MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 1/1975

Arbeitstagung Professor Baer

1.1. bis 4.1.1975

Anfang Januar 1975 trafen sich in Oberwolfach wieder die Angehörigen des Baerschen Kreises auf Einladung des Tagungsleiters H. Salzmann. Die Tagung diente dazu, den Kontakt zwischen den Teilnehmern, die zum Teil aus dem Ausland gekommen waren, zu fördern und einen Informations- und Erfahrungsaustausch zu ermöglichen. Trotz der Kürze des diesjährigen Treffens wurde in einem vollen Programm die breite mathematische Tradition dieser Tagung erneut unter Beweis gestellt. Ungefähr die Hälfte der 21 Vorträge berichtete über Themen aus der Gruppentheorie und aus der endlichen und der topologischen Geometrie; die andere Hälfte der Vorträge behandelte Themen aus anderen Gebieten der Algebra, aus der Grundlagentheorie, aus der Theorie geordneter Strukturen, aus der Theorie der Funktionalgleichungen und aus der Funktionentheorie.

Teilnehmer

B. Amberg, Mainz
R. Baer, Zürich
Th. Bedürftig, Paderborn
D. Betten, Tübingen
A. Beutelspacher, Mainz
Th. Buchanan, Tübingen
J. Cofman, Mainz
K. Faltings, Kaiserslautern
U. Felgner, Heidelberg
W. Felscher, Tübingen
R. Göbel, Essen
H. Groh, Kassel
H. Hähl, Tübingen
H.-R. Halder, München
L. Hefendehl, Erlangen
H. Heineken, Würzburg
Ch. Hering, Tübingen
L.C. Kappe, Nürnberg
W. Kappe, "
O.H. Kegel, London
J. Hausen, Houston
H. Kurzweil, Erlangen
R. Löwen, Tübingen
H. Lüneburg, Kaiserslautern
H. Mäurer, Darmstadt
O. Mutzbauer, Würzburg
M.L. Newell, Würzburg
P. Plaumann, Kaiserslautern

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

S. Priess, München
C.M. Ringel, Bonn
K.W. Roggenkamp, Stuttgart
H. Salzmann, Tübingen
P. Schmid, Tübingen
R. Schmidt, Kiel
U. Schoenwaelder, Aachen
R.-H. Schulz, Berlin
N. Schwartz, München
M. Stadelmann, Würzburg
K. Strambach, Erlangen
J.S. Wilson, Cambridge
J. Ziegenbalg, Würzburg

Vortragsauszüge

D. BETTEN: Komplexe Schiefparabelebenen

Als Partitionsfläche bezeichnen wir den Graphen einer differenzierbaren Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft: Die Gesamtheit der Differentiale (zusammen mit der "Senkrechten") bildet eine Partition des $\mathbb{R}^4$ in 2-dimensionale Teilräume. Jede "eigentliche" Partitionsfläche erzeugt eine 4-dimensionale topologische projektive Ebene. Sei zum Beispiel $w>1$ und $f_w: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $(x,y) \longmapsto$ $(x^2 - w[y]y^2, 2xy)$ mit $w[y] = \begin{cases} 1 & \text{für } y \geq 0 \\ w & \text{für } y<0 \end{cases}$.

Dann ist die erzeugte Ebene P_w weder isomorph noch dual zu einer Translationsebene und besitzt eine 6-dimensionale Kollineationsgruppe. Der Parameter $w>1$ gibt genau den Isomorphietyp der Ebene an.

A. BEUTELSPACHER: Teilfaserungen in endlichen projektiven Räumen

Eine t-Teilfaserung des projektiven Raumes $\underline{P} = PG(d,q)$ ist eine Menge S paarweiser windschiefer t-dimensionaler Unterräume von $\underline{P}$. S heißt maximal, falls S in keiner t-Teilfaserung S' echt enthalten ist. S heißt t-Faserung, wenn jeder Punkt von $\underline{P}$ auf genau einem Element von S liegt. Die Beweise und Anwendungen folgender Sätze wurden diskutiert:

1) Sei S eine maximale t-Teilfaserung von $PG(2t+1,q)$, die keine Faserung ist. Dann ist $|S| \leq q^{t+1} - \sqrt{q^t}$. Falls $t > 1$, so ist $|S| < q^{t+1} - \sqrt{q^t}$.
2) Sei S eine maximale 1-Teilfaserung von $PG(4,q)$. Dann ist $q^2+1 \leq |S| \leq q^3+1$. Ferner gibt es Beispiele S, bei denen Gleichheit gilt.

Vom letzten Satz wurden außerdem Verallgemeinerungen angegeben. Für t-Teilfaserungen in $PG(a(t+1),q)$ die obere Abschätzung; für t-Teilfaserungen in $PG(a(t+1)-2,q)$ die Abschätzung nach unten $(a \in \mathbb{N})$.

Th. BUCHANAN: Zur Topologie von Ebenen über reellen Divisionsalgebren

Die Beweisidee des folgenden Satzes wurde vorgetragen:

Satz: Alle Punkträume von projektiven Ebenen über reellen Divisionsalgebren gleicher endlicher Dimension sind homöomorph. Überdies ist jede Punktreihe einer solchen Ebene genauso im Punktraum eingebettet wie im klassischen Fall.

Der Beweis des Satzes benützt die folgenden Hilfssätze:

Seien $\mathcal{A} = \{A \in GL(2n,R): A$ hat keine reellen Eigenwerte$\}$ und $\mathcal{W} = \{W \in O(2n,R): W$ ist schiefsymmetrisch$\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Hilfssatz 1: $\mathcal{W}$ ist ein starkes Deformationsretrakt von $\mathcal{A}$.

Unter der assoziierten Abbildung einer m-dimensionalen Divisionsalgebra D $(m = 4$ oder $8)$ versteht man die Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \longrightarrow GL(m,R)$, die durch die Linksmultiplikation der Algebra $\alpha(x)(y) = x \cdot_D y$ definiert wird.

Hilfssatz 2: α ist homotop zu der entsprechenden assoziierten Abbildung bei $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{H}^{op}$ $(m = 4)$ bzw. $\mathbb{O}$ oder $\mathbb{O}^{op}$ $(m = 8)$.

J. COFMAN: Der Miquelsche Satz in Möbiusebenen gerader Ordnung

Sei $\mathcal{M}$ eine Möbius Ebene gerader Ordnung n mit einer Klasse $\mathcal{K}$

von miquelschen Unterebenen der Ordnung $\bar{n} > 2$. Wenn je drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{M}$ in einem Element der Klasse liegen, dann ist $\mathfrak{M}$ miquelsch.

U. FELGNER: Ultraprodukte und Modellvervollständigung

Wir diskutieren, ob der Satz von Łos wie folgt verallgemeinert werden kann:

$$(*)\left\{\begin{array}{l}\text{Für jedes Ultraprodukt } U = \prod \mathfrak{M}_i/D \text{ und alle } f_D \in U\text{:}\\ Th(\langle U,\underline{a}\rangle_{a\in U}) \cup \Delta(U) \cup \{\Phi(f_d,\dots)\} \text{ ist genau dann}\\ \text{konsistent, wenn } \exists J \in D\ \forall i \in J\text{: } Th(\langle \mathfrak{M}_i,a\rangle_{a\in\mathfrak{M}_i}) \cup\\ \Delta(\mathfrak{M}_i) \cup \{\Phi(f(i),\dots)\} \text{ ist konsistent.}\end{array}\right.$$

Es wurde gezeigt, daß Ultraprodukte generischer Schiefkörper die Bedingung (*) verletzen. Andererseits kann man zeigen, daß eine induktive Theorie T genau dann eine Modellvervollständigung T besitzt, wenn (*) für alle existentiellen Formeln gilt und T die Amalgamierungs-Eigenschaft hat. Cherlin hat gezeigt, daß die letztere Bedingung durch eine Eigenschaft der Lindenbaum-Algebra charakterisiert werden kann.

W. FELSCHER: Auswählen aus nicht leeren Mengen

Es wird über drei Punkte gesprochen, die bei der mengentheoretischen Behandlung mathematischer Theorien von Bedeutung sind (und die leicht übersehen werden). (1) Die Axiome der Mengenlehre definieren (naive) Modelle der Mengenlehre in demselben Sinne, in dem etwa Hilbert's Axiome eine Geometrie definieren. Sie sind im Besonderen keine Realdefinitionen. (2) Beweise müssen endlich sein. Das bedeutet in den meisten relevanten Beispielen die Verwendung rekursiver Konstruktionen; dabei muß unterschieden werden zwischen der Anwendung des Rekursionsverfahrens und dem darauf folgenden induktiven Nachweis, daß das konstruierte Objekt bestimmte Eigenschaften hat. (3) Das

1) Sei S eine maximale t-Teilfaserung von $PG(2t+1,q)$, die keine Faserung ist. Dann ist $|S| \leq q^{t+1} - \sqrt{q^t}$. Falls $t > 1$, so ist $|S| < q^{t+1} - \sqrt{q^t}$.
2) Sei S eine maximale 1-Teilfaserung von $PG(4,q)$. Dann ist $q^2+1 \leq |S| \leq q^3+1$. Ferner gibt es Beispiele S, bei denen Gleichheit gilt.

Vom letzten Satz wurden außerdem Verallgemeinerungen angegeben. Für t-Teilfaserungen in $PG(a(t+1),q)$ die obere Abschätzung; für t-Teilfaserungen in $PG(a(t+1)-2,q)$ die Abschätzung nach unten $(a \in \mathbb{N})$.

Th. BUCHANAN: Zur Topologie von Ebenen über reellen Divisionsalgebren

Die Beweisidee des folgenden Satzes wurde vorgetragen:

Satz: Alle Punkträume von projektiven Ebenen über reellen Divisionsalgebren gleicher endlicher Dimension sind homöomorph. Überdies ist jede Punktreihe einer solchen Ebene genauso im Punktraum eingebettet wie im klassischen Fall.

Der Beweis des Satzes benützt die folgenden Hilfssätze:

Seien $\mathcal{A} = \{A \in GL(2n,R) : A$ hat keine reellen Eigenwerte$\}$ und $\mathcal{W} = \{W \in O(2n,R) : W$ ist schiefsymmetrisch$\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Hilfssatz 1: $\mathcal{W}$ ist ein starkes Deformationsretrakt von $\mathcal{A}$.

Unter der assoziierten Abbildung einer m-dimensionalen Divisionsalgebra D $(m = 4$ oder $8)$ versteht man die Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \longrightarrow GL(m,R)$, die durch die Linksmultiplikation der Algebra $\alpha(x)(y) = x \cdot_D y$ definiert wird.

Hilfssatz 2: α ist homotop zu der entsprechenden assoziierten Abbildung bei $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{H}^{op}$ $(m = 4)$ bzw. $\mathbb{O}$ oder $\mathbb{O}^{op}$ $(m = 8)$.

J. COFMAN: Der Miquelsche Satz in Möbiusebenen gerader Ordnung

Sei $\mathcal{M}$ eine Möbius Ebene gerader Ordnung n mit einer Klasse $\mathcal{K}$

von miquelschen Unterebenen der Ordnung $\bar{n} > 2$. Wenn je drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{M}$ in einem Element der Klasse liegen, dann ist $\mathfrak{M}$ miquelsch.

U. FELGNER: Ultraprodukte und Modellvervollständigung

Wir diskutieren, ob der Satz von Łos wie folgt verallgemeinert werden kann:

$$(*)\left\{\begin{array}{l}\text{Für jedes Ultraprodukt } U = \prod \mathfrak{M}_i/D \text{ und alle } f_D \in U\text{:}\\ \mathrm{Th}(\langle U, \underline{a}\rangle_{a\in U}) \cup \Delta(U) \cup \{\Phi(f_d,\dots)\} \text{ ist genau dann}\\ \text{konsistent, wenn } \exists J \in D \ \forall i \in J\text{: } \mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}_i, a\rangle_{a\in\mathfrak{M}_i}) \cup\\ \Delta(\mathfrak{M}_i) \cup \{\Phi(f(i),\dots)\} \text{ ist konsistent.}\end{array}\right.$$

Es wurde gezeigt, daß Ultraprodukte generischer Schiefkörper die Bedingung (*) verletzen. Andererseits kann man zeigen, daß eine induktive Theorie T genau dann eine Modellvervollständigung T besitzt, wenn (*) für alle existentiellen Formeln gilt und T die Amalgamierungs-Eigenschaft hat. Cherlin hat gezeigt, daß die letztere Bedingung durch eine Eigenschaft der Lindenbaum-Algebra charakterisiert werden kann.

W. FELSCHER: Auswählen aus nicht leeren Mengen

Es wird über drei Punkte gesprochen, die bei der mengentheoretischen Behandlung mathematischer Theorien von Bedeutung sind (und die leicht übersehen werden). (1) Die Axiome der Mengenlehre definieren (naive) Modelle der Mengenlehre in demselben Sinne, in dem etwa Hilbert's Axiome eine Geometrie definieren. Sie sind im Besonderen keine Realdefinitionen. (2) Beweise müssen endlich sein. Das bedeutet in den meisten relevanten Beispielen die Verwendung rekursiver Konstruktionen; dabei muß unterschieden werden zwischen der Anwendung des Rekursionsverfahrens und dem darauf folgenden induktiven Nachweis, daß das konstruierte Objekt bestimmte Eigenschaften hat. (3) Das

Auswählen aus nicht leeren Mengen braucht ebenso wenig ein eigenes Axiom wie in der Geometrie das Auswählen eines nicht auf vorgegebenen Geraden gelegenen Punktes. Hier handelt es sich vielmehr um die Anwendung der prädikatenlogischen Regel, die den Übergang von "aus C, a(y) folgert man b" zu "aus C, es existiert x:a(x) folgert man b" erlaubt, worin y eine Eigenvariable ist. Syntaktisch handelt es sich daher um die Wahl einer neuen freien Variablen; semantisch, in Hinsicht auf die Erfüllbarkeit einer Existenzaussage "es existiert x:a(x)", liegt in der Tat eine Auswahl vor, aber in Bezug auf die Meta-Mengenlehre, welche von der Grundmenge des betrachteten Modelles handelt.

J. HAUSEN: Automorphismengruppen abelscher Primärgruppen

Sei Γ die Automorphismengruppe einer reduzierten abelschen p-primären Gruppe G, wobei $p \geq 5$. Die Bedeutung der p-Normalteiler von Γ für die Struktur von G wurde diskutiert. Es ist wohlbekannt, daß Γ keine nicht-trivialen p-Normalteiler besitzt genau dann, wenn $pG = 0$.

Satz: Sei $pG \neq 0$. Dann enthält jeder nicht-zentrale Normalteiler von Γ einen nicht-zentralen elementar abelschen p-Normalteiler von Γ vom Rang ≥ 2. Wie die Ulm-Invarianten von G an der Gruppenstruktur von Γ abgelesen werden können, wurde angegeben für den speziellen Fall, daß G beschränkt ist.

L. HEFENDEHL: Vierdimensionale quadratische Divisionsalgebren über lokalen Körpern

Es wurde eine Klassifizierung der vierdimensionalen quadratischen Divisionsalgebren über lokalen Körpern vorgetragen.

H. HEINEKEN: Klassifizierung gewisser Gruppen der Ordnung p^6

Sei p eine ungerade Primzahl. Es handelt sich um die Klassifizierung der Gruppen G mit $o(G)=p^6$ und $G^p=G'=Z(G)=\{x \mid x^p=1\}$. Die Isomorphieklassen sind genau die Klassen der Dualitäten des dreidimensionalen Vektorraums über F_p, man erhält $p+3$ Klassen und kann mit Hilfe der Dualität zusätzlich Aussagen über die jeweiligen Automorphismengruppen und die Untergruppenverbände bekommen. Weder Automorphismengruppe noch Untergruppenverband noch beide Angaben bestimmen i.a. die Isomorphieklasse der Gruppe vollständig (Zusammenarbeit mit G.Daues).

Luise-Charlotte KAPPE: Variationen über ein Thema von Macdonald

Es ist wohlbekannt, daß nicht jedes Element der Kommutatorgruppe G' selbst ein Kommutator ist. In diesem Zusammenhang hat I. D. Macdonald (1963) die Frage gestellt, ob es bei zyklischem G' wenigstens immer einen erzeugenden Kommutator gibt. Seine Antwort: Es gibt Gruppen mit zyklischem G', die jedoch nicht durch einen Kommutator erzeugt werden können. Ist G nilpotent oder $|G'| = \infty$ und überdies G' zyklisch, so läßt sich stets ein erzeugender Kommutator finden. - Es läßt sich hinzufügen, daß dasselbe auch für G' zyklisch und $|G'| = p^v q^w$ gilt. - Analoge Fragestellungen ergeben sich auch für Potenzen $G^n = \langle g^n \mid g \in G \rangle$. Hier ergibt sich: Es gibt Gruppen mit zyklischem G^n, in denen sich G^n nicht durch die n-te Potenz eines Elements erzeugen läßt. Ist jedoch G^n zyklisch und G lokal nilpotent oder gelte falls $|G^n| = \infty$, eine der folgenden Bedingungen: (1) G lokal auflösbar, (2) G/G^n lokal endlich oder (3) $n = p^m$, so existiert ein $g \in G$ mit $G^n = \langle g^n \rangle$.

W. KAPPE: Ying-Yang

Ausgangspunkt ist ein klassischer Satz von Steinitz: Ist G eine endliche abelsche Gruppe, so gelte (A). Jede Untergruppe von G ist isomorph zu einer Faktorgruppe von G, (B). Jede Faktorgruppe ist isomorph zu einer Untergruppe von G. Dieser Satz kann etwa mit Hilfe einer Dualität bewiesen werden. Die Aussagen (A) und

(B) selbst haben nichts mit der Verbandsstruktur zu tun, und für diese uneigentliche Dualität wurde der chinesische Ausdruck Ying-Yang gewählt. Schwächere Bedingungen sind (A+) (bzw.(A++)): Jeder (maximale) Normalteiler von G ist isomorph zu einer Faktorgruppe von G.

Satz: Für endliche Gruppen G sind die folgenden Bedingungen äquivalent: (1) (A+), (2) (A++), (3) G ist direktes Produkt von Gruppen der Eigenschaft (A+) bzw. (A++) die nur einen Typ von Kompositionsfaktor haben.

Gilt die Schreiersche Vermutung für einfache Gruppen, so ist G direktes Produkt von einfachen Gruppen und von p-Gruppen mit der Eigenschaft (A). Diese p-Gruppen sind kürzlich (Arch.der Math.) von J.H.Ying vollständig bestimmt worden. Ein ähnlicher Satz gilt wenn man in (B) Untergruppen durch Normalteiler ersetzt.

H. LÜNEBURG: Miszellen zur Funktionentheorie. I

Es sei $a_n = 1$, falls es eine projektive Ebene der Ordnung n gibt, und $a_n = 0$ sonst. Ist dann $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so hat f den Einheitskreis zu natürlicher Grenze.

Zum Beweis benötigt man einen Satz von Szegö über Potenzreihen, deren Koeffizienten nur endlich viele Werte annehmen, den Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Folgen und den Satz von Bruck und Ryser über die Nichtexistenz gewisser projektiver Ebenen.

M.L. NEWELL: Artinian Modules and Hypercentral Ideals.

Let R be a ring with unity and I an ideal of R. If I can be generated by elements belonging to the centre of R, it is called central. I is hypercentral of height ω, if there exists a chain

$$0 = I_0 \leq \ldots \leq I_k \leq I_{k+1} \leq \ldots \leq I_\omega = I$$

such that $I_\omega = \bigcup_k I_k$ and I_{k+1}/I_k is a central ideal of R/I_k. If M is a right unitary R-module, let $^*I$ be the unique maximal submodule of M for which $^*II = 0$.

We prove that if M is artinian, then there exists a positive interger n such that $M = MI + {}^{*}I^{n}$, for every hypercentral ideal of height at most ω.

P. PLAUMANN: Zur Funktionalgleichung von Gołab und Schinzel.

Die Lösungen der Funktionalgleichung

$$f(x)\cdot f(y) = f(x + y\cdot f(x))$$

über einem lokal kompakten Körper werden diskutiert. Mit diesem Hilfsmittel gelingt die Charakterisierung aller lokal kompakten Fastalgebren mit Nullteilern, welche Rang 2 über ihrem Zentrum haben. (Bericht über eine gemeinsame Arbeit mit Karl Strambach.)

S. PRIESS: Ordnungsverträgliche Bewertungen angeordneter Körper.

Eine (Krullsche) Bewertung v eines angeordneten Körpers K heißt ordnungsverträglich, wenn aus $|a| < |b|$ folgt $v(a) < v(b)$. Jede ordnungsverträgliche Bewertung von K läßt sich (wie die natürliche Bewertung mittels Q) durch Klasseneinteilung mittels der positiven Elemente eines Unterkörpers von K darstellen. Ist K reell-abgeschlossen, so ist solch ein maximaler Unterkörper o-isomorph zum Restklassenkörper der Bewertung. Bei Identifizierung o-isomorpher Körper läßt sich K in eine Kette von Körpern von formalen Potenzreihen einbetten, so daß jeder Körper dieser Kette eine maximale unmittelbare Erweiterung von K bezüglich einer ordnungsverträglichen Bewertung ist und es zu jeder ordnungsverträglichen Bewertung v von K einen Körper dieser Kette als maximale unmittelbare Erweiterung von K bezüglich v gibt.

C-M. RINGEL: Wurzelsysteme und Darstellungen von Graphen.

Bernstein, Gelfand und Ponomarev haben gezeigt, daß die (mysteriöse) Übereinstimmung der Anzahl der unzerlegbaren linearen Darstellungen eines Dynkin-Diagramms A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 und der

Anzahl der zugehörigen positiven Wurzeln, die von Gabriel bewiesen wurde, eine tiefere Bedeutung hat: man kann die unzerlegbaren Darstellungen aus den einfachen Darstellungen so konstruieren, wie die positiven Wurzeln aus den einfachen Wurzeln hervorgehen. Im Falle eines erweiterten Dynkin-Diagramms kann man diese Methode verwenden, um alle unzerlegbaren Darstellungen endlicher Dimension zu bestimmen. Dies gilt auch für die Diagramme mit Mehrfachlinien $(B_n, C_n, \ldots)$, auf diese Weise erhält man alle unzerlegbaren Darstellungen von K-Gattungen (K ein komm. Körper), die eine positive quadratische Form besitzen. (V.Dlab, C.M.Ringel: "Representations of graphs and algebras", Carleton Math. Notes 8, and C.M.Ringel: "Representations of K-species and bimodules").

P. SCHMID: Zu einem Satz von Gaschütz.

Vor knapp 10 Jahren hat Gaschütz gezeigt, daß jede endliche p-Gruppe G mit mehr als p Elementen nichtinnere p-Automorphismen besitzt. Entscheidendes Beweismittel war ein Kriterium über kohomologische Trivialität bei p-Gruppen. Allgemeine Überlegungen über Automorphismen von Gruppenerweiterungen ermöglichen nun einen kurzen, induktiven Beweis dieses Satzes, der davon keinen Gebrauch macht. Für nichtabelsches G gibt es immer nichttriviale p-Untergruppen der äußeren Automorphismengruppe von G, die auf dem Zentrum $Z(G)$ trivial operieren. Diese Verschärfung ist wesentlich für den Induktionsbeweis, stellt aber sicher noch nicht das bestmögliche Ergebnis in dieser Richtung dar.

R. SCHMIDT: Untergruppenverbände zweifach transitiver Permutationsgruppen

Satz. Sei G eine zweifach transitive Permutationsgruppe auf einer Menge Ω, $|\Omega| = n \geq 4$, mit

(1) $G_{\alpha\beta}$ läßt höchstens einen weiteren Punkt fest $(\alpha \neq \beta \in \Omega)$

(2) G wird von Involutionen erzeugt.

Ist dann H eine Gruppe mit $V(H) \simeq V(G)$, so ist $H \simeq G$.

Korollar 1. Jede dreifach transitive Gruppe vom Grad $n \geq 4$, die von Involutionen erzeugt wird, ist durch ihren Untergruppenverband bestimmt.

Korollar 2. Die folgenden Gruppen sind durch ihren Untergruppenverband bestimmt:

(a) $PSL(n,q)$, $n \geq 2$, q eine Primzahlpotenz mit $q \geq 4$, falls $n=2$;

(b) $PSU(3,q^2)$, $q \geq 3$ eine Primzahlpotenz ;

(c) die Suzukigruppen $Sz(q)$ der Ordnung $(q^2+1)q^2(q-1)$ mit $q=2^{2r+1}$, $r \geq 1$;

(d) die Ree-Gruppen der Ordnung $(q^3+1)q^3(q-1)$ mit $q=3^{2r+1}$, $r \geq 1$

oder allgemeiner Gruppen vom Ree-Typ.

N. SCHWARTZ: η_α -Strukturen

Es ist bekannt, daß η_α -Strukturen (das sind η_α -Mengen, η_α -Gruppen und η_α -Körper) universell sind: Jede angeordnete Menge, Gruppe oder Körper einer Kardinalität nicht größer als $\aleph_\alpha$ läßt sich unter Erhaltung der Anordnung in einer η_α -Struktur derselben Art einbetten. Darüber hinaus sind zwei η_α -Strukturen der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ zueinander ordnungs-isomorph.

Mengen, Gruppen und Körper lassen sich in gewissem Sinne in abgeschlossene Oberstrukturen einbetten. Auf diesen Oberstrukturen kann man jeweils eine Abhängigkeitsrelation definieren. Mit Hilfe der Abhängigkeitsrelationen ist eine einheitliche Formulierung zweier Sätze über die Fortsetzung von ordnungserhaltenden Monomorphismen für die verschiedenen Strukturen möglich. Im wesentlichen mit Hilfe dieser Sätze lassen sich Universalität und Eindeutigkeit von η_α -Strukturen für alle hier betrachteten Strukturen gleichzeitig beweisen.

K. STRAMBACH: Moufang-Loops und Hurwitzsche Ternärkörper

Es sei K die multiplikative Loop einer lokal euklidischen planaren Doppelloop D. Ist K eine zusammenhängende unendlich oft differenzierbare Moufang-Loop, so ist K isomorph zu einer der folgenden Strukturen:

(a) die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen

(b) die multiplikative Gruppe der Quarternionen

(c) die multiplikative Gruppe der klassischen Oktaven-Divisionsalgebra.

J. ZIEGENBALG: Die Verbände der endlichen Normalteiler in Gruppenbasen isomorpher Gruppenringe

Ausgangspunkt der im Vortrag behandelten Fragestellung ist das Isomorphieproblem von Gruppenringen: Seien G und H Gruppen, deren ganzzahlige Gruppenringe $\mathbb{Z}G$ und $\mathbb{Z}H$ als $\mathbb{Z}$-Algebren isomorph sind. Inwieweit hat dies zur Folge, daß die Gruppenstruktur von G mit der von H übereinstimmt; spezieller: wann ist $G \cong H$? Bewiesen wurde der

Satz: Seien G und H Gruppen mit isomorphen ganzzahligen Gruppenringen: $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$. Dann gibt es einen Isomorphismus $\Phi : \mathcal{N}_f(G) \longrightarrow \mathcal{N}_f(H)$ des Verbandes $\mathcal{N}_f(G)$ der endlichen Normalteiler von G auf den Verband der endlichen Normalteiler von H . Darüber hinaus ist für jeden endlichen Normalteiler N von G stets $|N| = |\Phi(N)|$, ($|N|$ = Ordnung von N).

Folgerung: (1) Ist A ein endlicher, abelscher Normalteiler von G , so ist $A \cong \Phi(A)$.

(2) Ist N ein endlicher, auflösbarer Normalteiler von G , so ist $\Phi(N)$ auflösbar, und die Faktoren der Kommutatorreihen von N und $\Phi(N)$ sind isomorph: $N^{(i)}/N^{(i+1)} \cong \Phi(N)^{(i)}/\Phi(N)^{(i+1)}$

für $i \geq 0$.

Thomas Buchanan

(Tübingen)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft