MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 3/1975

Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule

12.1. bis 18.1.1975

Die Tagung stand unter der Leitung von R. Borges und H. Dinges (beide Frankfurt). Es fand ein reger Gedankenaustausch zwischen Lehrern an der Sekundarstufe II - zum Teil an den Lehrplankommissionen beteiligt - und Hochschullehrern mit dem Fachgebiet Wahrscheinlichkeitstheorie, mathematische Statistik oder Didaktik der Mathematik statt. Allerseits wurde es als besonders fruchtbar empfunden, dass die Tagung auf das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Schule beschränkt war. Dadurch konnten Probleme grundsätzlicher Natur immer wieder von den verschiedensten Gesichtspunkten behandelt werden. Am Anfang der Tagung wurden schulrelevante fachwissenschaftliche Referate gehalten, dann fachdidaktische. Ferner wurde über einige Lehrplanentwürfe vorgetragen. Zwei am Rande der Wahrscheinlichkeitsrechnung stehende Themen wurden am Ende der Tagung behandelt.

Teilnehmer

H. Althoff, Bielefeld
B. Andelfinger, Düsseldorf
J. Bammert, Freiburg
F. Barth, München
W. Blum, Kassel
R. Borges, Frankfurt
K. Breinlinger, Wuppertal
H. Dinges, Frankfurt
H. Freudenthal, Utrecht
D. Heitele, Dortmund
S. Herz, Heidelberg
G. Holland, Giessen
J. Homeister, Berlin
F. Kosswig, Bonn
J. Kratz, München
B. Krickeberg, Heidelberg
E. Mellin, Freiburg
D. Müller, Heidelberg
M. Mürmann, Heidelberg
B. Nijdam, Utrecht
K. Pehl, Frankfurt
H. Postel, Kassel
L. Scheller, Frankfurt
R. Schmähling, Düsseldorf
G. Schmidt, Bad Kreuznach
J. Schmidt, Berlin
N. Schmitz, Münster
E. Stampe, Berlin
J. von den Steinen, Solingen
H. Stever, Landau
W. Vogel, Bonn
H. Wäsche, Karlsruhe
J. Wahrendorf, Zürich
E. Walter, Freiburg
H. Wegner, Duisburg
H. Winter, Neuss

Vortragsauszüge

H.ALTHOFF: Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem Aufbaukurs der Klassen 9 und (oder) 10

Der Kurs enthält die Themenkreise

1) Einfache Zufallsversuche
2) Zusammengesetzte Zufallsversuche
3) Erwartungswert von Zufallsgrössen
4) Besondere Zählverfahren (Kombinatorik)

Besonders betont werden

a) Motivation zum Einstieg
b) Die Aufstellung von Wahrscheinlichkeitstabellen (zu 1 und 2)
c) Die selbstständige Bearbeitung von Problemaufgaben

Ueber die bisher gemachten Erfahrungen (der Kurs wurde von mehreren Kollegen mit einem Manuskript des Referenten durchgeführt) wird abschliessend kurz berichtet.

B.ANDELFINGER: Statistik/Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Orientierungsstufe mit Ausblicken nach SI und SII

1) Durch Lehrplananalysen wird zunächst eine Bestandsaufnahme vorgenommen. Sie zeigt zwei Trends: einerseits die Bewegung zum "Curriculum" Statistik/ Wahrscheinlichkeitsrechnung - und die Gegenbewegung zur integriert - problemorientierten Behandlung.
2) Als Möglichkeit wird ein Vorschlag entwickelt, der in Form von "Lernziel -/ Methoden - Paketen" beiden Gesichtspunkten gerecht werden könnte. Es handelt sich hierbei um - teilweise fächerübergreifende - Projekte zur Datenerhebung und - auswertung, die gleichzeitig fachsystematische Grundkenntnisse liefern (z.B. Projekt "Verkehrskreuzung", Projekt "Lautschrift").
3) Sind die "Pakete" der Orientierungsstufe vorwiegend umweltbezogen und auf grundlegende Verhaltensweisen abgestimmt, so müssen sie für die SI in beiden Richtungen erweitert werden, da sich "Umwelt" und "Verhaltensweisen" des Schülers erweitern. Zusammen mit einem didaktischen Strukturgitter wird dieses wieder an Beispielen erläutert, insbesondere auch im Blick auf berufliche Umfelder.
4) Die Planungskonzeption für Orientierungsstufe und SI führt zu Konsequenzen für SII. Hier wird ein Lehrgang vorgeschlagen, der über einen Vorbereich ("häufigkeitsorientierte" Statistik) zu einem Hauptbereich (W.rechnung) und Akzentuierungen (Verteilungen / beurteilende Statistik etc.) im Wahlbereich führt.

J.BAMMERT: Verwertung des Modellbegriffs bei der Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Der Gebrauch von mathematischen Modellen als Mittel der Sprachpräzisierung tritt in der Wahrscheinlichkeitstheorie etwas mehr in den Vordergrund als in anderen angewandten mathematischen Fächern. Der vorgetragene Modellbegriff umfasst explizit nicht nur den das Experiment beschreibenden Wahrscheinlichkeitsraum, sondern auch seine Konstruktion aus einem methodisch früheren "Modell der experimentellen Situation". Damit die Erweiterung durch einen Wahrscheinlichkeitsraum praktischen Sinn hat, sind Forderungen an die Interpretation der Modelle in der Wirklichkeit zu stellen. Es werden drei heuristische Prinzipien formuliert und anhand von Beispielen diskutiert. Die Prinzipien sind:

1) Die Interpretation soll so allgemein sein, dass sie wiederholbar ist.
2) Die Interpretation soll so genau abgegrenzt sein, dass die Wiederholungen zählbar sind.
3) Jede Wiederholung soll die Möglichkeit für nur eine einzige Beobachtung des interessierenden Ereignisses bieten.

F.BARTH: Erste Erfahrungen mit dem curricularen Lehrplan "Stochastik" in Bayern

1) Ueberblick über die Organisation der Kollegstufenmathematik in Bayern
2) Skizze der Inhalte der Kurse über Stochastik (veröffentlicht im Amtsblatt des Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultur)
3) Bericht über erste Erfahrungen und aufgetretene Schwierigkeiten mit dem Lehrplan an den Schulen und in der Lehrerfortbildung

   Zentrale Themen: 1. Semester: "Wahrscheinlichkeit" und "Zufall"
   2. Semester: Zufallsgrösse, Binomialverteilung
   3. Semester: Hypothesentest, Konfidenzintervall

R.BORGES: Wieviel "sollte" man über Experimente wissen, bevor man mit der Reflexion des Wahrscheinlichkeitsbegriffes beginnen kann?

Es werden die folgenden Thesen vertreten:

1) Man führe den Begriff des (Mess-) Ergebnisses und Ereignisses an Hand eines deterministischen Experimentes ein.
2) Die mehrmalige Durchführung eines Experimentes behandle man wie in der beschreibenden Statistik. In diesem Rahmen führe man die Häufigkeitsverteilung ein.
3) Man beschreibe die Ergebnismenge mehrstufiger Versuche u.a. durch das kartesische Produkt.

4) Bei einer endlichen Ergebnismenge kann die Verknüpfung von Ereignissen nach Einführung der Wahrscheinlichkeit für die Ergebnisse und Ereignisse behandelt werden.

K.BREINLINGER: <u>Mass und Integral</u>

Die enge Verbindung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit dem Massbegriff und ihre verstärkte Hereinnahme in die Schulmathematik legen es nahe, das Integral im Zusammenhang mit masstheoretischen Ueberlegungen zu behandeln. Dies fördert das Verständnis nicht nur mancher Aspekte der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern lässt auch den Begriff des Integrals besser hervortreten. Die vorgeschlagene Einführung in die Integralrechnung lässt sich durch die Begriffe zählen, messen und bilanzieren charakterisieren. Die etwas grösseren methodischen Schwierigkeiten stehen nach Meinung des Referenten in einem vernünftigen Verhältnis zum Zugewinn.

H.DINGES: <u>Bemerkungen zur relativen Häufigkeit</u>

Im Vortrag sollten am Gegenstand der relativen Häufigkeit die folgenden Thesen erläutert werden.

1) Die axiomatisch - deduktive Strukturierung eines Wissensgebietes entspricht (auf jedem Niveau) den Anforderungen von Lehr - und Prüfbarkeit am unmittelbarsten. Ganz besonders im Fall der Wahrscheinlichkeitsrechnung verschenkt man aber den Bildungswert, wenn man der Versuchung einer derartigen Strukturierung nicht widersteht.

2) Anstelle einer <u>Formalisierung</u> einzelner Begriffe (im vorliegenden Fall handelt es sich gewöhnlich um die "Wahrscheinlichkeit" und die "Zufallsvariable") muss eine dem jeweiligen Verständnishorizont angepasste disziplinierung des Sprachgebrauchs (z.B. beim Gebrauch von Worten wie Experiment, Modell, Hypothese) angestrebt werden. Statt zu definieren muss man <u>Sprechweisen</u> pflegen, mit Hilfe derer man insbesondere die Bedeutung von Rechnungen verständlich machen kann.

H.FREUDENTHAL: <u>Wahrscheinlichkeit über Mengen oder über Aussagen</u>

Die klassische Methode die Wahrscheinlichkeit aufzuziehen, ist die Keynes'sche mit Wahrscheinlichkeit von Ereignissen oder Aussagen. Die Mathematiker haben sich aber mehr mit dem Kolmogoroffschen Axiomschema des Wahrscheinlichkeitsfeldes befreundet. Ein konsequentes Festhalten daran führt bald zu unerträglichen Umständlichkeiten im Formalismus. Man sollte daher besser gleich von Anfang an mit

- nicht notwendig nur einer - stochastischen Variablen arbeiten. Eine solche Stochastik x wird durch drei Dinge definiert:

1) ihren Wertebereich Ω

2) eine Menge B von Teilmengen von Ω

3) eine Funktion P auf den Aussagen über x mit Werten in $[0,1]$

Dabei soll gelten: - P hat für logisch äquivalente Aussagen denselben Wert.
- P ist sinnvoll für $x \in A$.
- und weiter die üblichen Bedingungen für P .

Betrachtung mehrerer Stochastiken zusammen ersetzt die lästigen kartesischen Produktbildungen von Wahrscheinlichkeitsfeldern, man kommt mit einem Buchstaben P aus.

D.HEITELE: Fundamentale Ideen der Stochastik von einem erkenntnistheoretischen Standpunkt aus

Welche Ideen und Begriffe für die Stochastik fundamental oder zentral sind, ist abhängig vom Standpunkt. Für das folgende wird ein erkenntnistheoretisch - pragmatischer Standpunkt bezogen: fundamental sind die Ideen, die dem Individuum auf allen Stufen seiner Entwicklung möglichst viel Erkenntnis vermitteln. Auf dieser Basis wird versucht, eine Liste fundamentaler stochastischer Ideen aufzustellen und sie in die Brunersche Theorie der Curriculumspirale einzubetten. Solche Ideen, die schon für das Grundschulkind eine Rolle spielen können und sollen, sind z.B. die Unabhängigkeit, die Gleichverteilung, die Zufallsvariable und die Gesetze der grossen Zahl. Als Leitidee, die zwar bei jeglicher Mathematisierung implizit hereinspielt, in der Stochastik aber ganz besonders bewusst wird, wird das Verhältnis zwischen mathematischem Modell und Wirklichkeit gesehen, im Sinne einer "distanzierten Rationalität" (D.W.Müller).

G.HOLLAND/H.POSTEL: Bericht über die Entwicklung und Erprobung von Lernsequenzen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe I

Für die Klasse 7 wurde eine Lernsequenz zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (Zufallsversuche, Ergebnisraum, Ereignis, Wahrscheinlichkeit, Laplace-Experimente, mehrstufige Zufallsversuche, Multiplikationsregel) ausführlich dargestellt, die an 25 hessischen Schulen (Gymnasien, Realschulen, Hauptschulen, Gesamtschulen) erprobt wurde. Ein Ziel dieses Projektes ist es, festzustellen, ob die in den hessischen Rahmenrichtlinien Mathematik SI angegebenen Lernziele

- didaktisch sinnvoll,
- für alle Schüler und in welcher Zeit erreichbar sind (Differenzierungsproblem).

Ein weiteres Ziel ist es, Lehrer in den Stand zu versetzen, die genannten Inhalte zu unterrichten (Fachwissenschaftliche Kompetenz, Handlungskompetenz). Das Projekt wurde in folgenden Schritten durchgeführt: Fortbildungslehrgang zu den fachwissenschaftlichen Grundlagen, Entwicklung einer Lernsequenz (Lernziele, unterrichtsmethodische Vorschläge, Arbeitsblätter für Schüler, Test), Erprobung der Lernsequenz, Fortbildungslehrgang zur Auswertung der Unterrichtserfahrungen, Auswertung des Testes, Ueberarbeitung der Lernsequenz mit erneuter Erprobung und Auswertung.

F.W. KOSSWIG: <u>Ein einfaches Modell zum Testen einer Hypothese</u>

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II (11.-13.Klasse) ist das Testen einer Hypothese eine der wichtigsten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (WR). Das Testen einer Hypothese bildet daher nach den Lehrplänen meist den Abschluss eines Kurses WR.

Im Vortrag wird ein Weg aufgezeigt, wie man mit geringen Vorkenntnissen aus der WR (Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace, Additions- und Multiplikationssatz, bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit) an Hand eines Urnenmodells alle wichtigen Begriffe (z.B. Nullhypothese, Entscheidungsvorschrift, α- und β- Fehler, Irrtums- und Sicherheitswahrscheinlichkeit, Wirkungsfunktion) behandeln kann. Zugleich wird damit eine fachdidaktische Analyse gegeben, an welchen Stellen eines Kurses WR das "Testen einer Hypothese" eingeordnet werden kann und welche neuen Begriffe (z.B. Zufallsvariable, Verteilung, Hypergeometrische Verteilung, sofern diese Begriffe noch nicht bekannt sind) damit motiviert werden können.

Das vorgeschlagene Modell lässt sich anwenden auf Alternativtests und auf Tests mit zusammengesetzter Nullhypothese; mit ihm kann das Testen einer Hypothese an Beispielen auch schon am Ende der Sekundarstufe I behandelt werden.

B. NIJDAM: <u>Wahrscheinlichkeitsrechnung im Dienste der Mathematischen Statistik</u>

In Holland sind seit 1969 Experimente zur Einführung der Statistik in der Oberschule angestellt worden. Es wurde ein Schulbuch entwickelt, in welchem die statistischen Themen "Testen von Hypothesen" und "Vertrauensintervalle" eine zentrale Stellung einnehmen. Diese Themen werden auf vier verschiedenen Niveaus angegangen; auf jedem Niveau brauchen die Schüler höhere mathematische Hilfsmittel und mehr Kenntnis der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

K. PEHL: Die VHS - Zertifikate Statistik

Im Rahmen des Zertifikatsprojekts der Deutschen Volkshochschulen wird auch im Bereich Statistik ein Lernangebot in der Weiterbildung gemacht, welches sich an dem Verwendungsbezug des Gelernten im beruflichen Zusammenhang orientiert. Bedarfsanalysen legen eine Trennung der beiden Bereiche deskriptive Statistik einerseits und induktive Statistik mit Wahrscheinlichkeitsrechnung andererseits nahe. Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in den bundeseinheitlichen VHS-Zertifikatsprüfungen vorgewiesen werden sollen, sind in Lernzielen dokumentiert. Auf welchem Wege diese Lernziele erreicht werden, bleibt dem Kursleiter überlassen. Zur Aufgabe des Zertifikatsprojekts gehört es auch, ihm Hilfen in Form von Vorschlägen zur Gestaltung problematischer Unterrichtseinheiten bereit zu stellen. Es wurden Fragen der Auswahl der Lerninhalte, der Lernzielsetzung und der Lernzieloperationalisierung angesprochen. Darüber hinaus wurden an Beispielen die Problematik lernzielorientierter Testaufgaben diskutiert.

L. SCHELLER: Probleme bei der Behandlung von Glücksspielen

Es wurde über Erfahrungen mit Lrhrerstudenten aus einem Seminar über Glücksspiele (Roulette) gesprochen. Die Hauptschwierigkeiten der Studenten waren:

a) Anschauung führte nicht zur Präzessierung des gegebenen Problems.
b) Auf mathematischem Weg gewonnene Ergebnisse konnten nicht anschaulich interpretiert werden.
c) Es schien eine Sperre zu bestehen, bekannte Ergebnisse aus anderen Gebieten der Mathematik (z.B. Analysis) zu verwenden.

Solche Probleme scheinen besonders aufzutreten, bei der Behandlung von stark motivierenden Themen der angewandten Mathematik, da dort dauernd Theorie und Anschauung verbunden werden müssen.

G. SCHMIDT: Statistik/Wahrscheinlichkeitsrechnung im Grundfach Mathematik der "Mainzer Studienstufe"

Die Ziele des Grundfachs Mathematik in der Mainzer Studienstufe werden in erster Linie von dem Anwendungsbezug der Mathematik bestimmt, d.h. der Schüler soll fähig werden, die Rolle der Mathematik in den für ihn relevanten Anwendungen zu erkennen und kritisch zu beurteilen, um sich auf dieser Grundlage der Hilfe mathematischer Methoden bedienen zu können.

Zur Realisierung dieser Zielvorstellungen scheint ein Kurs Statistik/WR in besonderem Masse geeignet, wenn er auf folgende Schwerpunkte ausgerichtet wird:

- die Lernziele umfassen in erster Linie Kenntnisse und Fähigkeiten, die zur Lösung anwendungsbezogener Probleme erforderlich sind.
- für die Grundbegriffe der Theorie wird ein Präzisionsgrad verlangt, der in Einzelfällen eine kritische Beurteilung der Gültigkeit statistischer und wahrscheinlichkeitstheoretischer Schlüsse zulässt.
- der stoffliche Umfang des Kurses ist so bemessen, dass ausreichend Zeit zur selbständigen Bearbeitung von Problemsituationen zur Verfügung steht.

In der fachspezifischen Ebene wird diesen Vorstellungen mit Lernzielen zu folgenden Themen entsprochen: Beschreibende Statistik, Kombinatorik, zufällige Ereignisse, Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit und unabhängige Ereignisse, Zufallsgrössen und Wahrscheinlichkeitsverteilung, Testen von Hypothesen.

N. SCHMITZ: <u>Kurzbericht über eine AG "Stochastik in der Schule"</u>

Bericht über eine 1973/74 gemeinsam mit Herrn Kinder (Univ. Bremen) an der Universität Münster durchgeführte Arbeitsgemeinschaft, die das Ziel hatte, Stochastikkurse auf Schulniveau zu erarbeiten und später an den Schülern zu erproben. Es wurden verschiedene Ansätze erarbeitet, insbesondere

1. Zugang über "Glücksspielautomaten"/ gefälschte Münze
2. Wettheoretischer Zugang
3. Zugang über die Behandlung des radioaktiven Zerfalls
4. Zugang über relative Häufigkeiten bei "Urnenexperimenten"
5. "Axiomatischer" Zugang über Boolesche Algebren

Einige in diesem Zusammenhang aufgetauchten Fragen und Probleme werden zur Diskussion gestellt.

J. VON DEN STEINEN: <u>Eigenwerttheorie auf der höheren Schule</u>

Markoffketten stellen ein Bindeglied zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und linearer Algebra dar. Sie sind für die höhere Schule eine Bereicherung der Vektorrechnung. Im problemorientierten Unterricht behandelt man die Struktur der Lösungsmenge von homogener und inhomogener Differenzengleichung, die Reduktion der Ordnung der Gleichung bei einer bekannten Lösung, die Struktur des Lösungsraums bei mehrfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms und gewinnt ein Verfahren zur Lösung von Systemen.

E. WALTER: Mittelwerte

Für die Wahl einer geeigneten Lokalisationsmasszahl für n positive Werte $x_1,\ldots,x_n$ werden verschiedene Begründungen zusammengestellt:

1. Axiomatische Begründung (z.B. die Begründung des arithmetischen Mittels $\bar{x}$ bei der Herleitung der "Gauss"-Verteilung von Gauss 1809)
2. Begründung mit Hilfe der Momente ($M_r = \sqrt[r]{\Sigma x_i^{\,r}/n}$, $r = -1,0,1,2,\ldots$)
3. Begründung mit Hilfe der Punktschätzung (Verwendung von optimalen Schätzfunktionen von Lokalisationsparametern, z.B. $\bar{x}$ bei der Normalverteilung, Bereichsmitte bei Gleichverteilung)
4. Begründung mit Hilfe der Prüfung der Symmetrie bezüglich Null. Verwendung derjenigen Translation, bei der das Prüfmass verschwindet ($\bar{x}$ beim t-Test, Median beim Vorzeichentest, Hodges-Lehmann-Statistik beim Wilcoxontest).
5. Begründung mit Hilfe eines Abstandsmasses (K mit $\Sigma(x_i - K)^r \overset{!}{=}$ Min.)
6. Begründung als Ersatzwert. Hätten alle Beobachtungseinheiten den Ersatzwert, so würde sich die gleiche "Wirkung" wie bei den ursprünglichen Beobachtungswerten ergeben, z.B. $E_a = \frac{1}{a} \ln(\Sigma e^{ax_i} / n)$ bei der Mittelung von Lautstärken.

H. WINTER: Erfahrungen zur Stochastik auf der Primarstufe

An einem mehrfach erprobten Unterrichtsbeispiel wird skizziert, wie nach Meinung des Referenten die erste bewusste Auseinandersetzung mit Zufallsphänomenen vonstatten gehen sollte. Danach werden einige Thesen zur Didaktik der Stochastik auf der Primarstufe formuliert und erläutert:

1. Situationen aus dem Erfahrungskreis der Schüler wählen und diese bewusst machen, Transfers anstreben
2. Modellieren der Situationen mit geeignetem Material und Schematisieren in Diagrammen
3. Kein eigenständiges Lernangebot (Kursus) in Stochastik, sondern Integration der Aktivitäten in den gesamten Schulunterricht
4. Weitgehender Verzicht auf Begriffserklärungen und fachliche Systematik zugunsten situativen und problemorientierten Arbeitens
5. Behutsame Disziplinierung des Sprechens (und Urteilens) in zufallsbehafteten Situationen

J. Wahrendorf (Zürich)