MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 5/1975

STÖRUNGSTHEORIE UND OPERATORFUNKTIONEN

25.1. bis 1.2.75

Die Arbeitstagung über Störungstheorie und Operatorfunktionen stand unter der Leitung der Herren Professor Dr. B. Gramsch und Professor Dr. G. Neubauer. An der Tagung nahmen 37 Mathematiker aus dem In- und Ausland teil; es wurden 26 Vorträge gehalten, in denen aus den verschiedensten Gebieten des Themas der Tagung berichtet wurde. Dadurch wurden eingehende Diskussionen und ein fruchtbarer Gedankenaustausch ermöglicht.
Die Herren Professor Dr. E. Schock und Professor Dr. F.H. Vasilescu, die ebenfalls eingeladen waren, konnten leider nicht kommen.
Wir glauben, im Namen aller Teilnehmer zu sprechen, wenn wir den Tagungsleitern und dem Institut dafür danken, daß diese Tagung einen so anregenden und harmonischen Verlauf nahm.

Teilnehmer

Albrecht, E., Kaiserslautern
Bart, H., Amsterdam
Bierstedt, K.-D., Paderborn
Breuer, M., Marburg
Brüning, J., Marburg
Eckardt, K.-J., München
Ernst, B., Kaiserslautern
Förster, K.-H., Oldenburg
Frunza, St., Iasi (Rumänien)
Gramsch, B., Kaiserslautern
Haf, H., Kassel
Jeggle, H., Berlin
Kaballo, W., Kaiserslautern
Kremer, M., Darmstadt
König, H., Bonn
Kutzler, K., Berlin
Labrousse, J.-Ph., Nizza
Lay, D.C., College Park
Lerch, O., Konstanz
Liebetrau, E.-O., Oldenburg
Meise, R., Düsseldorf
Meister, E., Darmstadt
Mennicken, R., Braunschweig
Neubauer, G., Konstanz
Przeworska-Rolewicz, D., Warschau
Reinhardt, J., Frankfurt
Rolewicz, St., Warschau
Sagraloff, B., Braunschweig
Thijsse, G.P.A., Amsterdam
Veselic, Frankfurt
Vogt, D., Wuppertal
Voigt, J., München

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Wagner, R., Paderborn
Weidmann, J., Frankfurt
Weis, L., Kaiserslautern
Wendland, W., Darmstadt
de Wilde, M., Lüttich

Vortragsauszüge

ALBRECHT, E.: EIN BEISPIEL IN DER THEORIE DER ZERLEGBAREN OPERATOREN

Eine Algebra $\mathfrak{A}$ von Funktionen auf $\Omega = \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ heißt zulässig, falls gilt:

(i) $\mathfrak{A}$ enthält die Einschränkungen der Polynome auf Ω.

(ii) $\mathfrak{A}$ ist normal.

(iii) $f \in \mathfrak{A}$, $w \notin \operatorname{supp} f \Longrightarrow f_w \in \mathfrak{A}$ mit $f_w(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{w - z} & z \in \Omega \setminus \{w\} \\ 0 & z \in \Omega \cap \{w\} \end{cases}$

$\mathfrak{A}$ heißt invers abgeschlossen, falls $\mathfrak{A}$ volle Unteralgebra von $\mathcal{C}(\Omega)$ ist. Ein stetiger linearer Operator T auf einem (B)-Raum X heißt $\mathfrak{A}$-zerlegbar, falls ein Homomorphismus $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ existiert, so daß $\Phi(1) = I$ und $\Phi(z) \overset{q}{\sim} T$. Solche Operatoren werden ausführlich in [1] untersucht. Es wird das Beispiel eines zerlegbaren Operators angegeben, der für keine invers abgeschlossene zulässige Algebra $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}$-zerlegbar ist. Dies gibt eine teilweise Antwort auf den noch offenen ersten Teil der Frage (c) in [1], p. 217.

[1] Colojoară-Foiaş: Theory of Generalized Spectral Operators, Gordon and Breach (1968).

BART, H.: SPECTRAL PROPERTIES OF COMMUTATIVE HOLOMORPHIC OPERATOR FUNCTIONS

Let X be a complex Banach space, and let A be a holomorphic L(X)-valued function defined on a neighbourhood of a complex number λ_o. Assume that A is commutative at λ_o, i.e. there exists $\delta > 0$ such that, for $|\lambda| < \delta$, $A(\lambda)A(\lambda_o) = A(\lambda_o)A(\lambda)$. By the resolvent A^{-1} of A we mean the function $\lambda \longrightarrow A(\lambda)^{-1}$ defined on the set of all λ such that $A(\lambda)$ is invertible. We will discuss necessary and sufficient conditions in order that λ_o is a pole (of order p) of A^{-1}. In these conditions the spectral properties of the operator $A(\lambda_o)$ play an important role. The main results are based on a characterization of the poles of the resolvent of an arbitrary meromorphic operator function. This characterization, which extends a well-known result from ordinary spectral theory, is given in terms of generalized ascent and descent.

BIERSTEDT, K.-D.: LOKALISIERUNG DER APPROXIMATIONSEIGENSCHAFT FÜR FUNKTIONENRÄUME

Es wird über folgenden Satz berichtet:
Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $V > 0$ eine Nachbin-Familie stetiger Gewichtsfunktionen auf X. A sei eine Unteralgebra von C(X), derart, daß $a|_{\text{supp } v}$ beschränkt ist für alle $a \in A$ und $v \in V$. $\mathcal{K}_A$ bezeichne das System der maximalen antisymmetrischen Teilmengen von X bezüglich A. W sei ein abgeschlossener linearer Unterraum des gewichteten lokalkonvexen Raumes $CV_o(X)$, der bezüglich punktweiser Multiplikation ein Modul über A ist. Hat dann für jedes $K \in \mathcal{K}_A$ der topologische lineare Unterraum $W|_K$ von $C(V|_K)_o(K)$ die (Grothendiecksche) Approximationseigenschaft, so besitzt auch W selbst die Approximationseigenschaft.
Der Beweis dieses Satzes benutzt einen vektorwertigen sogenannten verallgemeinerten Stone-Weierstraß-Satz von [J.B. PROLLA, Math. Ann. 191, 283-289 (1971)] und eine vom Verfasser entwickelte Methode [s. Vortrag Funktionalanalysis-Tagung Oberwolfach 197o und J. reine angew. Math. 259, 186-21o und 26o, 133-146 (1973)]. (Dabei sind die Bezeichnungen im Satz genau wie in der hier angegebenen Literatur.)
Der Satz und die ihm zugrunde liegenden Ideen werden an einigen Anwendungsbeispielen erläutert, wobei man Beweise für die Approximationseigenschaft gewisser Funktionenräume erhält. Eines dieser Beispiele steht im Zusammenhang mit dem ersten Teil einer längeren Arbeit von B. GRAMSCH (die in Math. Ann. erscheint) über die Inversion von Semi-Fredholm-wertigen holomorphen bzw. stetigen Operatorfunktionen.

BRÜNING, J.: EINE VERALLGEMEINERUNG DES SATZES VON KUIPER

Es wird folgendes bewiesen.
Satz: Sei $\mathcal{M}$ eine eigentlich unendliche W^*-Algebra und $\mathcal{M}^o$ die

Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathcal{M}$. Dann ist $\pi_n(\mathcal{M}^e) = 0$ für $n = 1,2,...$

Aus diesem Satz folgert man unmittelbar, daß $\mathcal{M}^o$ zusammenziehbar ist; dasselbe gilt dann auch für die unitäre Gruppe ^{u} von $\mathcal{M}$. Der genannte Satz wurde zuerst von N. Kuiper (1965) bewiesen für $\mathcal{M} = \mathcal{L}(H)$, H unendlichdimensionaler Hilbertraum, dann von M. Breuer (1970) für $\mathcal{M}$ vom Typ I oder Typ II, eigentlich unendlich und abzählbar zerlegbar, I.M. Singer (1970) für $\mathcal{M}$ Faktor vom Typ III und abzählbar zerlegbar, schließlich von W. Willgerodt (1974) für $\mathcal{M}$ abzählbar zerlegbar und vom Typ III. Der vorgetragene Beweis verläuft gleichmäßig für alle Typen ohne Abzählbarkeitsbedingungen. Zusammen mit der bislang bekannten Beweistechnik ergibt sich der Satz aus dem folgenden

Hilfssatz: Es sei $\mathcal{M}$ eine W*-Algebra, $x \in \mathcal{M}$ und $x \geq 0$. Weiter sei der Träger $s(x)$ eigentlich unendlich. Dann gibt es Projektionen $p_1, p_2 \in$ mit

a) $p_1 p_2 = 0$, b) $p_1 + p_2 \leq s(x)$, c) $p_1 \sim p_2 \sim s(x)$,

d) $p_i x = x p_i$, $i = 1,2$.

Der Beweis des Hilfssatzes geschieht durch Konstruktion passender Projektionen.

FÖRSTER, K.-H.: ÜBER EINE SPEKTRALMETRIK FÜR NORMALE OPERATOREN

H sei ein Hilbertraum, $\mathfrak{N}$ sei die Menge der normalen, linearen, stetigen Operatoren von H in sich. Für $A, B \in \mathfrak{N}$ werden

$$\rho_{A,B} = \limsup_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^{n-k} B^k \right\|^{1/n}, \quad \rho(A,B) = \max\{\rho_{A,B}, \rho_{B,A}\}$$

betrachtet. Es gilt

1. (Apostol 1968): $\{\mathfrak{N},\rho\}$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Bewiesen wird (mit Hilfe von 3.):

2. ρ ist auf $\mathfrak{N}$ echt feiner als die Normtopologie; genauer: Die identische Abbildung $\{\mathfrak{N},\rho\} \longrightarrow \{\mathfrak{N}, \|\ \|\}$ ist gleichmäßig stetig.
3. Ist $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig, so ist die Abbildung $f : \{\mathfrak{N},\rho\} \longrightarrow \{\mathfrak{N},\rho\}$ mit $A \longrightarrow f(A)$ gleichmäßig stetig; genauer $\rho(f(A),f(B)) \leq \omega_f(2\rho(A,B))$; ω_f = Stetigkeitsmodul von f.

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich aus 2.

4. Die Menge der normalen Elemente einer C^*-Algebra bilden mit ρ versehen einen vollständigen metrischen Raum.

FRUNZA, Şt.: A CHARACTERIZATION FOR THE SPECTRAL CAPACITY OF A FINITE SYSTEM OF OPERATORS

A new spectral property of decomposable systems of operators (Şt. Frunză, C.R. Acad. Sc. Paris, A, 277, 1973) is found; this property is a variant for several operators of the β-property in the sense of E. Bishop (Pac. J. Math., 1959).

Theorem 1. If $a = (a_1,\dots,a_n)$ is a decomposable system of operators on a complex Banach space X, then for any open polydisc (or polydomain) V, the range of the operator $\alpha : \Lambda^{n-1}[\sigma,U(V,X)] \longrightarrow \Lambda^n[\sigma,U(V,X)]$ is closed (for the notations see J.L. Taylor, Acta Math., 197o).

By using this property, a new description for the spectral capacity is given.

Theorem 2. For any closed set $F \subset \mathbb{C}^n$, $\mathcal{E}(F)$ consists of all elements $x \in X$ which may be uniformly approximated (locally) by X-valued analytic functions of the form: $\sum_{i=1}^{n}(z_i - a_i)\varphi_i(z)$.

We obtain also the following general result:

Proposition: Let $a = (a_1,\dots,a_n)$ be an arbitrary commuting system of operators. Then for any open polydisc (or polydomain) $V \supset sp(a,X)$, the range of the operator α is closed. More precisely, an element $fs_1 \wedge \dots \wedge s_n$ belongs to the range of $\alpha \Longleftrightarrow$ the Cauchy-Weil integral of f with respect to a is equal to zero.

GRAMSCH, B.: RELATIVE INVERSION VON n-TUPELN VON OPERATORFUNKTIONEN

Definition: Ein n-Tupel von Operatorfunktionen $T_j : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, auf einer Menge Λ heißt Φ^1-Tupel, wenn es für jedes $\lambda_o \in \Lambda$ Operatoren $L_j^{\lambda_o} \in \mathcal{L}(X)$ gibt mit $\sum_{j=1}^{n} L_j^{\lambda_o} T_j(\lambda_o) \in \Phi^1 = \{A \in \mathcal{L}(X) : \dim N(A) < \infty, \exists P = P^2 \in \mathcal{L}(X) \text{ mit } R(A) = R(P)\}$.

Satz. Ist Λ ein Holomorphiegebiet und $T_j : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ ein holomorphes ϕ^1-Tupel, so gibt es holomorphe Funktionen $L_j(\lambda)$, $j = 1,\dots,n$, auf Λ, so daß $\sum_{j=1}^{n} L_j(\lambda) T_j(\lambda) = I + S(\lambda)$ mit

1) $\bigcap_{j=1}^{n} N(T_j(\lambda)) = N(I + S(\lambda))$ für $\lambda \in \Lambda \setminus \sigma$, wobei σ eine in Λ analytische Menge ist.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

2) $S(\lambda)$ hat Werte im Ideal $\mathcal{S}$ der Operatoren mit schnell fallenden Approximationszahlen.

Dieses Ergebnis (Math. Ann. 1975) führt durch die meromorphe relative Inversion von $I + S(\lambda)$ zu einer meromorphen Projektorfunktion $P(\lambda)$ mit $R(P(\lambda)) = N(I + S(\lambda))$. Analoge Aussagen gelten für reell analytische Abhängigkeit, sowie gemischt stetige und holomorphe Abhängigkeit. Im Falle von C^*-Algebren (statt $\mathfrak{L}(X)$) kann man unter den Voraussetzungen des obigen Satzes reell analytische orthogonale Projektoren konstruieren.

HAF, H.: <u>PARAMETERABHÄNGIGE NICHTLINEARE OPERATORGLEICHUNGEN</u>

Es werden (nichtlineare) Operatorgleichungen der Form $x = T_\lambda x$ (*) untersucht (X Banach-Raum, $T_\lambda : X \longrightarrow X$, kompakt, analytisch bezüglich λ, mit asymptotischer Ableitung L_λ), bzw. die Gleichungen $x = L_\lambda x + K_\lambda x$ (**) mit $K_\lambda x = o(||x||)$, $||x|| \longrightarrow \infty$ (gleichmäßig bezüglich λ). Ist λ_o charakteristischer Wert von L_{λ_o} mit ungerader Vielfachheit, so liegt ein asymptotischer Verzweigungspunkt vor (vgl. Krasnoselskii). Für den Fall gerader Vielfachheit ist keine Aussage möglich. In Anlehnung an einen Satz von J. Schwartz, der die entsprechende Fragestellung im Falle von im Nullpunkt Fréchet-differenzierbaren Operatorscharen T_λ untersucht, werden folgende Probleme behandelt:

(I) Kann unter Verschärfung der Voraussetzungen an T_λ auf die Forderung "... ungerade Vielfachheit" verzichtet werden?

(II) Läßt sich eine Aussage über das Verhalten der Lösungsmenge von (**) in Abhängigkeit von λ gewinnen?

JEGGLE, H., WENDLAND, W.: <u>ZUR ASYMPTOTISCHEN STÖRUNGSTHEORIE BEI EIGENWERTAUFGABEN MIT NICHTLINEARER PARAMETERABHÄNGIGKEIT</u>

(Der Vortrag wurde von dem zuerst genannten Autor gehalten.)

Zu Aufgaben $A(z)u = 0$ ($u \in E$, E $\mathbb{C}$-Banachraum, $A : G \longrightarrow \phi^1(E,E)$ holomorph vom Typ (A) in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$) werden eine algebraische Vielfachheit sowie eine geeignete verallgemeinerte Spektralprojektion definiert und studiert. Daneben betrachtet man eine Folge gestörter Aufgaben $A_i(z_i)u_i = 0$, $i \in \mathbb{N}$. Es werden Zusammenhänge zwischen den Spektraleigenschaften von A, A_i untersucht. Eine besondere Rolle spielt dabei eine Linearisierung der Eigenwertaufgaben.

KABALLO, W.: HOLOMORPHE SEMIFREDHOLM-OPERATORFUNKTIONEN VON MEHREREN KOMPLEXEN VARIABLEN MIT ANWENDUNGEN

Ausgehend von holomorphen Systemen von Differential- und Pseudodifferentialoperatoren werden meromorphe relative Inverse zu holomorphen ϕ^l- oder ϕ^r-wertigen Funktionen $T(z)$, $z \in G \subseteq \mathbb{C}^n$, G Gebiet, untersucht. Wenn G Steinsch ist, existiert eine meromorphe relative Inverse der Form $M(z) = A(z) + S(z)$ mit holomorphem A und "kleinem" meromorphem S. Solche Zerlegungssätze gehen auf B. Gramsch (1973) zurück. Weiter wird gezeigt: Es gibt eine analytische Menge $\Sigma^* \subseteq G$ der Codimension ≥ 2 mit folgender Eigenschaft: Jedes $z_o \notin \Sigma^*$ hat eine Umgebung U, auf der eine holomorphe Projektorfunktion P(z) existiert, die außerhalb der Sprungstellenmenge $\Sigma(T)$ von T im ϕ^l-Fall auf $\{N(T(z))\}$ (im ϕ^r-Fall auf $R(T(z))$) projiziert. Dabei geht ein Ergebnis von G. Scheja (1964) ein. Mit Hilfe eines Resultats von M.A. Šubin (1971) wird daraus gefolgert: Ist T ϕ-wertig und $G_o \subseteq G \setminus \Sigma^*$ Steinsch, so hat T über G_o eine meromorphe relative Inverse, die nur auf $G_o \cap \Sigma(T)$ Pole hat. Für dim G = 1 wurde dies auch von H. Bart, M.A. Kaashoek und D. Lay (1974) bewiesen.

KÖNIG, H.: ZUGEHÖRIGKEIT SOBOLEVSCHER EINBETTUNGEN ZU OPERATOREN-IDEALEN

Es soll gezeigt werden, daß sich das Problem der Zugehörigkeit Sobolevscher Einbettungsoperatoren (über einem beschränkten Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$) zu Operatorenidealen auf die einfachere Fragestellung reduzieren läßt, wann gewisse Diagonaloperatoren zwischen Folgenräumen l_p und l_q dem Operatorenideal angehören. Letzteres Problem läßt sich für die meisten auftretenden Operatorenideale relativ leicht lösen. Als Folgerung erhält man z.B. Abschätzungen von Approximationszahlen Sobolevscher Einbettungen $W_p^\lambda(\Omega) \longrightarrow L_q(\Omega)$. Ferner ergeben sich Kriterien für die Zugehörigkeit von Kernoperatoren zwischen $L_p(\Omega)$ und $L_q(\Omega)$ zu Operatorenidealen.

LABROUSSE, J.-Ph.: A GENERALIZATION OF SEMI-FREDHOLM OPERATORS

Let H be a Hilbert space and A a closed linear operator with domain D(A) dense in H and range R(A) closed in H. Then if: (*) dim ker A < ∞ or dim ker A^* < ∞, A is called semi-Fredholm. The present work is concerned with replacing (*) by a weaker condition, which allows dim ker A = ∞ and dim ker A^* = ∞ but which is strong enough to insure that the new class of operators thus defined is stable under small perturbations of the type λI, $\lambda \in C$, I the identity operator.

LAY, D.C.: REDUCED ALGEBRAIC MULTIPLICITY OF MEROMORPHIC OPERATOR FUNCTIONS

The reduced algebraic multiplicity of a certain type of meromorphic operator function A at $\mu \in \mathbb{C}$ is given by

$$RM(A;\mu) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{tr} \int_{\Gamma} A'(\lambda) A^{+}(\lambda) d\lambda ,$$

where A^+ is any meromorphic relative inverse of A near μ such that AA^+ and A^+A have removable singularities at μ. This formula was first proved by E.I. Sigal for a somewhat less general class of operator functions, and his formula involved a special choice of relative inverse A^+. Under suitable conditions on operator functions A and B, one has $RM(AB;\mu) = RM(A;\mu) + RM(B;\mu)$. This generalizes a similar formula of I.C. Gohberg and E.I. Sigal for the algebraic multiplicity of a product. The results described above were obtained in cooperation with H. Bart and M.A. Kaashoek of the Free University, Amsterdam.

LERCH, O.: SEMIFREDHOLMOPERATOREN, DIE HOLOMORPH VON MEHREREN KOMPLEXEN VARIABLEN ABHÄNGEN

Es wird der folgende Satz bewiesen:
Seien E, F (B)-Räume, A(z) eine holomorphe Funktion in $G \subset \mathbb{C}^N$ mit Werten in den beschränkten linearen Operatoren von E nach F. Für alle $z \in G$ gelte $\dim(N(A(z))) < \infty$, und $R(A(z))$ sei abgeschlossen.

Dann sind die Mengen $M_k := \{z \in G \mid n(A(z)) \geq k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ analytische Mengen in G.

LIEBETRAU, E.-O.: EINE ANWENDUNG EINER STÖRUNGSMETRIK LINEARER BESCHRÄNKTER OPERATOREN

Auf L(X), X Banachraum, wird eine Halbmetrik ρ betrachtet ($\rho(A,B) = \max\{\rho_{AB}, \rho_{BA}\}$, $\rho_{AB} = \lim\sup \| C^n(A,B)\|^{1/n}$, $C^n(A,B) = \sum_0^n (-1)^k \binom{n}{k} A^{k-n} B^k$ für A, B $\in$ L(X)). Die Menge der Fredholmoperatoren $\Phi(X)$ ist offen in $(L(X),\rho)$ und die Abbildung $\sum_e : (L(X),\rho) \longrightarrow (\mathcal{K},\rho_H)$ ist stetig ($\sum_e(A)$ = wesentliches Spektrum von A, ρ_H Hausdorffmetrik in $\mathbb{C}$).
Sei $A \in \Phi(X)$, $d(0,\sum_e(A)) =: d$. Dann existiert eine Relativinverse R_o von A so, daß $R_\lambda(A) = (I - \lambda R_o)^{-1} R_o$ Relativinverse von $A - \lambda I$ für $|\lambda| \leq d - \varepsilon$ ist. Für $B \in L(X)$ ist $R_\lambda(B) = \sum_0^\infty R_\lambda(A)^{n+1} C^n(A,B)$ eine Quasiinverse von $B - \lambda I$ für alle λ mit $|\lambda| \leq d - \rho(A,B) - \varepsilon$ bis auf eine Menge isolierter Punkte, wobei $d - \varepsilon > \rho(A,B)$. Damit wird bewiesen: für ein geeignetes Cauchy-Gebiet D mit $\sum_e(A) \subseteq D$ und

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\lambda) R_\lambda(A) d\lambda \quad \text{und} \quad f(B) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\lambda) R_\lambda(B) d\lambda$$

gilt:

$$\rho(f(A),f(B)) \leq 2 \cdot \max_{\sum_{e,d-\varepsilon}(A)} |f(\lambda)| \frac{1}{d(\partial D, \sum_e(A))} \rho(A,B).$$

Dabei ist f holomorph auf $\sum_{e,d-\varepsilon}(A) = \{\mu \mid \mu \in \mathbb{C},\ d(\mu,\sum_e(A)) \leq d - \varepsilon\}$ vorausgesetzt.

MENNICKEN, R.: STÖRUNGSTHEORIE FÜR SEMI-FREDHOLMPAARE IN LOKALKONVEXEN RÄUMEN

Auf den Raum $\mathfrak{U}(E)$ von Unterräumen eines lokalkonvexen Raumes E mit einem Basissystem Γ von Seminormen wird in natürlicher Weise mit Hilfe der Öffnungen $\hat{\delta}_p$ $(p \in \Gamma)$ eine uniforme Topologie eingeführt. Bezüglich dieser Topologie werden in $\mathfrak{U}(E)$ Störungen von Semi-Fredholmpaaren untersucht.
Bewiesen wird der folgende Satz:

(M_o,N_o) sei ein unteres (oberes) Semi-Fredholmpaar, m bezeichne die Nullität (den Defekt) des Paares (M_o,N_o). Für $M \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ gelte bezüglich der Minimalöffnungen γ_p

$$\hat{\delta}_p(M,M_o) < \frac{\gamma_p(N_o,M_o)}{2(m+1) + \gamma_p(N_o,M_o)} \quad (p \ \varepsilon \ \Gamma);$$

ferner sei $\gamma_p(N_o,M) > 0$ $(p \ \varepsilon \ \Gamma)$. Unter diesen Voraussetzungen ist auch (M,N_o) ein unteres (oberes) Semi-Fredholmpaar, und es gilt Halbstetigkeit der Nullität und des Defektes sowie Invarianz des Index.
Modifikationen und Ergänzungen bei Vollständigkeit von E und Abgeschlossenheit der Unterräume M, M_o, N_o etc. werden zusätzlich mitgeteilt.
Weiter werden offene Paare von Unterräumen eines lokalkonvexen Raumes definiert. Unter Benutzung dieses Begriffes wird eine Verallgemeinerung des Satzes vom abgeschlossenen Wertebereich (closed range theorem) für abgeschlossene Paare von Unterräumen angegeben. Durch Spezialisierung ergibt sich ein Satz vom abgeschlossenen Definitionsbereich, der u.a. einen Zusammenhang zwischen der Stetigkeit einer abgeschlossenen Abbildung und ihrer Adjungierten (bezüglich der starken Topologie) herstellt.

(Autoren: R. Mennicken und B. Sagraloff)

NEUBAUER, G.: <u>EINE ALLGEMEINE HOLOMORPHIEDEFINITION FÜR TEILRÄUME UND OPERATOREN UND IHRE ANWENDUNG</u>

Es wird für abgeschlossene Teilräume eines Banachraums, die von einem oder mehreren komplexen Parametern abhängen, ein allgemeiner Holomorphiebegriff eingeführt (entsprechend - über die Graphen - für abgeschlossene Operatoren). Dieser Begriff verallgemeinert die bisher gebräuchlichen und weist dabei einige wünschenswerte Eigenschaften auf, u.a.:
Seien nachfolgend M(z), N(z) holomorphe Teilraumfamilien (in E), A(z), B(z) holomorphe Operatorfamilien.
1) M(z) ist stetig (in z in der Öffnungstopologie). 2) Ist $M(z) + N(z) = E$, so gilt: P(z) holomorph im üblichen Sinn für die zugehörigen Projektionen. 3) Ist $M(z) + N(z)$ abgeschlossen und $M(z) \cap N(z) = 0$ (bzw. $M(z) + N(z) = E$), so ist $M(z) + N(z)$

(bzw. $M(z) \cap N(z)$) holomorph. 4) Ist $A(z)$ Semi-Fredholm, so gelten die üblichen Störungssätze. 5) Unter passenden Zusatzvoraussetzungen erhält man Holomorphie von $B(z)A(z)$, $B(z) + A(z)$ und $A(z)^*$.

PRZEWORSKA-ROLEWICZ, D.: <u>OPERATOR FUNCTIONS IN ALGEBRAIC ANALYSIS</u>

By Algebraic Analysis is meant a theory of right invertible operators acting in linear spaces (without topology). For such operators one can define initial operators, indefinite and definite integrals, operators like exponential, sine and cosine functions. Implications of these facts have various applications, for instance, in differential equations.
Some perturbation theorems can be also proved.

REINHARDT, J.: <u>ZUR STÖRUNGSTHEORIE NICHTLINEARER ABBILDUNGEN IN METRISCHEN RÄUMEN</u>

Der Vortrag bringt einen Überblick über eine neuere Arbeit des Autors. Darin werden eine Reihe neuer Ergebnisse zur Störungstheorie nichtlinearer Abbildungen in metrischen Räumen gewonnen. Die wichtigsten Resultate sind die Bestimmung der Topologie metrischer diskreter Limesräume sowie die topologische Charakterisierung der Grundbegriffe der von F. Stummel entwickelten Theorie diskret konvergenter Folgen von Abbildungen. Dabei wird diskrete Kompaktheit und kollektive Kompaktheit von Folgen von Mengen durch Präkompaktheit, Stabilität und inverse Stabilität von Folgen von Abbildungen durch Stetigkeit, stetige Konvergenz von Abbildungen durch eine Beziehung in Form eines Produkts stetiger Abbildungen und diskrete Kompaktheit und kollektive Kompaktheit von Folgen von Abbildungen durch Präkompaktheit charakterisiert. Als Anwendung erhält man eine Verallgemeinerung des Satzes von Arzela und Ascoli für diskret gleichmäßige Approximationen stetiger Funktionen.

ROLEWICZ, St.: <u>PERTURBATIONS OF LINEAR CONTROL SYSTEMS</u>

By a linear control system we shall understand a system of two real Banach spaces X and Y and a linear continuous operator C

mapping X into Y. (1) $(X \xrightarrow{C} Y)$.
We say that system (1) is controllable if CX = Y. Of course the small changes of norm of C do not change the controllability of the system.
Unfortunately in many engineering problems the "near" systems are not near in the sense of norm. For this reason a notion of image continuity is introduced and the stability of controllability with respect to image continuity is shown.
The obtained result is strictly connected with the method of the solving of minimum time control problem by a reduction to the minimum - norm control problem.

SAGRALOFF, B.: STÖRUNGSTHEORIE FÜR SEMI-FREDHOLMOPERATOREN IN LOKALKONVEXEN RÄUMEN

Betrachtet werden (abgeschlossene) lineare Operatoren in lokalkonvexen Räumen X, Y mit Basissystemen Γ_x, Γ_y. Gezeigt wird, daß Semi-Fredholmoperatoren unter geeigneten Voraussetzungen bei Störungen durch stetige (relativ stetige) Operatoren Halbstetigkeit der Nullität und des Defektes sowie Invarianz des Indexes zulassen. Dabei wird die Größe der Störung gemessen bezüglich eines konfinalen Teilsystems von $\Gamma_x \times \Gamma_y$. Der Beweis gelingt durch Zurückführung auf Störungen von Semi-Fredholmpaaren in lokalkonvexen Räumen (vgl. Vortrag von R. Mennicken).
Modifikationen und Ergänzungen (bei Vollständigkeit oder B-Vollständigkeit) werden mitgeteilt.

(Autoren: R. Mennicken und B. Sagraloff)

THIJSSE, G.P.A.: FACTORISATION OF FINITELY MEROMORPHIC OPERATOR FUNCTIONS

Let X and Y be complex Banach spaces, and let λ_o be a complex number. We consider an L(X,Y)-valued function A with the following properties:

(i) A is defined and holomorphic in a deleted neighbourhood of λ_o,
(ii) the constant term of the Laurent expansion of A at λ_o has closed range,

(iii) A is finitely meromorphic at λ_o, that is, all coefficients of the Laurent expansion of A at λ_o are degenerate, and only finitely many of them are non-zero.

Let $k(A;\lambda_o)$ denote the stability number of A at λ_o. This number is defined in terms of certain subspaces associated with A and λ_o. Finiteness of the stability number is one of the main conditions in many stability theorems. The case when A is holomorphic at λ_o and $k(A;\lambda_o)$ is zero is particulary interesting. These conditions imply that the functions $\lambda \longrightarrow N(A(\lambda))$ and $\lambda \longrightarrow R(A(\lambda))$ are continuous in the gap topology.

In this lecture we shall discuss the following factorisation theorem: If $k(A;\lambda_o)$ is finite, then there exist operator functions T and C with the following properties:

(i) T is $L(X,Y)$-valued and holomorphic on a full neighbourhood of λ_o, $R(T(\lambda_o))$ is closed and $k(T;\lambda_o)$ is zero,

(ii) C is $L(X)$-valued and holomorphic on a deleted neighbourhood of λ_o, the operator $C(\lambda)$ is bijective for all λ, $k(C;\lambda_o) = k(A;\lambda_o)$, the operator function C is finitely meromorphic at λ_o and the constant term of the Laurent expansion of C at λ_o is a Fredholm operator.

(iii) $A(\lambda) = T(\lambda)C(\lambda)$ for all λ in a deleted neighbourhood of λ_o.

VOIGT, J.: ZUR STABILITÄT ABSOLUT STETIGER SPEKTREN

Satz: Sei $m \geq 3$; seien $T = (T_1,\dots,T_m)$, $T' = (T_1',\dots,T_m')$ kommutative m-Tupel selbstadjungierter Operatoren in einem Hilbertraum, für die gilt $T_j' - T_j \in c_p$ $(j = 1,\dots,m)$ für ein $p < m$. Dann ist der absolut stetige Teil T_{ac}' des m-Tupels T' unitär äquivalent zu dem absolut stetigen Teil T_{ac} des m-Tupels T.

Dieser Satz steht in Analogie zum Satz von Kato-Rosenblum. Zum Beweis benutzen wir die einem m-Tupel zugeordnete m-Parameter-Gruppe unitärer Operatoren und zeigen die Existenz gewisser Wellenoperatoren. Eine gewisse Abgrenzung für Verbesserungen des obigen Satzes gibt eine Verallgemeinerung des Satzes von Weyl-von Neumann:

Sei $T = (T_1,\dots,T_m)$ ein kommutatives m-Tupel selbstadjungierter Operatoren in einem separablen Hilbertraum; sei $p > m$. Dann existieren selbstadjungierte Operatoren $K_1,\dots,K_m \in c_p$, so daß das m-Tupel $(T_1 + K_1, \ldots, T_m + K_m)$ kommutativ und gemeinsam diagonal ist.

WAGNER, R.: DIVISIONSPROBLEM FÜR OPERATORWERTIGE DISTRIBUTIONEN

Es handelt sich um eine Arbeit von B. Gramsch und R. Wagner. Dabei wird ein Ergebnis von Lojasiewicz verallgemeinert:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ reellanalytisch und $f \not\equiv 0$.
Zu jeder Distribution $B \in \mathcal{D}'(\Omega)$ existiert $D \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $fD = B$ (definiert durch $D(f(x)\varphi(x)) = B(\varphi(x)) \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$).
Nun wird folgendes Divisionsproblem betrachtet: Sei X Banachraum und $\vec{B} \in \mathcal{D}'(\Omega) \;\hat{\otimes}_\varepsilon\; \mathcal{L}(X)$ operatorwertige Distribution. Ist dann $T : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ reellanalytisch mit Werten in $\phi^1(X)$ (Menge der Semi-Fredholmoperatoren mit endlichdimensionalem Kern und stetig projiziertem Bild) und an einer Stelle injektiv, so gibt es ein $\vec{D} \in \mathcal{D}'(\Omega) \;\hat{\otimes}_\varepsilon\; \mathcal{L}(X)$ mit $\vec{D}(T(x)\varphi(x)) = \vec{B}(\varphi(x)) \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

DE WILDE, M.: PERTURBATION OF MAPS IN LOCALLY CONVEX SPACES; STABILITY OF THE INDEX

The lecture is concerned with the extension to locally convex spaces of some perturbation theorems of Banach spaces, especially those dealing with the stability of the index, the dimension of the kernel and the codimension of the range.
At first some results on perturbation of inclusions of sets are proved. They state convenient conditions under which it may be deduced from such relations as $A \subset B + C$ that B absorbs A.
Then, after a generalization of Kato's theorem on small perturbations of maps to the case when the range space is only normed, the stability of the index in general locally convex spaces is studied by purely algebraic methods. It is proved that the perturbation P of a map T from E into F preserves the index of T if it does when T, P are restricted to suitable subspaces of E and F.
Application of the results to small and compact perturbations permits to extend completely Kato's theorem to general locally convex spaces and somewhat strengthen various results of Vladimirskii, Goldman and Krackovskii.

WEIS, L.: DIE SURJEKTIVE (INJEKTIVE) HÜLLE DER STRIKT (co-) SINGULÄREN OPERATOREN

Es wird gezeigt, daß die surjektive Hülle der strikt singulären Operatoren und die injektive Hülle der strikt cosingulären Operatoren gleich sind und sich darüberhinaus durch die folgenden äquivalenten Bedingungen charakterisieren lassen ($T \in B(X,Y)$):

a) $T(X)$ enthält keinen Teilraum isomorph l_1,

b) $T(X)$ hat keinen Quotientenraum isomorph l_2 mit 2-absolut-summierender Quotientenabbildung,

c) für jede beschränkte Folge $(x_n) \subset X$ hat (Tx_n) eine Teilfolge, die schwache Cauchyfolge ist.

B. Ernst (Kaiserslautern)
W. Kaballo