MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 18/1974

Methoden und Verfahren der mathematischen Physik

28.4. bis 4.5.1974

Die 6. Tagung über "Methoden und Verfahren der mathematischen Physik" stand erstmals unter der Leitung von J. Ehlers (München) und E. Meister (Tübingen). In diesem Jahr diskutierten Physiker und Mathematiker gemeinsam offene mathematische Probleme aus dem Bereich der Physik. Dabei bestätigte sich, daß gegenseitige Informationen über Fragestellungen und und Methoden wichtiger waren als die reine Mitteilung von Ergebnissen. Die allgemeine Diskussion hatte ihren Höhepunkt auf einem spontan organisierten Kolloquium, das am Donnerstag nachmittag stattfand. Dabei und auch bei anderen Diskussionen zeigte sich deutlich, das einerseits lebhaftes Interesse an einer Überbrückung der Kluft zwischen Mathematikern und Physikern besteht und auch gegenseitige Anregungen zustandekommen können, daß andererseits aber auch erhebliche Verständigungsschwierigkeiten überwunden werden müssen. Von vielen Teilnehmern wurde der Wunsch geäußert, Tagungen dieser Art möchten regelmäßig stattfinden. Dabei müsse noch mehr der Charakter einer dem Gedankenaustausch, der Klärung, der Fragestellung und Methoden dienenden Arbeitstagung -im Gegensatz zu einer zur Mitteilung von Ergebnissen dienenden Vortragsveranstaltung- angestrebt werden, die dann zu konkreter Zusammenarbeit führen könnte, und wahrscheinlich auch dazu führen würde.

Der 1. Mai, der in die diesjährige Tagungswoche fiel, wurde vormittags mit weiteren Vorträgen begonnen; nachmittags stand ein Ausflug auf dem Programm, der bei wechselhaftem Wetter nach St. Roman führte.

Themen der Tagung waren aktuelle Probleme aus der Gravitationstheorie, der Elementarteilchen-Feldtheorie und (von der mathematischen Seite) Probleme für Evolutionsgleichungen und singuläre Integralgleichungen. Schwerpunkte aus der Gravitationstheorie waren schwarze Löcher und damit zusammenhängende Lösungen der Einstein-Gleichungen, abschließungen von Raumzeitmodellen durch

"Ränder im Unendlichen", Singularitäten und typische Unterschiede zwischen Riemannschen und Lorentzschen Mannigfaltigkeiten; aus der Feldtheorie wurden Probleme der funktionalen Quantenfeldtheorie behandelt, die bei Linearisierungsverfahren für die Heisenbergsche Spinorfeldgleichung auftreten. Auch die rein mathematischen Beiträge standen im Zusammenhang mit physikalischen Problemen. Daß alle diese verschiedenartigen Probleme letztlich gemeinsam interessierende Fragen aufwarfen, war ein Erfolg der Tagung.
Den Herren B. Brosowski und E. Martensen, die die Tagung in den vergangenen Jahren leiteten, sei hier herzlich dafür gedankt, daß sie in diesem Jahr auf eine eigene Tagung verzichteten und die Vorträge wieder in der BI Reihe "Methoden und Verfahren der mathematischen Physik" erscheinen können.

Teilnehmer

Andrié, M., Bonn
Arlt, D., Bonn
Bandle, C., Zürich
Beekmann, B., Tübingen
Brosowski, B., Göttingen
Constantinescù, F., Farnkfurt
Costabel, M., Tübingen
Donig, J., Tübingen
Ehlers, J., München
Göbel, R., Würzburg
Ha'jicek, P., Bern
Kielhöfer, H., Stuttgart
Kijowski, J., Warschau
Kirchgässner, K., Stuttgart
Köhler, E., München
Kremer, M., Darmstadt
Kundt, W., Hamburg
Leis, R., Bonn

Martensen, E., Karlsruhe
Meister, E., Tübingen
Mitter, H., Tübingen
Müller zum Hagen, H., Hamburg
Petry, H., Bonn
Piscorek, A., Warschau
Polâsek, J., Prag
Seifert, H.-J., Hamburg
Sohr, H., Tübingen
Speck, F.-O., Tübingen
Stumpf, H., Tübingen
Velte, W., Würzburg
Wahl, F., Tübingen
Walker, M., München
Weck, N., Darmstadt
Weinitschke, H., Berlin
Werner, P., Stuttgart
Wilcox, C.H., z.Zt. Stuttgart

Vortragsauszüge

ANDRIE, M. : Zeitabhängige Integrale der Bewegung.

Der Zustandsraum eines klassischen mechanischen Problems mit der Hamiltonfunktion H sei gegeben durch $W = X \times R = \{(x,t)\}$, wobei $X = \{x\} = \{q,p\}$ der übliche Phasenraum ist $(\dim X = 2n)$. In wichtigen Fällen können sowohl die Bahnen als auch vorhandene Symmetrie- und Nichtinvarianzgruppen mit Hilfe von Liealgebren zeitabhängiger Integrale der Bewegung beschrieben werden, d.h. mit Lösungsfunktionen f_μ der Gleichung $\frac{\partial}{\partial t} f_\mu + [f_\mu , H] = 0$, wobei $[\,,]$ die Poissonklammer bedeutet. Mit Liereihenentwicklungen

$$f_\mu (x,t) = x_\mu + t\,[H, x_\mu] + \frac{t^2}{2}\,[H, [H,x_\mu]] + \dots$$

können das freie unrelativistische und relativistische Teilchen, der harmonische Oszillator, das Keplerproblem und die Bewegung von Teilchen in elektromagnetischen Feldern beschrieben werden einschließlich der entsprechenden Gruppen: Drehgruppe, Galileigruppe, homogene und inhomogene Lorentzgruppe, SU (3), SU (3,1), SO (4), SO (4,1), ...

BANDLE, C. : Über ein nichtlineares Dirichletproblem, das bei der Selbstentzündung von Gasen auftritt.

Das nichtlineare Dirichletproblem, das hier betrachtet wird, lautet

$$\Delta u + \lambda e^u = 0 \text{ in } D, \quad u = 0 \text{ auf } \partial D, \text{ wobei } \lambda > 0$$

eine feste Zahl ist und D ein einfach zusammenhängendes , ebenes Gebiet bedeutet. Dieses Problem taucht in der Theorie der thermischen Selbstentzündung von Gasen von Frank - Kamenetzki auf. Es ist bekannt, daß die Menge der $\lambda > 0$, für welche das Problem lösbar ist, ein Intervall $(0,\lambda^*]$ ist. Es wird gezeigt, daß die Ungleichung $\lambda^* \geq \frac{2\pi}{A}$ (A : Fläche von D) gilt. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn D ein Kreis ist. Ferner werden scharfe Schranken für die Lösungen angegeben, und der Zusammenhang mit einer allgemeinen Klasse von nichtlinearen Dirichletproblemen hergestellt. Zum Schluss werden einige Bemerkungen über die Stabilität der stationären Lösungen des zeitabhängigen Problems

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + \lambda e^w \text{ in } D \times (0,t), \quad w|_{\partial D} = 0, \quad w(x,0) = g(x)$$

gemacht.

COSTABEL, M. : Die Lösungsstruktur einer eindimensionalen Integralgleichung mit Feynmannschem Kern.

Die einfachste nichttriviale Integralgleichung des mehrzeitigen φ - Gleichungssystems bei der Behandlung des anharmonischen Oszillators mit der "Neuen Tamm - Dancoff - Methode" lautet nach Einführung geeigneter Koodinaten:

$\varphi(x) = \lambda \not{c} \int_{-\infty}^{\infty F} e^{-isx} e^{-ia|x+y|} \rho(|y|) \varphi(y)\, dy + \psi(x)$. Dabei bedeutet

$\int^F f(x)\, dx := \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int e^{-\varepsilon|x|} f(x)\, dx$ und $\rho(x) := \sum\limits_{n=1}^{N} \rho_n e^{-i\omega_n x}$,

die Zweipunktfunktion, ist eine fast-periodische Funktion mit absolut konvergenter Fourierreihe . Über die Lösungen dieser Gleichung werden u.a. folgende Aussagen bewiesen :

1.) Für $s = o$ ist die Gleichung äquivalent zu dem Randwertproblem

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a^2 + \lambda\rho\right)\varphi = \psi \;;\quad \varphi'(o) = o \;;\quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \int_c^\infty e^{-\varepsilon x} e^{-iax} \varphi(x)\, dx = o,$$

für das die Eigenfunktionen explizit angegeben werden können.

2.) Es gibt $P \subset \mathbb{R}$ abzählbar, so daß für $s \notin P$ eine Schar von Banachräumen existiert, auf denen der Integraloperator einen kompakten Operator definiert. Die Eigenwerte λ sind die Nullstellen einer auf $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus P)$ analytischen Funktion $\Delta(\lambda, \delta)$. Die konstruierten Banachräume enthalten insbesondere die physikalisch sinnvolle Funktion ψ und die zugehörigen Lösungen der Integralgleichung. Für $s \in P$ läßt sich der Integraloperator nicht sinnvoll definieren.

DONIG, J. : Das Cauchy-Problem für eine parabolische Gleichung mit singulären Koeffizienten.

Betrachtet wird eine parabolische Anfangswertaufgabe vom Typ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t,x,D)\, u = f \qquad u(.\,, o) = u_o$$

im Zylinder $\mathbb{R}^n_x \times (o, \tau]$, $\tau > o$. Dabei sei für $t \in (o, \tau)$ $A(t,x,D)$ ein Pseudo-Differentialoperator im Lebesgue - Raum $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ mit unstetigem Symbol. Mit Hilfe geeigneter a priori Abschätzungen und der Theorie der analytischen Semigruppen wird die eindeutige Lösbarkeit des obigen Problems gezeigt.

HA'JICEK, P. : Können äussere Felder schwarze Löcher zerstören?

Wir arbeiten im Rahmen von stationären, axisymmetrischen, asymptotisch flachen Raumzeiten der allgemeinen Relativität, die eine von materiellen Ringen, Disken oder Schallen umgebenes schwarzes Loch enthalten. Ein gewisser Satz von invarianten Funktionen wird definiert, der die vollständige Auskunft über die Metrik und das elektromagnetische Feld in einer Elektisvakuumumgebung des Horizontes enthält. Die Invarianten haben eine einfache physikalische Bedeutung und einen direkten Zusammenhang mit den Freiheitsgraden des Loches. Ausserdem müssen sie eine Ungleichung erfüllen, welche eine Verallgemeinerung der wohlbekannten Kerr-Newman Ungleichung $m^2 > a^2 + e^2$ ist, und die eine obere Grenze auf die Werte vom gravimagnetischen, elektrischen und magnetischen Feld an der Oberfläche des Loches setzt, unabhängig davon, ob die Felder vom schwarzen Loch selbst oder von äusseren Quellen stammen.

KIELHÖFER, H. : Existenz- und Regularitätssatz füe semilineare Anfangs-Randwertprobleme.

Das semilineare parabolische Anfangs-Randwertproblem lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\tilde\alpha| \leq 2m} a_{\tilde\alpha}(t,x)\, D_{\tilde\alpha}\, u = \underbrace{f(t,x,m, \dots, D_{2m-1} u)}_{F(t,u)}$$

$$u(o,x) = u_o(x) \quad , \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$D_{\tilde\alpha}\, u(t,x) = o \quad , \quad x \in \partial\Omega \quad , \quad |\tilde\alpha| \leq m-1 \quad , \quad t \in [o,T]$$

Dabei ist Ω nicht notwendig beschränkt. Es wird zunächst gezeigt, daß

$-A(t) = -\sum_{|\tilde\alpha| \leq 2m} a_{\tilde\alpha}(t,x)\, D_{\tilde\alpha}$ sowohl in $L_p(\Omega)$ als auch in $C_*^{\alpha}(\bar\Omega)$

einen Evolutionsoperator $U(t,\tau)$ erzeugt, der allerdings in $C_*^{\alpha}(\bar\Omega)$

für $t = \tau$ singulär wird :

$$\|U(t,\tau)\|_{\alpha} \leq \frac{c}{|t-\tau|^{\frac{\alpha}{2m}}} .$$

Dennoch gelingt es (bei Hölderstetigkeit von f und einer Abklingbedingung bezüglich $|x| \to o$) die Integralgleichung

$$u(t) = U(t,o)u_o + \int_o^t U(t,s)\, F(s,u(s))\, ds$$

sowohl in $L_p(\Omega)$ als auch in $C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$ zu lösen. In $L_p(\Omega)$ folgt daraus die Lösbarkeit der Evolutionsgleichung

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = F(t,u) \quad , \quad u(o) = u_o$$

; in $C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$ kann daraus die Eigenschaft

$$D_{\tilde{\alpha}}\, u \in C\left([o,\tau], C_*^{\delta_i}(\bar{\Omega})\right) \cap C^{\delta_1}\left([\Theta,\tau], C_*^{\delta_i}(\bar{\Omega})\right)$$

$$\Theta > o \ , \quad |\tilde{\alpha}| \leq 2m-1 \quad , \quad o < \delta_i < 1 \quad ,$$

$$u(t) \in C_*^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \left\{ u \mid D_{\tilde{\alpha}}\, u|_{\partial\Omega} = o \quad , \quad |\tilde{\alpha}| \leq m-1 \right\}$$

hergeleitet werden, woraus bei eindeutiger Lösbarkeit ein Regularitätssatz folgt.

KIJOWSKI, J. : <u>On geometrical construction of Poisson-brackets in the Classical Field Theory</u>.

Recent development of the theory of canonical geometrical quantiration shows that the symplectic structure of physical theories can play an important role. There does not exist however up to now a general formulation at the canonical formalism in classical field theory. Our attempt of defining it uses the methods of geometrical formulation of calculus of variations (Dedonder, Weil, Dedecker). The crutial role is played by the notion of "multisymplectic" or "multiphase" space. It is a pair (P, γ) where P is a differentiable manifold and γ is closed (i.e. $d\gamma = o$) differential exterior (n+1)-form. For n=1 γ is 2-form and (P, γ) is simply contact manifold used in classical mechanics. For the field theories over space-time, n=4 and γ is 5-form. Both: dynamics (field equations) and canomical structure (poisson-brackets, canonical fields etc.) are fully determined by γ. Our definition of symplectic structure ba means at γ is manifestly non-dependent on the special choice of the initial space-like surface in the space time. The beautifull counection between constraints and gauge is established: Each constraint induces some gauge. It means that the space of states is to be divided by some equivalence relation (one physical state can be represented by the whole class of mathematical objects). The quotient space is already symplectic--one.

KIRCHGÄSSNER, K. : Variationsmethoden für semilineare Randwertprobleme.

Es wird das Randwertproblem untersucht, welches das Beulen einer ebenen Platte beschreibt, die das beschränkte und glatt berandete Gebiet Ω ausfüllt. Bezeichnet F_o die Airy - Spannungsfunktion im ungebeulten Zustand, ferner $[f,g] = \partial^2{}_x f \ \partial^2{}_y g + \partial^2{}_y f \ \partial^2{}_x g - 2\ \partial^2{}_{xy} f \ \partial^2{}_{xy} g$, so erhält man für die Auslenkung w die Gleichung (v. Karman) :

$$(1) \qquad Aw = \lambda [F_o, w] - [A^{-1}[w,w], w], \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$D(A) = \overset{4}{H}(\Omega) \cap \overset{\circ 2}{H}(\Omega).$$

Es wird gezeigt, daß die Lösungen von (1) die kritischen Punkte des Funktionals

$$\frac{1}{2}(Lu,u)_{-\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad L = [F_o, A^{-1}\cdot]$$

und

$$(u,v)_{-\frac{1}{2}} := (A^{-\frac{1}{2}}u, A^{-\frac{1}{2}}v)$$

auf der Mannigfaltigkeit

$$M_\alpha = \left\{ u \in X_{-\frac{1}{2}} \ \middle| \ \frac{1}{2}\|u\|^2_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\|[A^{-1}u, A^{-1}u]\|^2_{-\frac{1}{2}} = \alpha > o \right\}$$

sind. Dabei ist $X_{-\frac{1}{2}} = \underset{\|A^{-\frac{1}{2}}\cdot\|}{d} L^2(\Omega)$.

Auf jeder Mannigfaltigkeit M_α liegen mindestens codim L verschiedene kritische Punkte. Verallgemeinerungen für nicht - Dirichletsche Randbedingungen werden angedeutet.

KREMER, M. : Über ein Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung für Medien mit schwindendem Gedächtnis.

Es wird folgendes Anfangsrandwertproblem aus der Theorie der Wärmeleitung für Medien mit Gedächtnis behandelt :

$$Lf := c\,\dot{f}(x,t) + \int_o^t b(t-s)\,\dot{f}(x,s)\,ds - \int_o^t a(t-s)\,\Delta_x f(x,s)\,ds = r(x,t)$$

$$f(x,t) = f_o(x,t) \, , \quad (x,t) \in \partial A \times [o,\infty)$$

$$f(x,o) = o.$$

Es wird ein Hilbertraum H konstruiert und eine über HxH definierte, beschränkte Bilinearform b angegeben und gezeigt, daß das gegebene Anfangsrandwertproblem den folgenden Gleichungen äquivalent ist :

$$f \in H \; ; \qquad b(f,\phi) = r(\phi) \quad , \quad o \in H_1 \quad ; \qquad f - f_o \in H_1$$

Dabei ist H_1 ein abgeschlossener Unterraum von H. Es wird gezeigt, daß es hierzu genau eine Lösung $f \in H$ gibt.

KUNDT, W. : <u>Globale Methoden und Sätze über Lorentz - Räume</u>.

Die kugelsymmetrischen Friedmannschen Weltmodelle besitzen einen singulären Anfang, den sog. Urknall, zu endlicher Zeit in der Vergangenheit; (u.a. werden dort die Materiedichte und Raumkrümmungen unendlich). Auch die axialsymmetrischen Kerrschen Schwarzlochraumzeiten besitzen Krümmungssingularitäten innerhalb des Horizontes. Beiden Modellklassen ist die Existenz "eingefangerner 2-Flächen" gemeinsam, d.h. raumartiger, randfreier, kompakter 2-dim Flächen derart, daß die beiden darauf senkrecht stehenden lichtartigen Richtungsfelder konvergieren. In der 2. Hälfte der 60er Jahre sind eine Reihe von Sätzen bewiesen worden, in den unter wechselnden Voraussetzungen nahegelegt wird, daß solche Singularitäten nicht nur bei den Modellen hoher Symmetrie auftreten, sondern typisch sind für realistische Raumzeitmodelle. Genauer wird gesagt, daß es keine vollständigen Lorentzräume gibt, die der sog. Energiebedingung genügen, (d.h. Feldungleichungen), keine geschlossenen zeitartigen Kurven enthalten, eine eingefangene 2-Fläche besitzen und "generisch" sind.

Literatur:

Hawking, S.W., Ellis, G.F.R.: The Large Scale Structure of Spacetime, Cambridge Univ. Press 1973.

Kundt, W., in: XIIIth Biennial Seminar of the Canadian Mathem. Congress in Halifax, ed. R. Vanstone, Montreal 1972.

MITTER, H. : Einige Probleme der Lagrange'schen Quantenfeldtheorie.

Die Feldgrößen der Quantenfeldtheorie sind distributionswertige Operatoren, die bestimmten Vertauschungsrelationen genügen müssen. Schwierigkeiten ergeben sich dadurch, daß in den Feldgleichungen Lagrange'scher Feldtheorien Produkte von Feldoperatoren mit gleichem Argument auftreten. Man beschränkt sich auf die Vakuumerwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Feldoperatoren. Die Feldgleichungen führen zu einer Funktionaldifferentialgleichung für ein Funktional, das die Erwartungswerte als Volterrakoeffizienten erzeugt. Eine formale Lösung kann angegeben werden, die durch Entwicklung der in ihr auftretenden Ausdrücke eine Reihenentwicklung für die Erwartungswerte liefert. Die einzelnen Reihenglieder enthalten divergente Integrale. Mit Hilfe von Regularisierungs- und Renormierungsverfahren können für einige spezielle Theorien endliche Ausdrücke erhalten werden, wenn man sich auf physikalisch relevante Größen beschränkt. Die Konvergenz der Reihen ist ungeklärt.

MÜLLER ZUM HAGEN, H. : Singularitäten in einer sphärisch symmetrischen Raumzeit mit idealer Flüssigkeit, unter besonderer Berücksichtigung der nackten Singularitäten.

Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie wird der Kollaps einer kugelsymmetrischen idealen Flüssigkeit betrachtet :

Für eine sehr allgemeine Klasse von Zustandsgleichungen, bei der der Druck eine (beliebig groß vergebbare) obere Grenze hat, wird folgendes gezeigt :

(A) Es gibt reguläre Anfangsdaten derart, daß sich (nach endlich langer Zeit) eine Singularität (mit unendlicher Massendichte) entwickelt.

(B) Es gibt Anfangsdaten, bei denen diese Singularität nackt ist.

(C) Es gibt Anfangsdaten, bei denen diese Sungularität in einem "schwarzen Loch" versteckt ist.

(D) Die Eigenschaft (A,B) bzw. (A,C) ist stabil gegen Variationen der Anfangsdaten und der Zustandsgleichung.

Es wird eine Beweisskizze der Existenz solcher Lösungen der Einsteinschen Gleichungen (nicht lineares System von Differntial-Gleichungen) gegeben.

Raumzeiten mit einer Singularität, bei der auch der Druck unendlich ist, werden ebenfalls gegeben.

PETRY, H. : Interpretation der Eichinvarianz im Sinne der Konstant'schen Theorie.

Es wird das Problem der eichinvarianten Kopplung eines skalaren Teilchens an ein äußeres elektromagnetisches Feld diskutiert, für das global keine Vektorpotentiale existieren. In diesem Fall ist die Wellenfunktion als Schnitt in einem komplexen Geradenbündel mit einer kovarianten Ableitung anzusehen,deren Krümmungsform proportional zum elektromagnetischen Feldstärketensor ist. Die Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Geradenbündels werden (nach Konstant) angegeben. Als nichttriviale physikalische Anwendungen ergeben sich z.B. der supraleitende Ring (Flußquantisierung) , sowie der magnetische Monopol. Im letzteren Fall existiert ein Geradenbündel nur, falls die Monopolstärke halbzahliges Vielfaches der reziproken Elementarladung ist.

PISKOREK, A. : Über eine Klasse der Faltungsintegralgleichungen nicht normalen Typs.

Es wurde die Lösbarkeit der vektoriellen Faltungsintegralgleichung

$$(1) \quad (K\varphi)(x) = (\mu_1 M(x) + \mu_2 M(-x))\varphi(x) + (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty a(x,x-y)\,\varphi(y)\,dy + \int_{-\infty}^{c} b(x,x-y)\,\varphi(y)\,dy \right) = f(x)$$

untersucht.

Im Falle des normalen Typs der Gl.(1) und im speziellen Falle des nichtnormalen Typs der Gl.(1) erhält man die NORMALLÖSBARKEIT der Gl.(1) und dim $N_K < \infty$.

SEIFERT, H.-J. : Die Kausalstruktur in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Die Kausalstruktur in Raumzeiten der Allg. Relativitätstheorie hat vom mathemaschen Formalismus (Konformstruktur, Charakteristiken hyperbolischer Feldgleichungen u.a.) und von der physikalischen Interpretation her eine vielfache Rolle. Die pseudo-Riemannsche Geometrie unterscheidet sich global auf Mannigfaltigkeiten wesentlich von einer Riemannschen; anstelle einer Abstandsmetrik findet man eine Form hyperbolischer Signatur, die eine Gleichgradigkeit in Kurvenmengen und eine Halbordnung der Punktmenge induziert. Eine Reihe globaler Sätze und Charakterisierungen läßt sich allerdings übertragen, mit mathematisch überraschenden Ergebnissen und erheblichen physikalischen Konsequenzen. Umgekehrt kann man, ausgehend von Forderungen an eine Halbordnung, die pseudoriemannschen Räume aus der Kausalstruktur aufbauen.

SOHR, H. : Über ein Näherungsverfahren der Festkörperphysik.

Es wird die Approximation der Energie-Eigenwerte eines Festkörpermodells durch die Eigenwerte von Matrizen untersucht und am Bsp. des sogenannten Tamm-Dancoff--Verfahrens demonstriert. Hierbei stellt sich heraus, daß es erforderlich ist, zugleich mehrere Hilberträume zur quantenmechanischen Beschreibung zu benutzen. Diese Hilberträume werden durch Folgen unitärer Matrizen erzeugt und sind zugleich Darstellungsräume der Erzeuger-Vernichter-Algebra des Problems; alle möglichen Darstellungen können auf diese Weise erhalten werden.
Als Beispiel für eine mathematische Anwendung des betrachteten Approximationsverfahrens wird ein konstruktiver Beweis des Projektionssatzes von Lions geführt. Dies liefert z.B. ein Verfahren zur Konstruktion schwacher Lösungen partieller Differentialgleichungen elliptischen Typs aus den Lösungen endlicher linearer Gleichungssysteme.

SPECK, F.-O. : Integrodifferentialgleichungen vom verallgemeinerten Faltungstyp.

Aufbauend auf Sätzen über die Lösbarkeit von linearen Operatorengleichungen auf $L^p(E_m)$ vom "verallgemeinerten Faltungstyp" lassen sich entsprechende Kriterien für Gleichungen auf Sobolevräumen herleiten mit Hilfe einer besonderen Eigenschaft des diese untereinander isometrisch isomorph abbildenden Operators $J^s = F^{-1} d^{-s} F$.
Als Beispiel folgt: Wenn

$$A := \sum_{|\sigma| \leq s \in \mathbb{N}} A_\sigma D^\sigma : L^2_s \to L^2 \quad \text{ist mit}$$

$$\bigwedge_{u \in L^2} A_\sigma u(x) = a_\sigma(x) \cdot u(x) + \int_{E_m} k_\sigma(x,x-y)\, u(y)\, dy + \int_{E_m} \frac{f_\sigma(x,x-y)}{|x-y|^m}\, u(y)\, dy ,$$

wobei die Abbildungen

$$x \mapsto a_\sigma(x) \quad , \quad k_\sigma(x,.) \quad , \quad f_\sigma(x,.)$$

den 1-Punkt-kompaktifizierten m-dimensionalen Raum $\dot{E}_m$ stetig in $\mathbb{C}$, L^1 bzw. die Klasse der Calderón-Mihlin-Kerne abbilden, so gilt: A ist Fredholmsch genau dann, wenn

$$\inf_{\xi \in E_m} \left| \sum_{|\sigma| \leq s} \left(a_\sigma(\infty) + F_{z \mapsto \xi}\, k_\sigma(\infty,z) + F_{z \mapsto \xi} \frac{f_\sigma(\infty,z)}{|z|^m} \right) \cdot i^{|\sigma|} \frac{\xi^\sigma}{d^s(\xi)} \right| > 0$$

und

$$\bigwedge_{x \in E_m} \min_{|\xi| = 1} \left| \sum_{|\sigma| = s} \left(a_\sigma(x) + F_{z \mapsto \xi} \frac{f_\sigma(x,z)}{|z|^m} \right) \xi^\sigma \right| > 0$$

sind.

STUMPF, H. : Funktionale Quantentheorie (Grundlagen, Hochenergie, Anwendungen).

In der neueren Entwicklung der Quantentheorie tritt das Problem der mathematischen Behandlung von Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden unter Berücksichtigung bestimmter Invarianzgruppen, insbesondere der Poincarégruppe immer mehr in den Vordergrund. Zur Lösung des Problems, insbesondere im Hinblick auf die nichtlineare Spinortheorie von Heisenberg, wurde von Stumpf und Mitarbeitern die funktionale Quantentheorie entwickelt. Die funktionale Quantentheorie ist universell anwendbar und umfaßt die gewöhnliche Quantentheorie von Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden. Mathematisch erfordert sie die Untersuchung von Funktionalgleichungen sowie singulären Integralgleichungen und deren Lösungsräumen, und führt damit zu einer bedeutsamen Aufgabe der Weiterentwicklung der Analysis. Im geplanten Vortrag werden die Grundlagen dieser funktionalen Quantentheorie erläutert und in den Anwendungen wird ein spezielles Beispiel aus dem Bereich der Hochenergiephysik diskutiert, das einen detaillierten Eindruck der anstehenden mathematischen Verfahren und Probleme geben soll.

VELTE, W. : Über eine Klasse nichtlinearer Randwertaufgaben.

Es wird eine Klasse von Randwertaufgaben betrachtet mit homogener Dgl. und nichtlinearer Randbedingung, wobei die Nichtlinearität monoton ist. Ein typisches Beispiel ist etwa die Rw.aufgabe für die stationäre Temperaturverteilung in einem Körper mit Abstrahlung nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz :

$$\Delta u = o \text{ in } G , \quad u\big|_{\Gamma_1} = c , \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = o , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u^4\right)\Big|_{\Gamma_3} = o , \quad u\big|_{\partial G} \geqslant o.$$

Unter Verwendung eines Satzes über monotone Operatoren (siehe etwa Lions, Russ. Math. Surveys, 1972 No. 2, Th. 1.1) wird gezeigt :
Die Randwertaufgabe (mit Ungleichung als Randbedingung) besitzt genau eine Lösung in dem Banachraum, die sich durch Abschließung von C^1 (G) bezgl. der Norm

$$\|u\| = \|u\|_{W_2^{(1)}(G)} + \|u\|_{L_5(\partial G)}$$

ergibt. Sie minimiert zugleich das Funktional

$$T(u) = \frac{1}{2} \int_G |\text{grad } u|^2 \, dx + \frac{\sigma}{5} \int_{\Gamma_3} u^5 \, dS , \quad u\big|_{\Gamma_1} = c , \quad u\big|_{\partial G} \geqslant o.$$

Es wird eine Fehlerabschätzung in Energienorm angegeben, und zwar mit Hilfe einer Lösung der "komplementären Variationsgleichung."

WAHL, F. : Das Neue Tamm - Dancoff - Verfahren in der Festkörperphysik.

Das NTD-Verfahren ist eine Methode zur Berechnung von Eigenwertdifferenzen $\omega_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha - \lambda_\beta$ für quantenmechanische Probleme. Es besteht aus einer Transformation und einer Abbruchvorschrift für ein lineares hochdimensionales System von Eigewertgleichungen $\omega\tau^k = \sum_m A^k_m \tau^m$, das man aus fundamentalen Gleichungen der Feldtheorie, wie z.B. der Heisenbergschen Nichtlinearen Spinorgleichung, ableiten kann. Im Vortrag wird der Versuch unternommen, an einem Vielteilchenmodell aus der Festkörperphysik das NTD-Verfahren zu erproben, physikalische und mathematische Gesichtspunkte herauszuarbeiten, mit deren Hilfe eine Transformation $\tau \to \varphi = C\tau$ zweckmäßig gewählt werden kann, so daß das resultierende System

$$\omega \varphi^k = \sum_{i=-2}^{+1} B^k_{k+2i} \varphi^{k+2i}$$

zur Berechnung von interessierenden Näherungslösungen abgebrochen werden darf. Am einfachen Beispiel eines Halbleitersmodell wird durch Berechnung von Zweiteilchenzuständen im Feld von Polarisationsquanten die Wirksamkeit dieses Verfahrens demonstriert.

WALKER, M. : Störungen und Stabilität von Raumzeiten.

Es wird vorgeschlagen wie man die Begriffe "Störung" und "Stabilität" von Raumzeiten in der Allgemeinen Relativitätstheorie mathematisch formulieren kann.

WALKER, M. : Eine Neue Charakterisierung der Bondi-Metzner-Sachs Gruppe.

Wir betrachten folgende Struktur :

1) eine 3 dim. Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} \approx \mathbb{R} \times S^2$;
2) eine Konformklasse $\mathfrak{C}$ von entarteten Metriken auf $\mathcal{N}$ mit Signaten (o - -) ;
3) jedes isotropische Vektorfeld N auf $\mathcal{N}$ (d.h. $g(N,.) = o$, $g \in \mathfrak{C}$) bildet $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$;
4) einen Tensor T von Typ $\binom{2}{2}$ auf $\mathcal{N}$ mit folgenden Eigenschaften:
   (i) $T_{ab}{}^{cd} g_{de} = o$, $g \in \mathfrak{C}$, (ii) $T_{ab}{}^{cd} = T_{ab}{}^{(cd)}$, (iii) für ξ eine beliebige 1 - Form auf $\mathcal{N}$ ist $T_{ab}{}^{(cd)} \xi_c \xi_d$ entweder Null oder ein Element aus $\mathfrak{C}$. Dann die Gruppe der Diffeomorphismen von $\mathcal{N}$ auf $\mathcal{N}$, die T invariant lassen, bildet die asymptotische Symmetriegruppe der Allgemeinen Relativitätstheorie, die BMS Gruppe. Für eine asymptotisch flache Raumzeit ist $\mathcal{N}$ der konforme Rand $\mathcal{J}^+$ im Unendlichen; Axiom 3) ist in diesem Fall eine Folge der Vakuum-Feldgleichungen, und des Tensors T ist $g \otimes N \otimes N$ wo, wenn Ω der Konformfaktor ist, der g herstellt, dann ist $N^b = d\Omega$ (b heißt: Index mit 4-Metrik unterzogen).

WILCOX, C.-H. : The Method of Stationary Phase and Asymptotic Wave Functions.

Consider a wave function $v(t,.) \in L_2(\mathbb{R})$ of the form

$$v(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(xp-t\omega(p))} \hat{h}(p)\, dp.$$

The asymptotic behavior of $v(t,x)$ for $t \to \infty$ can be determined by the method of stationary phase. In the case where $\omega''(p) = 0$ for all $p \in \mathbb{R}$ it is given by

$$v^{\infty}(t,x) = \chi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{e^{i(xp-t\omega(p))}}{(it\,\omega''(p))^{1/2}} \hat{h}(p) \quad , \quad p = P\left(\frac{x}{t}\right)$$

where

$$p = \underline{P}(q) \Leftrightarrow q = \omega'(p)$$

and

$$\chi\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} 1 , & \min \omega'(p) \le \frac{x}{t} \le \max \omega'(p), \\ 0 , & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is shown that $v^{\infty}(t,.)$ is asymptotically equal to $v(t,.)$ in $L_2(\mathbb{R})$, that is

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t,x) - v^{\infty}(t,x)|^2\, dx = 0.$$

Similar results are given for the case where $\omega''(p)$ has a finite number of zeros.

J. Donig (Tübingen)