MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 24|1974

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen

9.6. bis 14.6.1974

Veranstalter: Prof. Dr. R. Ansorge (Hamburg)
Prof. Dr. L. Collatz (Hamburg)
Prof. Dr. G. Hämmerlin (München)
Prof. Dr. W. Törnig (Darmstadt)

Auf dieser von 52 Personen aus 9 Ländern besuchten Tagung über die numerische Behandlung von Differentialgleichungen wurde wieder die Anwendungsbezogenheit des Gebietes deutlich. Im Mittelpunkt standen eine Reihe von Vorträgen über Diskretisierungsmethoden und Differenzenverfahren. Weitere Themen waren Finite Elemente, Eigenwertprobleme und die numerische Behandlung von stiff-equations. In allen Vorträgen konnte über bemerkenswerte Fortschritte berichtet werden. Dennoch blieben viele Fragen offen. Großes Interesse fanden auch Vorträge aus verschiedenen Anwendungsbereichen der Mathematik, wie z.B. Strömungslehre, Schalentheorie, Wärmeleitungsprobleme, Ökonomie, chemische Probleme u.a.

Für das Gelingen der Tagung trug zu einem guten Teil die angenehme Atmosphäre des Instituts in Oberwolfach und die wie immer aufmerksame Betreuung durch das Personal bei.

Teilnehmer

Albrecht, J., Clausthal
Ansorge, R., Hamburg
Biollay, Y., Zürich
Börsch-Supan, W., Mainz
Bohl, E., Münster
Brunner, H., Halifax
Engels, H., Aachen
Esser, H., Aachen
Graf Finck v. Finckenstein, K., Garching
Frank, R., Wien
Frehse, J., Bonn
Galligani, I., Rom
Gekeler, E., Stuttgart
Gentzsch, W., Darmstadt
Gorenflo, R., Berlin
Guenther, R.B., Hamburg
Hadeler, K., Tübingen
Hämmerlin, G., München
Hass, R., Hamburg
Haußmann, W., Bochum
Hertling, J., Wien
Höhn, W., Darmstadt
Hoffmann, K.-H., München
Johnson, C., Göteborg
Kreth, H., Hamburg
Lancaster, P., Münster
Locher, F., Tübingen
Merten, K., Darmstadt
Micula, G., Freiburg
Mittelmann, H.D., Darmstadt
Müller, K.H., Frankfurt
Natterer, F., Saarbrücken
Neunzert, H., Aachen
Opfer, G., Hamburg
Rautmann, R., Hamburg
Reißig, R., Bochum
Richert, W., München
Sachs, A., München
Schäfer, E., München
Schmidt, R., Berlin
Schuhmacher, K., Tübingen
Schwarz, H.R., Zürich
Shampine, L.F., Albuquerque
Sprekels, J., Hamburg
Stetter, H.J., Wien
Taubert, K., Hamburg
Törnig, W., Darmstadt
v. Welck, U., München
Werner, B., Hamburg
Werner, H., Münster
Whiteman, J.R., Uxbridge
Wirz, H.-J., Brüssel
Zielke, R., Tübingen

Vortragsauszüge

Y. BIOLLAY

Sturm-Liouville'sche Probleme: Schranken für die Nullstellen der Eigenfunktionen

Durch eine Zerlegung des Intervalles $[a,b]$ in zwei Teilintervalle $I' = [a,y]$ und $I'' = [y,b]$ definiert man zwei neue Eigenwertaufgaben. Ausgehend von einer partikulären Funktion bestimmt man, mit Hilfe der Barta'schen Ungleichung und des Schwarz'schen Iterationsverfahrens, untere Schranken $\nu_n^-(y)$ für den ersten Eigenwert der in I' definierten Aufgabe. Man bekommt ebenso obere Schranken $\mu_n^+(y)$ für den ersten Eigenwert der in I'' definierten Aufgabe. Eine untere Schranke für die Nullstelle z der zweiten Eigenfunktion wird nach n Schritten der Iteration durch die Wurzel der Gleichung $\nu_n^-(y) - \mu_n^+(y) = 0$ gegeben. Man findet auf ähnliche Weise eine monotone gegen z strebende Folge von oberen Schranken.

Man verallgemeinert das Verfahren für die Nullstellen der anderen Eigenfunktionen.

E. BOHL

Stabilitätsungleichungen und Eigenwerte bei Randwertaufgaben

Vorgelegt sei eine Randwertaufgabe der Form

RAWA $\quad Lx = f(t,x)$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, $Rx = \gamma$ in $\partial\Omega$

mit einem linearen Differentialoperator L und einem $f \in S(\Omega \times \mathbb{R})$. Ein Differenzenverfahren liefere eine zugehörige diskrete Aufgabe der Form

DRAWA $\quad A_h x = F_h x$ in Ω_h = endliche Teilmenge von Ω .

Es wurden Bedingungen diskutiert, unter denen eine Stabilitätsungleichung der Form

$$||x-y||_h \leq \lambda ||\eta_x - \eta_y||_h \qquad (x,y \in \mathbb{R}^{\Omega_h})$$

mit $\eta_z = A_h z - F_h z \quad (z \in \mathbb{R}^{\Omega_h})$ besteht. Im Falle eines linearen, gewöhnlichen und regulären Differentialoperators L der Ordnung zwei und Zweipunktrandbedingungen R erhält man als wesentliche Bedingung für die Funktion f , daß der Wertebereich der Differenzenquotienten $(f(t,v) - f(t,w))(v-w)^{-1} \quad (v \neq w)$ die Eigenwerte von $Lx = \lambda x$, $Rx = 0$ vermeiden muß. Weitere Anwendungsmöglichkeiten der skizzierten Methode wurden aufgezeigt.

H. BRUNNER

Rekursive Kollokationsverfahren zur numerischen Lösung von steifen nichtlinearen Differentialgleichungssystemen

Es sei ein System von steifen, nichtlinearen Differentialgleichungen vorgelegt, nämlich $Y'(x) = F(x,Y(x))$, $x \in I = [a,b]$, mit $Y(a) = Y_o$ $(Y \in R^n,\ n > 1)$. Ferner sei $\pi_N : a = t_o < t_1 < \ldots < t_N = b$, mit $\sigma_k := [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,N-1$. Für den Fall eines homogenen Systems (d.h. $F(x,0) = 0$, alle $x \in I$) sucht man eine (stetige) Näherungslösung $U(x)$ derart, daß man für $x \in \sigma_k$ setzt

$$U_k(x) = \sum_{j=1}^{m} C_{k.j} \exp(\lambda_{k.j}\ (x-t_k))\ (C_{k.j} \in R^n),$$

mit $2 \leqq m \leqq n$.

Dabei sind die $\{\lambda_{k.j}\}$ die Eigenwerte der (als stetig vorausgesetzten) Funktionalmatrix $G(x,Y(x))$ im Punkte $(t_k, U_k(t_k))$, die der Annahme $\lambda_{k.n} < \ldots < \lambda_{k.2} < \lambda_{k.1} (\leqq) 0$ genügen sollen. Die Stetigkeitsbedingung für U liefert die Beziehung $U_k(t_k) = U_{k-1}(t_k)$ $(k = 0,1,\ldots,N-1)$, mit $U_{-1}(t_o) = \hat{Y}_o$, wobei $\hat{Y}_o$ einen geeignet gewählten Anfangsvektor darstellt. Die restlichen Beziehungen zur Bestimmung der Vektoren $\{C_{k.j}\}$ (für ein gegebenes k) werden erhalten, indem man fordert, daß $U_k(x)$ die Differentialgleichungen an gewissen Punkten in σ_k erfüllt (Kollokation):

$$U_k'(\xi_{k.\nu}) = F(\xi_{k.\nu}, U_k(\xi_{k.\nu}))\ ,\ \nu = 1,\ldots,m-1\ ,$$

mit $\qquad Z_k := \{\xi_{k.\nu} : t_k < \xi_{k.1} < \ldots < \xi_{k.m-1} \leqq t_{k+1}\}$.

Die (globale) Näherungslösung kann also auf diese Weise rekursiv bestimmt werden.

Das Verfahren läßt sich ohne weitere Schwierigkeiten modifizieren für den Fall von komplexen Eigenwerten, wie auch für den Fall eines inhomogenen Systems.

Das Verfahren wird numerisch illustriert anhand von zwei nichtlinearen Beispielen (chemische Reaktionsgleichungen).

R. FRANK

Schätzungen des globalen Diskretisierungsfehlers bei Runge-Kutta-Methoden

Zadunaisky gibt in mehreren Arbeiten eine Methode zur Schätzung des globalen Diskretisierungsfehlers an. Diese heuristisch leicht begründbare Vorgangsweise wird einer genaueren mathematischen Analyse unterzogen.

I. GALLIGANI

Identification Problems and Modeling

In the first part of this paper a quasi-linearization method has been considered to solve an identification problem of aquifer flow model with spatially distributed parameters. This method reduces the given problem to a sequence of state-identification problems; for each one of these it is possible to prove, under a few weak assumptions, the existence and uniqueness of the solution and to give a characterization of the solution. Numerical studies have shown that this method is very "efficient" when a good estimation of the transmissivity parameter is known and when the initial and boundary conditions of the aquifer are known approximately.

In the second part of the paper a theoretical and numerical analysis of the regularization problem to minimize $||Tu||^2$ subject to the constraint $||AX(u)-f||^2 \leq \varepsilon$, where

$T \in \mathcal{L}(U,V)$, $A \in \mathcal{L}(R^n,R^n)$, $X \in \mathcal{L}(U,R^n)$, $u \in U$, $f \in R^n$,

(U,V Hilbert spaces and R^n Euclidean space), has been developed. These results have been applied to identify a flood wave propagation linear model.

Finally these methods have been applied to study multicompartiment models for pupulation dynamics in ecosystems.

E. GEKELER und W. GENTZSCH

<u>Differenzenverfahren für quasilineare parabolische Anfangsrandwertaufgaben</u>

Bei der Lösung elliptischer Randwertprobleme mit quasilinearer Differentialgleichung $L(x,t,u) = 0$ bestimmt man häufig das zugehörige Variationsproblem und ersetzt dieses durch eine diskrete Näherung, deren Minimum dann berechnet wird. In diesem Vortrag wird mit dem elliptischen Anteil L der parabolischen Gleichung $u_t - L(x,t,u) = 0$ ebenso verfahren. Auf das resultierende semidiskrete Problem wird das Crank-Nicolson-Verfahren angewendet und ein Verfahren, bei dem u_t durch $(3u(t) - 4u(t-\Delta t) + u(t-2\Delta t))/2\Delta t$ ersetzt wird. Es wird die Konvergenz beider Verfahren bewiesen, wobei ganz spezifische

Eigenschaften ausgenutzt werden, die bei anderen Verfahren von zweiter und höherer Ordnung im allgemeinen nicht vorliegen. Das Crank-Nicolson-Verfahren erweist sich auch hier als (asymptotisch) absolut stabil.

R. B. GUENTHER

Über die numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen in der Umgebung von isolierten Singularitäten nebst Anwendungen

Numerische Methoden zur Berechnung der Lösungen von elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen in der Umgebung isolierter Singularitäten werden angegeben. Anwendungen auf Entwässerungsanlagen und Pumpprobleme werden anschließend behandelt.

K. P. HADELER

Nichtlineare Eigenwertaufgaben

Die Theorie der schon früher eingeführten Eigenwertaufgaben mit "overdamping condition" wird, ausgehend vom Courant'schen Minimum-Maximum-Prinzip, neu entwickelt. Dieser Zugang ergibt relativ leicht die Existenzaussagen und die drei klassischen Extremal-Prinzipien.

Es wird weiterhin gezeigt, wie sich diese im Parameter nichtlinearen Aufgaben in die Theorie der kritischen Niveaus eines Funktionals und des Variationsprinzips von Ljusternik-Schnirelman einordnen lassen.

J. HERTLING

<u>Numerische Behandlung algebraischer Integralgleichungen mit Variationsmethoden</u>

Für gewisse algebraische Integralgleichungen wird die Konstruktion einer Näherungslösung mit Hilfe von Spline-Funktionen besprochen. Eindeutigkeit, Fehlerschranken und Konvergenzordnung dieser Näherungslösung werden diskutiert.

W. HÖHN

<u>Numerische Behandlung von Variationsproblemen mit natürlichen Randbedingungen</u>

Seien G das Einheitsquadrat $\subset \mathbb{R}^2$ und u die minimisierende Funktion des Funktionals

$$\Phi(u) := \int_G F(x,u,u_{x_1},u_{x_2})dx \overset{!}{=} \mathrm{Min} \tag{1}$$

mit $u(x_0) = u_0$ für ein $x_0 \in G$. Φ erfülle die Bedingung

$$\Phi(u + \text{const.}) = \Phi(u) .$$

Ein von Törnig und Meis angegebenes Differenzenverfahren wird zur Berechnung einer Näherungslösung v für u verwendet.

Es wird gezeigt:

$$||v-u|| \leq -\text{const } h \cdot \log h$$

in einer geeigneten, das zugrunde gelegte quadratische Gitter betreffenden Norm. h ist dabei die Gitterkonstante.

C. JOHNSON

On finite element methods for curved shells using flat finite elements

In engineering practice one uses certain finite element methods for thin shells where the curved shell surface is approximated by a polyhedral surface built up by flat plate elements. We prove error estimates for a finite element method of this type for a one-dimensional model problem.

P. LANCASTER

A boundary value problem from the study of heat transfer

A heat transfer problem gives rise to the problem

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = u(y) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \qquad |y| < 1 \text{ and } 0<x<\infty \;;$$

$$\vartheta(0,y) = a(y), \qquad \vartheta(x,\pm 1) = 0 ,$$

and $\vartheta(x,y) \to 0$ uniformly in y as $x \to \infty$. The functions u and a are prescribed. α is a constant. We seek solutions in the form $\vartheta(x,y) = \Sigma\alpha_r\, e^{-\mu_r x} f_r(y)$ where the μ_r's and f_r's satisfy

$$\mu_r^2\alpha_r^2\, f_r(y) + \mu_r u(y)\, f_r(y) + \frac{d^2 f_r}{dy^2} = 0 \qquad f_r(\pm 1) = 0$$

$$a(y) = \sum_r \alpha_r\, f_r(y) \quad .$$

We treat this as a special case of a polynomial eigenvalue problem of the form

$$A(\lambda)x := (A_o\lambda^r + A_1\lambda^{r-1} + \dots + A_r)x = 0$$

(if we write $\mu = 1/\lambda$) and the A_i are (at least) closed operators with range and domain in a complex Banach space. An algorithm for computing eigenvalues and eigenfunctions is presented and convergence and completeness results are presented.

F. LOCHER

Čebyšev-Entwicklung von Lösungen linearer Differentialgleichungen

Die Lösung einer linearen Differentialgleichung mit Polynomkoeffizienten läßt sich durch einen Ansatz mit einer Čebyšev-Entwicklung bestimmen. Da das Konvergenzverhalten dieser Entwicklung durch die Lage der Singularitäten bestimmt wird, liegt es nahe, diese durch eine konforme Abbildung zu verschieben. Im Spezialfall von gebrochen linearen Transformationen (Euler-Knopp-Verfahren) erhält man so spezielle rationale Approximationen an die Lösung, die sich vom Aufwand her gesehen wie Polynome auswerten lassen.

K. MERTEN

Zur Diskretisierung von Variationsproblemen

Betrachtet werden Probleme der Form

$$F[u] = \int_\Omega f(x,y,u,u_x,u_y)dx\,dy \overset{!}{=} \text{Min}, \quad u_{\partial\Omega} = 0 .$$

Ω ist als Einheitsquadrat angenommen. Es werden Bedingungen für die Diskretisierung von $F[u]$ angegeben derart, daß die diskrete Eulergleichung konsistent ist. Es wird unter der Voraussetzung der glm. Elliptizität gezeigt, daß für das diskrete Funktional $F_h[u_h]$ die Konvergenzaussage $F_h[r_h u^o] - F_h[u_h^o] = \mathcal{O}(h^{2p})$ gilt, falls die diskrete Eulergleichung $\frac{1}{h^2}\frac{\partial F_h[u_h]}{\partial u_x}$ konsistent von der Ordnung $\mathcal{O}(h^p)$ und die Funktionalmatrix positiv definit unabhängig von h ist. Für eine spezielle Diskretisierung werden zusätzliche Konvergenzaussagen gewonnen, nämlich

$$||r_h u^o - u_h^o||_{2,1,h} = \mathcal{O}(h^2) \; ; \quad ||J(r_h u^o - u_h^o)||_{2,1} = \mathcal{O}(h^2) .$$

($J(u_h)$ bezeichnet hier die lineare Einbettung auf einer regulären Triangulierung).

Für den eindimensionalen Fall

$$(F[u] = \int_0^1 f(x,y,y')dx \overset{!}{=} \text{Min}, \quad y(o) = y(1) = o)$$

folgt hieraus $||r_h y^o - y_h^o||_{h,\infty} = \mathcal{O}(h^2)$. Für Probleme der Form

$$F[u] = \int_\Omega f(x,y,u,u_x,u_y,u_{xy},u_{xx},u_{yy})dx\, dy \overset{!}{=} \text{Min} ,$$

$$u_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\, \partial\Omega = 0 ,$$

kann ebenfalls $||r_h u^o - u_h^o||_{h,\infty} = \mathcal{O}(h^2)$ gezeigt werden.

G. MICULA

Deficient spline approximate solutions to linear differential equations of the second order

The aim of this paper is the construction of a deficient spline function (of degree n and class C^{n-m}) to approximate the solution of Cauchy problems for linear differential equations of the second order. The existence, uniqueness and convergence of the approximate spline solution are investigated.

H. D. MITTELMANN

Stabilität bei der Methode der finiten Elemente für quasilineare elliptische Randwertprobleme

Es wird die Methode der finiten Elemente für das Variationsproblem

$$I[u] = \int_R F(x,y,u,u_x,u_y)dg + \int_{C_1} G(x,y,u)ds = \text{Min}$$

$$u = f \text{ auf } C_2 , \quad C = C_1 \cup C_2$$

betrachtet, dessen Eulergleichung gleichmäßig elliptisch sei. Die Ansatzfunktionen sind Polynomsplines beliebiger Ordnung auf einer regulären Triangulation des Gebiets R. Es ist notwendig, numerische Integrationsformeln zu benutzen. Eine wesentliche Bedingung für die Konvergenz der Lösung des erhaltenen diskreten Variationsproblems ist die Stabilität im Sinne der bezüglich h gleichmäßigen positiven Definitheit. Es werden Voraussetzungen an die Kubatur- bzw. Quadraturformeln angegeben, unter denen die Stabilität auch bei Verwendung isoparametrischer Elemente gegeben ist. Als numerisches Beispiel wurde eine Kapillarfläche berechnet.

K. H. MÜLLER

Stabilitätsungleichungen für lineare Mehrschrittverfahren

Die Konvergenz von Mehrschrittverfahren zur numerischen Integration von Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen wurde in den grundlegenden Arbeiten von DAHLQUIST und den Büchern von HENRICI untersucht. Anschließend konnte auch die Konvergenz höherer Differenzenquotienten der Lösungen der Differenzengleichungen, bis hin zur Ordnung μ der approximierten Differentialgleichung, behandelt werden; hier sind insbesondere die Untersuchungen von DEJON und GRIGORIEFF zu nennen. Ein wesentliches Hilfsmittel bilden in diesen Arbeiten dabei Stabilitätsungleichungen für gewöhnliche lineare Differenzenoperatoren. Es wird eine Methode vorgestellt, die Gültigkeit der verschiedenen Stabilitätsungleichungen in einheitlicher Weise zu beweisen. Grundlage ist dabei die Charakterisierung einer entsprechenden Abschätzung im Folgenraum ℓ. Weiter wird gezeigt, daß die k-Stabilität im Sinne von SPIJKER sowie die SPIJKERsche Norm ebenfalls auf diese Weise behandelt werden können.

R. RAUTMANN

Die Konvergenz eines Galerkinverfahrens für die Anfangswertaufgabe einer stabilisierten Navier-Stokesschen Gleichung

E. Hopf hat 1951 die Existenz schwacher Lösungen der Navier-Stokesschen Anfangswertaufgabe bewiesen, jedoch nach einem Ergebnis von Ladyženskaja [1972] sind die Hopfschen Lösungen in speziellen räumlichen Gebieten nicht eindeutig. Andererseits haben sich Eindeutigkeitssätze bei mehr als zwei Raumdimensionen nur in Unterräumen der Hopfschen Lösungsklasse beweisen lassen, in denen bisher keine globalen Existenzaussagen bekannt sind. Diese Schwierigkeiten ergeben sich, wie Serrin 1963 gezeigt hat, aus der speziellen Form des nichtlinearen Terms in der schwachen Formulierung der Navier-Stokesschen Gleichung: Er enthält außer der schwachen Lösung u eine Testfunktion φ und verliert i.a. seinen Sinn, wenn φ gegen u konvergiert.

Beseitigt werden die Schwierigkeiten in einfacher Weise, wenn wir diese Richtungsableitung in diesem nichtlinearen Term in Richtung einer Mittelfunktion u_h statt in der von u bilden. Damit erhalten wir eine "stabilisierte" schwache Form der Navier-Stokesschen Anfangswertaufgabe, die mit dem von Hopf verwendeten Galerkin-Ansatz konstruktiv gelöst wird. Die Folge aller Hopfschen Näherungen konvergiert (enthält also nicht nur, wie bei der Hopfschen schwachen Form des Problems, eine konvergente Teilfolge). Die eindeutige Lösung ist stabil auf jedem kompakten Zeitintervall, d.h. sie hängt stetig von den Anfangswerten ab. Darüber hinaus läßt sich jede im wesentlichen beschränkte Hopfsche Lösung durch die Lösungen einer Folge stabilisierter Gleichungen approximieren, in denen der Mittelungsradius h gegen 0 strebt.

W. R. RICHERT

Über ein spezielles Intermediate Problem

Betrachtet wird das Problem der Gewinnung unterer Schranken für die volldefinite Eigenwertaufgabe $Au = \lambda Bu$, mit den Randbedingungen $U_\mu[u] = 0$ $\mu=1,\ldots,\mathrm{grad}(A)$, bei der A,B Symmetrisierbarkeitseigenschaften besitzen. Ausgehend von einer Eigenwertaufgabe, deren Eigenwerte und Eigenfunktionen bekannt sein müssen, werden zweiparametrige Scharen von Base und Intermediateproblemen angegeben. Eine optimale Wahl der beiden Parameter liefert eine numerisch einfach realisierbare Vorschrift für untere Schranken an alle Eigenwerte.

K. SCHUMACHER

Gradientenverfahren im Hilbertraum, die unter schwachen Voraussetzungen konvergieren

Es werden Gradientenverfahren mit automatischer Schrittweitenwahl zur approximativen Minimisierung von Funktionalen im Hilbertraum betrachtet. Sie wurden in Spezialfällen aufgestellt von N. Gastinel (1963) und W. Oettli (1971). Diese Verfahren besitzen den Vorteil, daß die Schrittweiten relativ einfach zu berechnen sind und daß Konvergenz unter ziemlich schwachen Voraussetzungen garantiert werden kann. Eine Anwendungsmöglichkeit besteht darin, Einschließungen für das Minimum eines Variationsproblems durch Kombination mit einem komplementären Variationsproblem suczessive zu verbessern. Auf diese Weise kann man z.B. für ein elliptisches Randwertproblem gleichzeitig eine Approximation des vorgelegten Problems und des zugehörigen konjungierten Problems erhalten. Für gleichmäßig konvexe Optimierungsprobleme werden Abschätzungen für die Konvergenzgeschwindigkeit angegeben und mit den für andere Verfahren bekannten Abschätzungen verglichen.

L. F. SHAMPINE

Stiffness and Non-stiff Differential Equation Solvers

The effects of stiffness are investigated for production codes for solving non-stiff ordinary differential equations.

First, a practical view of stiffness as related to methods for non-stiff problems is described. Second, the interaction of local error estimators, automatic step size adjustment, and stiffness is studied and shown to normally prevent instability. Third, a practical test for stiffness in variable order Adams codes is developed. Numerical results for working codes will be presented for each topic.

U. v. WELCK

<u>Über die Linienmethode bei parabolischen Differentialgleichungen</u>

Betrachtet werden zunächst sachgemäß gestellte Anfangswertprobleme der Form (AP) $u_t = Au$, $u(0) = u_0$ in einem B-Raum $(X, \|.\|)$.

Die verallgemeinerten Lösungsoperatoren $E(t)$ des Problems bilden eine Halbgruppe der Klasse (C_0). Sei A_0 die strikte Erzeugende dieser Halbgruppe, ferner $D_0 := \{u_0 \in X \mid (AP)$ eindeutig lösbar$\}$. Dann gilt: $D_0 = D(A) \cap D(A_0)$ und $\overline{A|D_0} = A_0$. Außerdem wird gezeigt, daß (AP) im wesentlichen genau dann sachgemäß gestellt ist, wenn die Operatoren $C(h) := (Id - \overline{hA|D_0})^{-1}$ im Sinne von LAX - RICHTMYER stabil sind, und somit gegen die verallgemeinerten Lösungsoperatoren $E(t)$ konvergieren.

Das so gewonnene Verfahren wird auf parabolische Differentialgleichungen angewendet und verallgemeinert (zeitabhängige

Operatoren A(t), höhere Konsistenzordnung). Anschließend werden Ergebnisse numerischer Rechnungen diskutiert.

B. WERNER

Monotonie und finite Elemente

Es wird ein verallgemeinerter Monotoniesatz für fastlineare elliptische Randwertaufgaben 2. Ordnung angegeben, der im Gegensatz zum "klassischen" Monotoniesatz für einen Funktionenraum Gültigkeit hat, der auch Spline-Funktionen, wie sie bei der Methode der finiten Elemente verwendet werden, enthält. Dabei wird das Gebiet $B \subset \mathbb{R}^n$, das der Aufgabe zugrunde liegt, in disjunkte Teilgebiete zerlegt und Bedingungen für die monotone Art des Tripels (L,R,S) auf einem durch die Zerlegung induzierten Funktionenraum F angegeben. Dabei kennzeichnet L den Differential-, R den Randoperator und S mißt den Sprung der Normal-Ableitung beim Übergang von einem Teilgebiet zum anderen.

Dieser Monotoniesatz liefert die Möglichkeit zu brauchbaren punktweisen Einschließungen der Lösung von Dirichletproblemen mit kubischen Z_3-Splines.

H. WERNER

Die Berechnung von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe von Singularitäten mit Hilfe nichtlinearer Splinefunktionen

Nach Definition der nichtlinearen Splinefunktionen wird ein Rechenschema zur Lösung der Anfangswertaufgabe gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Hilfe solcher Funktionen vorgeschlagen, wie man es für lineare Splines bei Loscalzo-Talbot und im allgemeinen in der Dissertation von Runge (Münster 1972) findet. Es wird über die Konvergenz und Konvergenzordnung dieser Verfahren und im Spezialfall der rationalen Splines über die Verwendung zur Lokalisierung der Pole von Lösungen der Riccatischen Differentialgleichungen berichtet.

J. R. WHITEMAN

Lagrangian finite element and finite difference methods for Poisson problems

The numerical solution of two dimensional Poisson problems in polygonal domains with nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions is considered. The domains are partioned into triangular or rectangular elements, and a finite element technique based on the Ritz or Galerkin methods is described. In this piecewise polynomial approximating functions which are continuous over the domain and which interpolate only to function values at the nodes are used. For triangular elements using respectively local trial functions which are linear, quadratic and cubic in x and y, and for rectangular elements with local trial functions which are respectively bilinear and biquadratic in x and y, the resulting global stiffness equations are thought of as difference equations. It is shown that, for regular meshes consisting only of right-triangular or square elements, well-known and lesser known "difference-stars" are produced with the various trial functions. In addition special difference stars are obtained using five-node rectangular elements such as occur in local mesh refinement situations. As in all cases the conforming conditions for the Poisson problem are satisfied, that is that the global trial function be continuous on the closed domain, the standard finite element error analysis is available in the difference context. The relative merits of the difference approach and the conventional finite element approach with repeated use of a local stiffness matrix are discussed for a model problem.

R. ZIELKE

Lösungen diskonjugierter Gleichungen

Der n-dimensionale Lösungsraum einer linearen homogenen Differentialgleichung $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y = 0$, $a_i \in C(I)$, I Intervall, heißt Haarsch bzw. diskonjugiert, wenn jede Funktion $f \in U\setminus\{0\}$ auf I höchstens n-1 Nullstellen bzw. $n-1$ Nullstellen der Vielfachheit nach hat. Eine Basis $f_1,\dots,f_n$ von U heißt M-Basis bzw. M^*-Basis, wenn für alle i span $\{f_1,\dots,f_i\}$ ein Haarscher bzw. diskonjugierter Raum ist. Ist I offen oder abgeschlossen, so hat bekanntlich ein diskonjugierter Raum immer eine M^*-Basis. Ist I halboffen, so gibt es für alle $n\geq 2$ Gegenbeispiele. Für ungerade n nehme man den Raum der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq \frac{n-1}{2}$ über $[0,2\pi)$, für gerade n setze man $I = [-1,1)$ und $U = \text{span}\,\{f_1,\dots,f_n\}$, wobei $f_1(x) = x$, $f_i(x) = x^{i-2}(x^2-1)$ für $i=2,\dots,n$ ist.

Für offene und halboffene I sind die Eigenschaften "Haarsch" und "diskonjugiert" bekanntlich identisch. Für abgeschlossene I und alle $n\geq 3$ gibt es Haarsche Räume, die keine M-Basis haben; man setze nämlich für ungerade n : $I = [-1,1]$, $U = \text{span}\,\{g_1,\dots,g_n\}$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x(x-1)$, $g_i(x) = x^{i-3}(x^2-1)(x-1)$, $i=3,\dots,n$. Für gerade $n\geq 4$ wähle man $I = [0,\pi]$, $U = \text{span}\,\{p_1,q_1,\dots,p_{\frac{n}{2}},q_{\frac{n}{2}}\}$, wobei $p_i(x) = \sin(ix)$, $q_i(x) = \cos(ix)$, $i=1,\dots,\frac{n}{2}$, ist.

J. Sprekels (Hamburg)