MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 4|1975

Mengenlehre und Modelltheorie

19. 1. bis 25. 1. 1975

Die diesjährige Frühjahrstagung fand unter der Leitung von Dr. K.-P. Podewski (Hannover), Dr. M. Richter (Tübingen) und Prof. Dr. E.-J. Thiele (Berlin) zu dem Thema " Ultrafilter " statt.

Untersucht wurden spezielle Eigenschaften der Rudin-Keisler- bzw. Rudin-Frolik-Ordnung von Ultrafiltern. Da sich die Rudin-Keisler-Ordnung auch modelltheoretisch charakterisieren läßt, können entsprechende Sätze über Nichtstandardmodelle von $\mathfrak{N}$ formuliert werden.

In Einzelreferaten wurden anschließend neuere Ergebnisse über verallgemeinerte stationäre Mengen, über die Regularität und Zerlegbarkeit von Ultrafiltern sowie über Ramsey-Sätze für $[\omega]^{\omega}$ vorgetragen.

<u>Teilnehmer</u>

A. Blass, Ann Arbor

M. Daguenet, Paris

K. Devlin, Bonn

W. Eck, Berlin

U. Felgner, Heidelberg

R. Fittler, Berlin

T.B. Flannagan, Heidelberg

U. Friedrichsdorf, Kiel

K. Gloede, Heidelberg

A. Hajnal, Budapest

M. Holz, Hannover

R.B. Jensen, Bonn

B.J. Koppelberg, Bonn

S. Koppelberg, Bonn

R. Lehmann, Berlin

A. Máté, Budapest

A.R.D. Mathias, Cambridge

H. Oellrich, Hannover

K. Potthoff, Kiel

H. Röschlau, Kiel

W. Schönfeld, Stuttgart

W. Schwabhäuser, Stuttgart

H.K. Seeland, Stuttgart

K. Steffens, Hannover

H. Volger, Tübingen

M. Ziegler, Berlin

Vortragsauszüge

K.-P. PODEWSKI : Ordnungen von Ultrafiltern

Sei βA die Stone-Cech-Kompaktifikation von A. Zwei Ultrafilter D_1, $D_2 \in \beta A$ heißen äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus ν von βA auf βA gibt mit $\nu(D_1) = D_2$. Ist $\eta : A \to \beta A$, dann sei $\bar{\eta}$ die stetige Fortsetzung von η auf βA. Ist ferner R eine Menge von Abbildungen von A auf βA, dann setze man $D_1 \leq_R D_2$, falls es ein $\eta \in R$ gibt mit $\bar{\eta}(D_2) = D_1$. Ist R insbesondere eine der Mengen

$RK = \{\eta : A \to \beta A \mid \eta[A]$ ist Mg von Hauptultrafiltern$\}$ oder

$RF = \{\eta : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N} \mid \eta$ ist Einbettung$\}$, dann induziert $\leq_R$ eine Ordnung auf der Menge der Ultrafilter.

M. ZIEGLER : Minimale Ultrafilter und p-Punkte

Es wurde gezeigt (A. Blass): Minimale Ultrafilter (bzgl. RK) sind die Ramsey-Ultrafilter. Aus Martin's Axiom folgt die

Existenz von $2^{\omega^{\omega}}$ - vielen minimalen Ultrafiltern.

Def.: U Ultrafilter auf ω heiße p-Punkt, wenn für alle $f \in \omega^{\omega}$ ein $v \in U$ existiert mit ($f \restriction v$ konstant oder endlich). Über jedem p-Punkt liegt ein weiterer p-Punkt. Über jeder abzählbaren, aufsteigenden Kette von p-Punkten liegt ein p-Punkt.

E.-J. THIELE : Die RK-Ordnung von p-Punkten

Weitere Eigenschaften der Rudin-Keisler-Ordnung von p-Punkten: $(\mathbb{R}, \leq)$ ist ähnlich einbettbar in diese Ordnung; es gibt p-Punkte, die bezüglich der RK-Ordnung unvergleichbare Vorgänger haben (Resultate von Blass).

M. HOLZ : Ultrafilter und unabhängige Mengen

Sei I eine unendliche Menge, κ die Kardinalzahl von I. Mit Hilfe von unabhängigen Systemen von Mengen bzw. Funktionen der Kardinalität 2^{κ} wurden konstruiert :

(a) zwei bzgl. der Rudin-Keisler-Ordnung unvergleichbare uniforme Ultrafilter auf I,

(b) ein abzählbar unvollständiger, κ^{+}- guter Ultrafilter,

(c) ein Ultrafilter D, der die Ultrapotenzen $\prod_D \mathfrak{A}$ und $\prod_D \mathfrak{B}$ zweier elementar äquivalenter Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph macht.

Die Beweise vermeiden GCH; (a) und (b) stammen von Kunen (Ultrafilters and independent sets, AMS Trans. 172 (1972)), (c) von Shelah (Every two elementary equivalent models have isomorphic ultrapowers, Israel Journ.of Math. 1o (1971)).

R. LEHMANN : Die Rudin-Frolik-Ordnung von $\beta\omega/\cong$

Es sei $f:\omega \to \beta\omega$ Funktion und $\bar{f}:\beta\omega \to \beta\omega$ die Stone-Fortsetzung. Dann sei für Klassen $\underline{p}$ von Ultrafiltern definiert:

$\underline{p} \leq_{RF} \underline{q}$:gdw es gibt $f:\omega \to \beta\omega$ diskret, sodaß $\bar{f}(p) = q$.

Es wurde gezeigt :

1. Für jedes $\underline{p} \in \beta\omega/\cong$ ist der Abschnitt $[\underline{p}]$ linear geordnet,

2. Wenn $\underline{p} \leq_{RF} \underline{q}$, so $\underline{p} \leq_{RK} \underline{q}$.

Für $p,q \in \beta\omega$ sei definiert: $p \bullet q := \{a \subset \omega\times\omega \mid \{m \mid \{n \mid (n,m) \in a\} \in p\} \in q\}$

Für $\underline{p},\underline{q}$ sei definiert: $\underline{p} \bullet \underline{q} := \underline{p \bullet q}$.

Durch diese Definition wird $\beta\omega/\cong$ zu einer Halbgruppe. Für $F:\omega \quad \beta\omega$ sei $F[n] := \prod_{k=o}^{n} F(k)$ und $\prod(F,p) := \bar{f}(p)$, wobei $\bar{f}$ diskret so gewählt, daß $f(n) = F[n]$ gilt. Es wurde für einen beliebigen freien Ultrafilter p gezeigt:

$(\prod_{n\in\omega}(n,\in_n)/p\ , <)$ ist monoton einbettbar in $[\underline{\prod(F,p)}]$.

Somit enthält die RF-Ordnung eine η_1-Menge und $\mathbb{R}$.

W. ECK : Ultrafilter und Nichtstandardmodelle

Die Rudin-Keisler-Ordnung auf $\beta\omega$ läßt sich modelltheoretisch charakterisieren: Sei L Sprache erster Stufe, die Symbole für alle Funktionen und Relationen auf ω enthält. $\mathfrak{N}$ sei die Standardinterpretation von L. Dann gilt für D, E $\in \beta\omega$, $F \in \beta\omega\setminus\omega$: $D \leq_{RK} E$ gdw $\mathfrak{N}^\omega/D \preceq \mathfrak{N}^\omega/E$, $D \cong E$ gdw $\mathfrak{N}^\omega/D \cong \mathfrak{N}^\omega/E$.

F ist p-Punkt gdw alle Nichtstandard-Substrukturen von $\mathfrak{N}^\omega/F$ sind konfinal in $\mathfrak{N}^\omega/F$.

F ist minimaler Ultrafilter gdw $\mathfrak{N}^{\omega}/F$ hat keine echte Nichtstandard-Substruktur.

Damit lassen sich Sätze über Ultrafilter als Aussagen über Nichtstandardmodelle der Arithmetik interpretieren und umgekehrt.

Satz 1: Sei $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$, $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{A}$ einelementig erzeugte Substruktur von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_i \not\cong \mathfrak{N}$ $(i \in \omega)$. Dann gilt :

a) Ist $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in \omega}$ absteigend, so enthält $\bigcap_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i$ ein Nichtstandardelement (Cherlin-Hirschfeld).

b) Sind alle $\mathfrak{A}_i$ mit $\mathfrak{A}_0$ konfinal, so enthält $\bigcap_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i$ ein Nichtstandardelement (Blass).

Aus diesem Satz über Nichtstandardmodelle erhält man den folgenden Satz über Ultrafilter :

Satz 2:

a) In $\beta\omega \setminus \omega$ ist jede RK-absteigende Folge $\{E_i\}_{i \in \omega}$ nach unten beschränkt,

b) In der RK-Ordnung von p-Punkten ist jede nach oben beschränkte Folge $\{E_i\}_{i \in \omega}$ nach unten beschränkt (Blass).

M. RICHTER : <u>Enderweiterungen und minimale Erweiterungen</u>

Die Typen über $\mathbb{N}$ stehen in Korespondenz zu den Ultrafiltern in der Booleschen Algebra der definierbaren Mengen. Folglich lassen sich analog zur Ultrafiltertheorie Begriffe wie "p-Typ" und "Ramsey-Typ" erklären. Falls $A \prec B$ Nichtstandardmodelle der Zahlentheorie, so heißt T Endtyp (resp. minimaler Typ), falls für jedes $b \in B$, welches T realisiert und größer als alle Elemente von A ist, gilt: $A[b]$ ist Enderweiterung von A (resp. minimale Erweiterung). Es gilt: Falls T Endtyp (resp.

minimaler Typ), so ist T p-Typ (resp. Ramsey-Typ). Falls die zugrundeliegende Sprache die volle Sprache von N ist, gilt auch die Umkehrung. Falls L abzählbar ist, gilt die Umkehrung unter der Zusatzvoraussetzung "uniform P" (resp. "uniform Ramsey").

A. BLASS : Amalgamation of Non-Standard Models of Arithmetic

We consider models $\mathfrak{M}$ containing two given models $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ of arithmetic as elementary submodels. We assume $\mathfrak{M}$ is generated by $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, and ask what the possible models $\mathfrak{M}$ are. In the special case that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are each generated by a single element, this is equivalent to asking for all ultrafilters on $\omega \times \omega$ that extend $D \times E$, where D and E are ultrafilters on ω.

The intersection of $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{M}$ can be described by giving elementary submodels $\mathfrak{A}' \prec \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}' \prec \mathfrak{B}$ and an isomorphism $\theta : \mathfrak{A}' \cong \mathfrak{B}'$.

Theorem 1. Every isomorphism θ between elementary submodels $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ of $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ occurs as the intersection-description in some $\mathfrak{M}$. (If the intersection-description were only required to be $\supseteq (\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \theta)$, then this would be the well-known amalgamation property.)

Corollary. If there are n non-isomorphic ultrafilters below D in the RK-order, then DxD is included in at least n distinct ultrafilters.

Maryvonne Daguenet proved this corollary earlier, with 2n-1 rather than n in the conclusion. This improvement can be obtained by considering the order of the generators of two copies of D-prod ω.

<u>Theorem 2</u>. If $\mathfrak{A}'$ is confinal in $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}'$ is an initial segment of $\mathfrak{B}$, then the model $\mathfrak{M}$ generated by $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ with intersection-description $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \Theta)$ is unique (up to isomorphism).

<u>Theorem 3</u>. Any two models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ can be embedded in a third with prescribed intersection-description $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \Theta)$ and prescribed ordering of the skies of $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ that lie beyond $\mathfrak{A}'$ and $\mathfrak{B}'$ resp. (Of course the ordering must be compatible with the orderings of skies within $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$.)

<u>Corollary</u> (Daguenet). If $D_0 \xrightarrow{f_0} D_1 \xrightarrow{f_1} D_2 \xrightarrow{f_2} \dots$ is an infinite chain of maps ($f_i(D_i) = D_{i+1}$) such that no f_i is finite-to-one mod D_i, then for every non-principal E, $D_0 \times E$ is included in infinitely many ultrafilters.

There is an example showing that theorem 3 cannot be extended to include skies bounded by elements of $\mathfrak{A}'$ or $\mathfrak{B}'$.

K. STEFFENS : <u>Ramsey - Sätze über $[\omega]^\omega$</u>

Ist $[X]^\kappa = \{Y \subset X \mid |Y| = \kappa\}$, $[X]^{<\kappa} = \{Y \subset X \mid |Y| < \kappa\}$, so heißt eine Menge $R \subset [\omega]^\omega$ <u>Ramsey</u>, falls eine Menge $M \in [\omega]^\omega$ existiert mit $[M]^\omega \subset R$ oder $[M]^\omega \subset [\omega]^\omega - R$. Für $A, B \subset \omega$ sei $A < B$ gdw f. alle $a \in A, b \in B$ $(a < b)$. Ist $X \in [\omega]^\omega$ und $M \in [\omega]^\omega$, so sei $(X,M)^\omega = \{N \in [\omega]^\omega \mid X \subset N \subset X \cup M \;\&\; X < N - X\}$. Es ist $\mathcal{U}(M) = \{(X,N)^\omega \mid X \in [\omega]^{<\omega} \;\&\; N \in [\omega]^\omega \;\&\; M \in (X,N)^\omega\}$ eine Umgebungsbasis einer Topologie, die wir <u>Partitionstopologie</u> auf $[\omega]^\omega$ nennen wollen.

<u>Satz</u> Jede in der Partitionstopologie offene Menge ist Ramsey.

Ist $\mathcal{F} \subset [\omega]^\omega$, so heißt $\mathcal{F}$ <u>(n,m) - trennbar</u> $(n, m \in \omega)$, falls es zu jeder Abbildung $f \restriction [\omega]^n \to m$ eine Menge $Y \in \mathcal{F}$ gibt mit $f \restriction [Y]^n$ konstant. Eine Menge $\mathcal{F} \subset [\omega]^\omega$ heißt <u>vollständig trennbar</u>, falls 1.) $\aleph_0 \leq |\mathcal{F}|$, 2.) $\forall F,G \in \mathcal{F} (F \neq G \Rightarrow \aleph_0 < |F \cap G|)$, 3.) $\forall X \subset \omega (\exists \mathcal{G} \in [\mathcal{F}]^{<\omega}\ X \subset \cup \mathcal{G}$ oder $\exists F \in \mathcal{F}\ F \subset X)$.

<u>Satz</u> (Milliken).

Ist $\mathcal{F}$ vollständig trennbar, so ist $\mathcal{F}$ (n,m)-trennbar für jedes $n,m \in \omega$.

A. HAJNAL : <u>Generalized stationary sets</u>

Let $R = [\lambda]^{<\kappa}$, $\omega < \kappa \leq \lambda$, κ regular.

<u>Theorem 1.</u> Assume $A \subset R$ is stationary in R, κ strongly inaccessible. Then A is the union of κ disjoint stationary sets.

<u>Theorem 2.</u> Assume there is a normal ideal in R which is λ-saturated, λ regular. Then $\lambda^\kappa = \lambda \cdot \kappa^\kappa$.

K. DEVLIN : <u>$0^\#$</u>

Ein kurzer Überblick über $0^\#$ wurde gegeben.

B.J. KOPPELBERG : <u>Regularität und Zerlegbarkeit von Ultrafiltern</u>

Es wurden verschiedene, neue Resultate über die Regularität und Zerlegbarkeit von Ultrafiltern von Jensen, Ketonen und Koppelberg gezeigt, u.a.:

1.) Sei κ reguläre Kardinalzahl und D uniformer Ultrafilter auf κ. Wenn $0^\#$ nicht existiert, so gibt es ein $\delta < \kappa$, sodaß D (δ,κ)-reg.

2.) Sei κ reguläre Kardinalzahl und D uniformer Ultrafilter auf κ. Wenn $0^{\#}$ nicht existiert und jede Limeskardinalzahl $< \kappa$ starke Limeskardinalzahl ist, so ist D δ-regulär für jedes $\delta < \kappa$.

M. DAGUENET : <u>Exemple de filtre analytique non borélien de base borélien</u>

Soit E un ensemble infini. Une partie M de P(E) est une famille multiplicativement libre si pour tout n,m, et toute suite d'ensembles deux à deux disjoints $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m \in M$, $X_1 \cap \ldots \cap X_n \cap (E - Y_1) \cap \ldots \cap (E - Y_m) \neq \emptyset$.
La famille multiplicativement libre de cardinalité $2^{\aleph_0}$ donnée par Hausdorff est l'image de l'application $\varphi: P(N) \rightarrow P(E)$ où $E = P^{\omega}(N) \times P^{\omega}(P^{\omega}(N))$, $P^{\omega}(N)$ désignant l'ensemble des parties finies de N, et où $\varphi(x) = \{(s,\sigma) \mid s \in P^{\omega}(N), \sigma \in P^{\omega}(P^{\omega}(N)), s \cap x \in \sigma\}$.
Soit A une partie analytique non borélien de P(N).
Soit F le filtre engendré par $\varphi(A)$.
<u>Théorème</u> F est analytique non borélien et F a une base borélienne.

A.R.D. MATHIAS : <u>Zufriedene Familien</u>

Def.: $A \subset P(\omega)$ heiße <u>zufrieden</u> gdw $P(\omega) - A$ ein echtes Ideal ist, das jede endliche Teilmenge von ω enthält, und für jede absteigende Folge $X_{i+1} \subset X_i$ $(i \in \omega)$ von Elementen aus A gibt es ein $Y \in A$, sodaß $Y - X_i$ endlich ist für alle $i \in \omega$.

Beispiel : Ein Ultrafilter auf ω ist ein p-Punkt gdw er zufrieden ist.

Der folgende Satz wurde bewiesen:

<u>Satz</u> Gilt CH, so gibt es einen p-Punkt,unter dem kein Ramsey-Ultrafilter liegt (bzgl. der Rudin-Keisler-Ordnung).

Dieser Ultrafilter wurde als Durchschnitt einer absteigenden Kette von zufriedenen Familien gebildet .

Hayo Oellrich, Hannover