sich wie folgt skizzieren: In Abhängigkeit von einer gegebenen Menge $\mathfrak{G}$ von Ordinalzahlfunktionen $f: ON^n \to K$ $(K := \{\aleph_\alpha \mid 0 < \alpha\})$ werden Normalfunktionen Θ_α durch transfinite Induktion nach α definiert: Θ_α sei die Ordnungsfunktion von $\{\beta \in ON \mid \beta \notin Cl_\alpha(\beta)\} \cup K =: In_\alpha$ (α-inaccessible ordinals), wobei $Cl_\alpha(\beta)$ den Abschluß (Closure) von β bezügl. $\{+\} \cup \mathfrak{G} \cup \{\Theta_\xi \mid \xi < \alpha\}$ bezeichnen möge, d.h. $Cl_\alpha(\beta) := \bigcap\{M \subset ON \mid \forall \xi,\eta \in M(\xi + \eta \in M \wedge (\xi < \alpha \to \Theta_\xi\eta \in M) \wedge (g \in \mathfrak{G} \to g\xi\eta \in M)) \wedge \{0\} \cup \beta \subset M\}$).
Wie sich inzwischen gezeigt hat, bieten diese Feferman Aczelschen Θ-Funktionen eine ausgezeichnete Grundlage für die Entwicklung weitreichender, formal einfacher und vom Standpunkt der klassischen Ordinalzahltheorie gut zu verstehender rekursiver Ordinalzahlbezeichnungssysteme. Ein konstruktiver Wohlordnungsbeweis liegt bisher allerdings nur für den Fall vor, daß $\mathfrak{G}$ nur 0-stellige Funktionen, d.h. Kardinalzahlen, enthält.

J. FENSTAD: <u>Recursion theories over ω and in higher types</u>

The lecture was intended to give a survey of recent work on axiomatic recursion theory. In particular we discussed the following result (generalizing previous work of Sacks and Harrington) due to Johann Moldestad: Let Θ be a computation theory on $T_p(0) \cup \dots \cup T_p(n)$, $n > 0$, with code domain $T_p(0)$. Assume that $T_p(n)$ is weakly Θ-finite and $T_p(n-1)$ is strongly Θ-finite. Further assume that Θ is p-normal and that every relation primitive recursive in ${}^{n+2}E$ is Θ-computable. Then there exists a type-n+2 functional G such that
$(0 \leq i \leq n-1)$: ${}^{i}_{n}\mathrm{en}\,(\Theta) = {}^{i}_{n}\mathrm{en}\,(G, {}^{n+2}E)$ and
${}^{i}_{n+1}\mathrm{sc}\,(\Theta) \cong {}^{i}_{n+1}\mathrm{en}\,(G, {}^{n+2}E)$. This gives a computation theoretic

characterization of recursion in higher types.

J.FLUM: <u>Reduzierte Produkte</u>

Sei $L(Q)$ die Sprache mit dem zusätzlichen Quantor "es gibt $2^{\aleph_0}$ viele".- Sei D ein ω-regulärer Filter. Die D-reduzierte Produktbildung führt von elementarer Äquivalenz zu $L(Q)$-Äquivalenz. Ist 2^{ω_0} singulär, so erhält die direkte Produktbildung im allgemeinen nicht die $L(Q)$-Äquivalenz.

R. DEISSLER: <u>Minimale Modelle</u>

Ein Modell $\mathfrak{A}$ heißt minimal, wenn es kein echtes elementares Submodell besitzt. Es wird eine Charakterisierung der minimalen Modelle angegeben, Jedem Modell $\mathfrak{A}$ wird auf gewisse Weise eine Ordinalzahl oder das Symbol ∞ als Rang (Abk.: $rg(\mathfrak{A})$) zugeordnet.

Satz: $\mathfrak{A}$ minimal $\Leftrightarrow$ $rg(\mathfrak{A}) < \infty$ $\Leftrightarrow$ $rg(\mathfrak{A}) < \omega_1$.

Satz: $\forall\alpha < \omega_1 \exists\sigma_\alpha \in L_{\omega_1\omega} \forall\mathfrak{A}(rg(\mathfrak{A}) = \alpha \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \sigma_\alpha)$.

Korollar: $\mathfrak{A}$ minimal $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \bigvee_{\alpha<\omega_1} \sigma_\alpha$.

Sei L eine abzählbare Sprache 1. Stufe, M_L die Klasse der minimalen Modelle zu L. M_L ist eine $\underset{\sim}{\pi}^1_1$-Klasse (d.h. $M_L = Mod(\forall P\sigma)$, $\sigma \in L_{\omega_1\omega}$).

Satz: Es gibt eine abzählbare Sprache L, so daß für alle $\sigma \in L_{\omega_1\omega}$ $M_L \neq Mod(\sigma)$.

W. SCHWABHÄUSER: <u>Ein Axiomatisierungsproblem für die zweite schwache Stufe</u>

Eines der vom Vortragenden auf der vorjährigen Tagung genannten

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Probleme wird wie folgt gelöst. Sei R_2 die Theorie im Rahmen der schwachen zweiten Stufe (SL_{II}), die beruht auf den Axiomen für angeordnete Körper und dem Tarski'schen Schema der Stetigkeitsaxiome, in dem jedoch jetzt beliebige Formeln der schwachen zweiten Stufe (mit Variablen für endliche Folgen) zugelassen werden. Dann ist R_2 nicht (SL_{II}-) Folgerungsmenge eines endlichen Axiomensystems.

Zum Beweis wird eine Übersetzung in das System A_ω der Arithmetik der zweiten Stufe von Grzegorczyk, Mostowski und Ryll-Nardzewski (J.Symbolic Logic 23) konstruiert, bei der die Stetigkeitsaxiome in die Komprehensionsaxiome übergehen. Dann ergibt sich der Satz aus dem Resultat von Mostowski (briefliche Mitteilung), daß A_ω nicht endlich axiomatisierbar ist.

H.G.CARSTENS: Rekursionstheorie und Kombinatorik

Kombinatorik und Rekursionstheorie besitzen einige interessante Verbindungen, so resultieren viele grundlegende Sätze der Rekurionstheorie aus kombinatorischen Eigenschaften endlicher Mengen. Andererseits gelingt es mit Hilfe rekursionstheoretischer Mittel die Komplexität kombinatorischer Konstruktionen abzuschätzen.

Es wurde dargestellt, daß die meisten der in der Literatur diskutierten Komplexitätsauswertungen kombinatorischer Konstruktionen schon aus der Auswertung der minimalen Komplexität von unendlichen Pfaden in endlich verzweigten Bäumen erhalten werden können. Die Methode, wie die anderen Auswertungen zu erhalten sind, ist einfach: Die jeweilige Konstruktion wird als unendlicher Pfad in einem Baum interpretiert. Als Beispiel für dieses "Baumargument" genannte Verfahren wurden injektive Auswahlfunktionen, Heiratssatz, k-Färbungen planarar Graphen, Modelle, Ultrafilter und der Satz von Ramsey vorgestellt.

S.S. WAINER: Infinitary Languages and Recursion in Higher-Type Objects

The HA sets [i.e. those recursive in ${}^2E$] are those sets definable over N by constructive formulas of $L_{\omega_1\omega}$. This result is generalized here in two ways, to obtain infinitary characterizations of 1-sc[${}^2E,F$] and of the two-section of Kleene's hierarchy $H^2_a, a \in O^2$ based on the function-quantifier ${}^3E$.

$L^\infty_{\omega_1\omega}[F]$ consists of those formulas inductively defined as follows: $\varphi_{\langle 0,k,\ldots 2^i \ldots 3^n \ldots\rangle} \equiv P_k(\ldots v_i \ldots n \ldots)$ where P_k is to be interpreted as the graph of the k-th prim.rec. function. $\varphi_{\langle 1,c\rangle} \equiv \neg\varphi_c, \varphi_{\langle 2,i,c\rangle} \equiv \exists v_i \varphi_c$. If φ_c defines a sequence $c_o, c_1, c_2 \ldots$ then $\varphi_{\langle 3,i,c\rangle} \equiv F(c_o c_1 \ldots) = v_i$ and $\varphi_{\langle 4,c\rangle} \equiv \bigvee_\varkappa \varphi_{c_\varkappa}$ provided $\varphi_{c_\varkappa}$ is a formula, for every $\varkappa$.

Theorem 1 A set is definable in $L^\infty_{\omega_1\omega}[F]$ if and obly if it is recursive in ${}^2E,F$.

$L^\infty_{\omega_1\omega_1}$ is defined similarly to the above by omitting F and adding definable quantifier-strings $\exists v_{c_o} v_{c_1} v_{c_2} \ldots$

Theorem 2 A set of functions is definable in $L^\infty_{\omega_1\omega_1}$ if and only if it is recursive in H^2_a for some $a \in O^2$. Problem: Can $L^\infty_{\omega_1\omega_1}$ be extended in some natural way to get all Hyperanalytic sets?

W. SCHOENFELD: Ein Beweis des Endlichkeitssatzes mit Hilfe der Zickzack-Methode

Für eine Sprache 1. Stufe mit abzählbar vielen Funktions- und Relationskonstanten wird eine Verallgemeinerung $\sim^H$ des Ehrenfeucht-Fraissé-Spiels ("Zickzack") semantisch charakterisiert, d.h. die Menge L_H der Formeln bestimmt, durch die H-äquivalente Strukturen nicht unterscheidbar sind und unter denen andererseits die das Spiel beschreibende Hintikka-Formel zu finden ist. Eine weitere Charakterisierung wird durch die H-Systeme erreicht, gewisse Systeme aus $\mathcal{P}^r(S)$, wobei S eine endliche Menge endlicher partieller Strukturen ist, Sie ermöglicht einen neuen algebraischen Beweis des Endlichkeitssatzes: Zur Formelmenge Σ wird ein mit der "Beispiel"-Relation versehener finitärer Baum B von H-Systemen konstruiert. Ist Σ endlich erfüllbar, so ist B unendlich und für jede unendliche Kette durch B (deren Existenz mit Königs Lemma folgt) ist der direkte Limes der Anfangs-Stücke ein Modell von Σ.

E. BÖRGER und K.HEIDLER: Die Komplexität logischer Entscheidungsprobleme

Für eine rekursive Menge von Ausdrücken der Prädikatenlogik der ersten Stufe identifizieren wir das Entscheidungsproblem in A mit der Menge $\mathfrak{A}(A) = \{\alpha \in A \mid \vdash \alpha\}$. $\underline{Pf}(K_1,f,0)$ sei die Menge der aus dem Prädikatssymbol K_1 (2-stell.) und den Funktionssymbolen f(1-stell.) und 0 (0-stell.) gebildeten Primformeln. Es gibt eine sehr einfache Indexmenge I von Krom- und Hornformeln, so daß für die Familie $A_\alpha = \neg(\alpha \wedge \underline{Pf}(K_1,f,0))$ mit $\alpha \in I$ (A_α ist aus Grzegorczyks $\mathcal{E}_2$) die folgenden Familien m-äquivalent sind:

(i) $(W_x | W_x \not\equiv N, x \in N)$,

(ii) $(\mathfrak{A}(A_\alpha) | \alpha \in I)$,

(iii) $(\mathfrak{A}(W_x) | W_x$ rekursiv, $x \in N)$

(d.h. z.B. für (i) und (ii): jedem x kann man effektiv ein $\alpha \in I$ zuordnen, so daß $W_x \equiv_m \mathfrak{A}(A_\alpha)$, falls $W_x \not\equiv N$ und umgekehrt). Die einfache Familie $(A_\alpha | \alpha \in I)$ ist eine <u>Reduktiossfamilie</u>, weil (ii) m-äquivalent (iii). Sie repräsentiert alle r.e.m-Grade $\not\equiv \{N\}$ und enthält insbesondere entscheidbare Mengen, Reduktionstypen und solche Mengen, die <u>weder entscheidbar noch Reduktionstypen</u> sind. Dies ist eine Antwort auf ein Problem von H.Wang [2]. Die Äquivalenzen gelten in dieser Form nicht für 1-Grade.

Als Korollare erhält man unmittelbar die folgenden Kompliziertheitsmaße metalogischer Entscheidungsprobleme in der Kleene-Mostowski-Hierarchie für eine beliebige effektive Indizierung $i \mapsto E_i$ der Grzegorczyk $\mathcal{E}_2$ Mengen:

$\lambda_i \mathfrak{A}(E_i) = \emptyset$ ist Π_1-vollständig, $\lambda i \mathfrak{A}(E_i)$ unendlich und $\lambda i(E_i \subseteq \mathfrak{A}(E_i))$ sind Π_2-vollständig, $\lambda i(E_i - \mathfrak{A}(E_i))$ endlich und $\lambda i(\mathfrak{A}(E_i)$ entscheidbar) sind Σ_3-vollständig. Ebenso kann man die Σ_3-Vollständigkeit der Reduktionstypeigenschaft $\lambda i(E_i$ Reduktionstyp) erhalten, indem man in [1] die Menge A zu $A_{\alpha(M)}$ erweitert.

Analoges gilt für die Erfüllbarkeit.

[1] E. Börger: La Σ_3-complétude de l'ensemble des types de réduction, Logique et Analyse (1974) 123-128.

[2] H.Wang: Dominos and the AEA case of the decision problem. In: Proc. Symp.Math.Theory of Automata (1962) S.54.

M. ZIEGLER: Das Wortproblem endlich erzeugter Untergruppen algebraisch abgeschlossener Gruppen

W(G) bezeichne das Wortproblem einer endlich erzeugten Gruppe G, d.h. (bzgl. einer Standarddurchzählung aller Wörter in den Erzeugenden) die Menge aller Nummern von Wörtern in den Erzeugenden die in G gleich e sind.

Definition: Seien $A,B \subset N$. Dann ist $A \leq^* B$, wenn es zweistellige rekursive Relationen R,R' und einstellige rekursive Funktionen f_1, f_2, f_3 von N in endlichen Teilmengen von N gibt, sodaß für alle n $|f_3(n)| \leq 1$, $n \in A$ gdw. $\exists m(R(n,m) \wedge f_1(m) \subset B)$ und $n \notin A$ gdw. $\exists m(R'(n,m) \wedge f_2(m) \subset B \wedge f_3(m) \subset N \setminus B)$.

Diese Relation ist echt stärker als Turingreduzierbarkeit.

Satz: i) Zu jedem $A \subset N$ gibt es eine endlich erzeugte Gruppe G mit $W(G) \equiv^* A$. ii) $W(G) \leq^* W(H)$ gdw. G in jede alg.abg.Gruppe einbettbar ist, in die auch H einbettbar ist. iii) Zwei abzählbare alg. abg. Gruppen sind genau dann isomorph, wenn in beiden dieselben (bis auf $\equiv^*$) Wortprobleme endlich erzeugter Untergruppen vorkommen.

Die Mengen von $\equiv^*$-Äquivalenzklassen, die auf diese Weise zu alg.abg. Gruppen gehören, lassen sich rekursionstheoretisch charakterisieren.

W.FELSCHER: Testalgebren für Quantoren

Zu einem gegebenem aussagenlogischen Kalkül, der wenigstens eine Operation $\rightarrow$ so enthält, daß die durch $v \leq_C w$ iff $C' \vdash v \rightarrow w$ bestimmten Relationen $\leq_C$, Quasiordnungen mit den Elementen von C' als größten sind, versteht man unter der Klasse der Testalgebren die größte Klasse $\mathfrak{A}$ von Algebren $A = \langle u(A), \supset, \ldots \rangle$ so, daß die Interpretation des Kalküls in dieser Algebra noch korrekt (sound) ist. Für Kalküle mit Quantoren sind Testalgebren von der Art $A = \langle a(A), \rho(A), \langle v^A | v \in fm(L) \rangle \rangle$, wobei $a(A)$ eine gewöhnliche Algebra (zur Interpretation der Funktionssymbole), $\rho(A)$ eine Testalgebra für den aussagenlogischen Teil und $\langle v^A | v \in fm(L) \rangle$ eine mit den Formeln v indizierte Familie von Funktionalen auf $\rho(A)$ ist. Die Einführung dieser Testalgebra und ihre Eigenschaften werden erörtert.

W. THOMAS: <u>Über die Ordnung der natürlichen Zahlen mit einer ausgezeichneten Teilmenge</u>

Es werden Strukturen der Form $\langle \omega, <, P \rangle$ betrachtet, wobei ω die Menge der natürlichen Zahlen, $<$ die "kleiner als"-Beziehung über ω und $P \subset \omega$ ein einstelliges Prädikat ist. $Th\langle \omega, <, P \rangle$ ist die Menge der in $\langle \omega, <, P \rangle$ geltenden Sätze (einer passenden Sprache 1. Stufe). Für unendliche Prädikate $P = \{p_o < p_1 < p_2 < \ldots\}$ ist d_P die "Distanzfunktion" von P, definiert durch $d_P(i) = p_{i+1} - p_i$. Für P mit streng monoton wachsendem d_P wird eine einfache Satzmenge Σ_P angegeben, sodaß gilt: $\Sigma_P \subset Th\langle \omega, <, P \rangle$, Σ_P ist vollständig. Hieraus erhält man den <u>Satz</u>: Wenn P rekursiv und d_P streng monoton wachsend ist, so ist $Th\langle \omega, <, P \rangle$ entscheidbar. (Dieser Satz ermöglicht die Angabe eines rekursiven $P \subset \omega$, sodaß $Th\langle \omega, <, P \rangle$ entscheidbar, die monadische Theorie 2. Stufe $MTh_2\langle \omega, <, P \rangle$ unentscheidbar ist.) Aus einer Verallgemeinerung des Satzes folgt: Für jeden (rekursiv aufzählbaren) Unentscheidbarkeitsgrad gibt es ein (rekursives) $P \subset \omega$, sodaß $Th\langle \omega, <, P \rangle$ diesen Grad besitzt.

W. MAASS: Church-Rosser-Theorem für einen λ-Kalkül mit unendlich langen Termen

Es wird eine Methode angeben, wie man das Church-Rosser-Theorem für λ-Kalküle mit unendlich langen Termen beweisen kann, Dazu werden den einzelnen Reduktionen Ordinalzahlen in der Weise zugeordnet, daß sich durch Transfinite Induktion nach $\alpha \# \beta$ zeigen läßt:

$a \underset{\alpha}{\triangleright} a_1$ und $a \underset{\beta}{\triangleright} a_2$ $\Rightarrow$ es gibt einen Term b mit

$a_1 \underset{\beta}{\triangleright} b$ und $a_2 \underset{\alpha}{\triangleright} b$.

W. RAUTENBERG: Definierbare Relationen in Bäumen

Bäume werden als Strukturen $\mathbb{A} = \langle A,R \rangle$ betrachtet, die als Graphen gesehen keine Kreise enthalten. Es können auch kanten- und knotengefärbte Bäume betrachtet werden (d.h. mehrere binäre Relationen und zusätzliche einstellige Prädikate), doch ist dies unwesentlich, da man diese durch ungefärbte, sogar ungerichtete (d.h. R ist symmetrisch) kodieren kann. Ist $\mathbb{A}$ ein Baum, $B \subseteq A$ eine unendliche Teilmenge, so gilt für jede Formel φ mit 2 freien Variablen und Parametern ϵ A.

$$(*) \quad (\mathbb{A},B) \models (\exists v_0,v_1, \epsilon\, B)(v_0 \neq v_1 .\wedge. \varphi(v_0,v_1) \leftrightarrow \varphi(v_1,v_0))$$

Formel (*) kann direkt durch Existenz geeigneter Automorphismen in homogenen elementaren Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ bewiesen werden und ist Spezialfall einer allgemeinen Aussage über den symmetrischen Charakter der in Bäumen definierbaren Relationen.

A. OBERSCHELP: Logik in mengentheoretischer Sprache

Es soll eine Erweiterung der Prädikatenlogik angegeben werden, die besser zur Formalisierung mathematischer Aussagen geeignet ist. Es handelt sich um eine mehrsortige Version der Sprache der naiven Mengenlehre, jedoch werden mengentheoretische Annahmen völlig vermieden. Der Russellschen Antinomie entgeht man durch eine geeignete Neufassung der Substitutionsregel, die berücksichtigt, daß die Terme der formalen Sprache nicht immer Individuen bezeichnen. Neben nichtlogischen Konstanten und speziellen Variablensorten (die fakultativ sind) enthält die formale Sprache stets auch sog. universelle Individuenvariablen. Zum logischen Vokabular gehören neben Junktoren, Quantoren, $=$, ϵ auch Paarklammern, Kennzeichnungsoperator und Klassenbildungsoperator.

G. TODT: Modelle der mengentheoretischen Logik

Ein Modell $\mathfrak{J}$ für die von A. Oberschelp vorgestellte Logik $L(S,C)$ ist gegeben durch die folgenden Daten:
Mengen I^s, $\hat{I}$ mit $\emptyset \neq I^s \subseteq I^* \subseteq \hat{I}$,
eine schwach extensionale Relation $E \subseteq I^* \times \hat{I}$,
eine Paarfunktion $p: \hat{I}^2 \xrightarrow{1-1} \hat{I}$ mit $p \restriction I^{*2}: I^{*2} \to I^*$,
ausgezeichnete Elemente $j^s \in I^s$, $\hat{j} \in \hat{I}$ mit $E[\{\hat{j}\}] = \emptyset$,
außerdem die Interpretation der nichtlogischen Konstanten.
Es wird gefordert: zu jeder Menge $A = \{x^s | \varphi^{\mathfrak{J}, \mathfrak{B}^{\check{s}}_{x^s}} = W\} \neq \emptyset$ gibt es genau ein $y \in \hat{I}$ mit $A = E[\{y\}]$.
Für diesen Modellbegriff gilt der Vollständigkeitssatz.
Mit Hilfe des Isomorphiesatzes von Mostowski kann man erreichen, daß die Relation E auf gewissen Teilbereichen von $\hat{I}$ mit der natürlichen ϵ-Beziehung übereinstimmt.

T.B. FLANNAGAN: Hilbert's ε-symbol in Set Theory

We sketch the proofs of the results contained in the following papers:

1. A new finitary proof that NBG is a conservative extension of ZF. (to appear in the Bernays-Festschrift).
2. Set theories incorporating Hilbert's ε-symbol. (to appear in Dissertationes Mathematicae).

We then look at the strength of the ε-symbol in various set theories in the absence of axiom of foundation. We prove some independence results and ask questions.

U. FELGNER: Auswahlfunktionen auf Mengen und Klassen

Mit ZF_o, NB_o, M_o bezeichnen wir die axiomatischen Mengenlehren von Zermelo-Fraenkel, von Neumann-Bernays und Morse jeweils ohne Fundierungsaxiom "Fund". Sei AC das lokale und E das globale Auswahlaxiom. Es gilt, daß NB_o + Fund + E eine konservative Erweiterung von NB_o + Fund + AC ist bezüglich ZF-Aussagen. Wir haben analog bewiesen M_o + Fund + E ist eine konservative Erweiterung von M_o + Fund + AC bezüglich ZF-Aussagen. Es stellt sich die Frage, ob solche Ergebnisse über konservative Erweiterungen auch für die Theorien ZF_o, NB_o, M_o ohne Fundierungs-Axiom gelten. Wir formulieren eine Verallgemeinerung des "Axioms of Dependent Choices" DCC^α und zeigen mittels forcing: NB_o + "V ist wohlordenbar" ist eine konservative Erweiterung von $NB_o + \forall\alpha DCC^\alpha$ bezüglich ZF-Aussagen. In NB_o + Fund sind AC und $\forall\alpha DCC^\alpha$ äquivalent, aber $AC \rightarrow DCC^\alpha$ ist in NB_o allein nicht beweisbar. ZF_o^ε ist keine konservative Erweiterung von ZF_o + AC. Es ist noch offen, ob ZF_o^σ eine konservative Erweiterung von ZF_o + AC ist. Dagegen ist $(ZF_o + \text{Fund})^\varepsilon = (ZF_o + \text{Fund})^\sigma$ eine konservative Erweiterung von ZF_o + Fund + AC.

K. SCHUETTE: Prädikate Teilsysteme der Analysis

Δ_1^1-A sei die Arithmetik 2. Stufe mit ω-Regel und Δ_1^1-Komprehensionsregel unter Verwendung von Herleitungsordnungen $< \Gamma_o$. Nach S. Feferman ist die transfinite Induktion bis Γ_o in Δ_1^1-A autonom beweisbar, und Δ_1^1-A ist in der geschichteten Analysis RA prädikativ interpretierbar. Die transfinite Induktion ist jedoch im formalen System mit Δ_1^1 - Komprehensionsregel nicht mehr bis $\theta\omega 0$ und im formalen System mit Δ_1^1-Komprehensionsaxiom nicht mehr bis $\theta\varepsilon_o 0$ herleitbar. Für eine Interpretation des letzten Systems in RA ist eine Bezugnahme auf überabzählbare Ordinalzahlen naheliegend, während die Interpretation von Δ_1^1-A in RA vollständig im Abzählbaren verläuft.

K. GLOEDE: Mengenlehre in infinitären Sprachen

Indem man in den Axiomenschemata einer geeignet gewählten Axiomatisierung der ZF-Mengenlehre Formeln der infinitären Sprache $\Omega_{\varkappa\lambda}$(von C.KARP) zulässt, erhält man das System $ZF_{\varkappa\lambda}$ einer infinitären Mengenlehre. Es wird das Problem einer Formalisierung des Wahrheits-, Relativierungs- und Definierbarkeitsbegriffes für infinitäre Formeln untersucht. Zahlreiche vom finitären Fall her bekannte Aussagen lassen sich auf den infinitären Fall übertragen; andererseits lassen sich im infinitären Fall neuartige Folgerungen z.B. für das Auswahlaxiom (als Axiom eines formalen infinitären Systems) durch die Anwendung verschiedener Distributiv- und Auswahlaxiome (bzw. Regeln) des zugehörigen metamathematischen Systems ziehen. Für $\varkappa > \omega$ ist $ZF_{\varkappa\lambda}$ eine echte Verstärkung von ZF, jedoch in gewissem Sinne schwächer als die imprädikative Klassentheorie von MORSE-KELLEY (QUINE-MORSE), deren wichtigste Folgerungen es jedoch auch herzuleiten erlaubt (z.B. Existenz von Standardmodellen von ZF).

H. RASIOWA: ω^+-valued and mix-valued predicate calculi based on generalized Post algebras

Predicate calculi with logical values which form a chain $e_i, 0 \leq i \leq \omega$ of the type ω^+ are considered. Generalized Post algebras of order ω^+ play for them the part analogous to that of Boolean algebras for classical predicate calculi. A Hilbert-style formalization with a rule of ω-type is given and several metamathematical theorems are established. Mix-valued predicate calculi are obtained by assuming that each predicate ρ is m_ρ-valued, $2 \leq m_\rho < \omega$, which means that it can only admit $e_0, \ldots, e_{m_\rho - 2}, e_\omega$ as logical values. Generalized Post algebras of order ω^+ whose elements satisfy a finite representability condition are then applied in metamathematical investigations. This permits to get a Hilbert-style formalization without an infinitistic rule, an analogue of the Craig theorem and other results. These predicate calculi have been applied by the present author to construct ω^+- valued algorithmic logic being a formalized theory of programming.

C. RAUSZER: Semantic models for the H-B predicate calculus

The language L of the H-B predicate calculus is an extension of the language of the intuitionistic predicate calculus with two connectives added, Γ - one argument and $\dot{-}$ - two argument. Characteristic lattices for this logic are - so called - semi-Boolean algebras. Let us set $a_n = \bigcup_{a \in A_n} a$, $b_n = \bigcap_{b \in B_n} b$, $n \in \omega$. By a Q-filter in a semi-Boolean algebra $\mathfrak{A}$ we shall understand a prime filter ∇ in $\mathfrak{A}$ such that

(Q_1) if $a_n \in \nabla$ then $A_n \cap \nabla \neq \emptyset$, (Q_2) if $B_n \subset \nabla$ then $b_n \in \nabla$

Th.1. Let $\mathfrak{A}$ be a semi-Boolean algebra and let for every $n \in \omega$, $a_n = \bigcup_{a \in A_n} a$

and $b_n = \bigcap_{b \in B_n} b$ exist where $A_n, B_n \subset \mathfrak{A}$. Then there exists a monomorphism h from $\mathfrak{A}$ to an order topology preserving a_n and b_n.

By a semantic H-B model structure we shall understand a triple $G = \langle S, D, \Vdash \rangle$ if the following conditions are satisfied:

the conditions from 1 to 6 are the same as in Intuitionistic Logic by Fitting.

(7) $x \Vdash (\alpha \dot{-} \beta)$ iff $(\exists y \in S), (y \leq x \;\&\; y \Vdash \alpha \;\&\; y \nVdash \beta)$

(8) $x \Vdash \ulcorner \alpha$ iff $(\exists y \in S)(y \leq x \;\&\; y \nVdash \alpha)$

(9) $x \Vdash \bigvee \xi \varphi(\xi)$ iff $(\exists c \in D)(x \Vdash \varphi(c))$

(10) $x \Vdash \bigwedge \xi \varphi(\xi)$ iff $(\forall c \in D)(x \Vdash \varphi(c))$

From theorem 1 we can obtain the following:

Th.2. Let $\mathfrak{A}$ be a semi-Boolean algebra and $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, D, R)$ be an H-B algebraic model. Let S be the set of all proper Q-filters in $\mathfrak{A}$. Let $\leq$ be a set-theoretical inclusion. For any $\nabla \in S$, $\alpha \in F$ and $v \in D^{\sqrt{\ }}$ we set

$$\nabla \Vdash_v \alpha \quad \text{if and only if} \quad \alpha_R(v) \in \nabla .$$

Then

(i) $G = \langle S, D, \Vdash \rangle$ is a semantic H-B model structure,

(ii) for any formula α, $\mathfrak{A}$ is a semantic model for α iff $\mathcal{A}$ is an algebraic model for α.

K. Heidler (Freiburg)