MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 8/1975

Funktionentheorie

16.2. bis 22.2.1975

Die Funktionentheorietagung, in deren Mittelpunkt Funktionen einer Veränderlichen stehen, fand in diesem Jahr vom 16. bis 22. Februar im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt. Die Leitung hatten D.Gaier (Gießen), J.Winkler (Berlin) und H.Wittich (Karlsruhe) übernommen. Der Tagung wohnten 50 Teilnehmer, darunter 10 aus dem Ausland, bei.

Die diesjährige Tagung hatte den Charakter einer Arbeitstagung. Im Mittelpunkt standen drei Vortragsserien (jeweils 5-mal 1 Stunde), die insbesondere jüngeren Mathematikern Überblick über spezielle Forschungsgebiete geben sollten. Für diese Vortragsserien hatten sich dankenswerterweise zur Verfügung gestellt:

D.Gaier, H.Kuhn: Approximation im Komplexen
Ch.Pommerenke: Fuchssche Gruppen und automorphe Funktionen
A.Huber, E.Mues, J.Winkler: Subharmonische Funktionen, die Baernsteinsche T^*-Funktion.

Neben den Vortragsserien wurden noch einige Kurzvorträge von 30 Minuten Dauer gehalten.

Teilnehmer

J.Becker, Berlin
H.Begehr, Berlin
N.Bühlmann, Zürich
C.Constantinescu, Zürich
K.Doppel, Wien
G.Ehrig, Berlin
H.Epheser, Hannover
G.Frank, Dortmund
F.Gackstatter, Berlin
D.Gaier, Gießen
R.P.Gilbert, Berlin
K.Habetha, Dortmund
K.-P.Herfeld, Berlin
A.Huber, Zürich
F.Huckemann, Berlin
K.-H.Indlekofer, Paderborn

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

S.Jaenisch, Gießen
V.Kasten, Hannover
O.Knab, Karlsruhe
H.Köditz, Hannover
E.Kühn, Dortmund
H.Kuhn, Karlsruhe
K.Leschinger, Bonn
W.Luh, Gießen
R.McLaughlin, Berlin
K.Menke, Dortmund
H.-J.Mieth, Darmstadt
E.Mogk, Gießen
E.Mues, Karlsruhe
R.Nevanlinna, Helsinki
J.Nikolaus, Hüttental-Weidenau
E.Peschl, Bonn
Ch.Pommerenke, Berlin
L.Reich, Graz
H.M.Reimann, Bern
M.von Renteln, Gießen
E.Röding, Berlin
S.Ruscheweyh, Bonn
T.Rychener, Bern
S.Schlosser-Haupt, Dortmund
J.F.Schnitzer, Leoben
M.Stieglitz, Karlsruhe
K.Strebel, Zürich
H.Tietz, Hannover
S.Timman, Hannover
L.Volkmann, Berlin
J.Winkler, Berlin
K.-J.Wirths, Dortmund
H.Wittich, Karlsruhe
D.Wrase, Karlsruhe

Vortragsauszüge

D.GAIER: Neuere Entwicklungen in der Theorie der Approximation im Komplexen

Anschließend an den Satz von Mergelyan werden in drei Übersichtsvorträgen die Sätze von Arakeljan, Keldych und Nersesjan behandelt, in denen Funktionen $f \in A(E)$ durch ganze Funktionen g gleichmäßig oder tangentiell approximiert werden. Dabei ist E abgeschlossen in $\mathbb{C}$, die topologischen Bedingungen A und K für E werden diskutiert. Läßt man nur gewisse Fehlerfunktionen zu, so kann Approximation auf E mit Geschwindigkeit erreicht werden, ohne von E die Bedingung A zu verlangen. Anwendungen auf das Randverhalten analytischer Funktionen und das Umkehrproblem der Nevanlinna-Theorie.

H.KUHN: Rationale Approximation

Zwei Referate im Rahmen der Vortragsserie über Approximation im Komplexen.

Zunächst wird ein Überblick gegeben über die Entwicklung der Bestapproximation durch rationale Funktionen auf einer kompakten Menge $E \subseteq \mathbb{C}$, dann werden ausführlich einige repräsentative neuere Arbeiten von Walsh, Saff, Volkov und Szabados besprochen.

In der auf $\bar{D} = \{z: |z| \leq 1\}$ gebildeten Walsh-Tafel für $f(z) = e^z$ konvergieren Zeilen und Spalten überall lokal gleichmäßig gegen f, insbesondere streben die Pole der Approximanden gegen den Punkt ∞. Letzteres ist nicht bei jeder ganzen Funktion der Fall; es existiert eine ganze Funktion, für welche die Pole der rationalen Bestapproximanden sogar dicht liegen im Komplement von $\bar{D}$.

Anschließend an das bekannte Resultat von Newman über rationale Approximation an $|x|$ auf $[-1,1]$ wird rationale Approximation mit Polynomapproximation verglichen. Es zeigt sich, daß in gewissen Klassen "bösartige" Funktionen existieren, für welche die Güte der rationalen Approximation nicht besser ist als die Güte der Polynomapproximation.

Weitgehend offen ist die Frage nach der Verteilung und dem asymptotischen Verhalten der Polstellen bei rationaler Bestapproximation.

CH.POMMERENKE: Fuchssche Gruppen und automorphe Funktionen

Eine Fuchssche Gruppe ist eine diskontinuierliche Gruppe von Möbiustransformationen der Einheitskreisscheibe auf sich. Man erhält Fuchssche Gruppen u.a. durch die Uniformisierung Riemannscher Flächen, und es zeigt sich, daß die Theorie der Riemannschen Flächen und der auf ihnen meromorphen Funktionen im wesentlichen äquivalent ist zur Theorie der bzgl. einer Fuchsschen Gruppe automorphen Funktionen.

In der fünfstündigen Vortragsreihe wurde eine Einführung in die Theorie gegeben, wobei immer der Fall unendlich erzeugter Gruppen zugelassen wurde. Bei der Mehrzahl der Sätze wurde der Beweis zumindest skizziert, daneben wurde über eine Anzahl weiterer Ergebnisse referiert. Insbesondere wurde auf die Petersson-Berssche Theorie der Banachräume $A_q^p(\Gamma)$ und ihrer Dualräume näher eingegangen.

Inhaltsverzeichnis:

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

A.HUBER: Subharmonische Funktionen

Die verschiedenen Definitionen, Mittelwertseigenschaften, Majoranteneigenschaft, Rieszsche Zerlegung, subharmonische Funktionen und Distributionen. Isoperimetrische Ungleichung von Beckenbach und Radó. Subharmonische Metriken $ds = e^{u(z)}|dz|$ (u Differenz subharmonischer Funktionen) und Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung (Iu.G.Reschetnjak, DAN SSSR 94 (1954), 631-632). Isoperimetrische Ungleichung auf Flächen variabler Gaußscher Krümmung (A.Huber, Annals of Math. 60 (1954), 237-247), vollständige Flächen mit summierbarer Gaußscher Krümmung (R.Finn, Comment. Math. Helv. 40 (1965), 1-30; A.Huber, Comment. Math. Helv. 41 (1966/67), 105-136; A.Huber, Archive for Rational Mechanics and Analysis 24 (1967), 173-192), potentialtheoretischer Aspekt des Aleksandrovschen Verheftungssatzes (H.Leutwiter, Comment. Math. Helv. 45 (1970), 83-109).

E.MUES, J.WINKLER: Die Baernsteinsche T^*-Funktion

In zwei einstündigen Vorträgen wird die Baernsteinsche T^*-Funktion vorgestellt, und es werden Anwendungen gegeben. Für eine in der Ebene meromorphe Funktion f definiert man

$$T^*(re^{i\theta},f) = N(r,f) + m^*(re^{i\theta},f)$$

mit

$$m^*(re^{i\theta},f) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi}\int_E \log|f(re^{i\phi})|\,d\phi .$$

Dabei wird das Supremum über alle meßbaren Mengen vom Maß 2θ genommen. T^* ist eine in $\{z: \operatorname{Im}(z) > 0\}$ subharmonische Funktion, die noch in $\{z: \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ stetig ist. Der Beweis der Subharmonizität von T^* wird skizziert. Als Anwendung wird gezeigt, wie sich mit Hilfe von T^* die von Edrei aufgeworfene "Spread-Conjecture" über defekte Werte einer meromorphen Funktion beweisen läßt.

K.-H.INDLEKOFEER: Automorphismen gewisser Funktionenalgebren

Sei D bzw. $\bar{D}$ der offene bzw. abgeschlossene Einheitskreis der komplexen Ebene und A(D) die Menge der in $\bar{D}$ stetigen und in D holomorphen Funktionen. Für monoton steigende und subadditive Funktionen $w: [0,\pi] \to \mathbb{R}^+$ mit $w(h) \to 0$ für $h \to 0^+$ definiere man

$$A_{aw} := \{f \in A(D):\ f(z) = \sum a_n z^n,\ \sum |a_n| < \infty,\ \sup_{h\in(0,\pi]} \frac{\omega(f,h)}{w(h)} < \infty\},$$

wobei $\omega(f,h)$ den Stetigkeitsmodul von f auf dem Rand von D bezeichne. In dem Vortrag wird eine vollständige Charakterisierung für die Automorphismen der Algebra A_{aw} gegeben und dabei u.a. ein Ergebnis von J.-P.Kahane (Series de Fourier absolument convergente, S.143) erweitert. Der Beweis beruht u.a. auf der Untersuchung der Frage, wann mit $f \in A_{aw}$ auch $f\circ\Phi \in A_{aw}$ ist, wenn Φ eine Möbiustransformation von D ist. Dieses Ergebnis gibt eine abschließende Antwort auf ein von G.Halâsz (Acta Math. Acad. Sci. Hung. 25 (1974), 81-87) und dem Vortragenden (Math. Z. 134 (1973), 171-177) behandeltes Problem und enthält einen neuen Beweis für einen Satz von S.N.Bernstein aus der Theorie der Fourier-Reihen.

W.LUH: Universalapproximation

Es sei $A = (\alpha_{n\nu})$ eine untere Dreiecksmatrix, welche die Spaltenbedingung und die Zeilensummenbedingung erfüllt (kurz: SZ-Matrix). Wir interessieren uns hier für die Anwendung der A-Transformierten von Potenzreihen in der Approximationstheorie im Komplexen. Mit S bezeichnen wir die Klasse aller in $|z| > 1$ gelegenen kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$, deren Komplement zusammenhängend ist, und mit A(E) die Klasse aller Funktionen, die auf der Menge E stetig und im Inneren von E regulär sind. Es gelten die folgenden Sätze:

Satz 1: Zur geometrischen Reihe $\sum z^{\nu}$ existiert eine SZ-Matrix $(\alpha_{n\nu})$ mit der Eigenschaft: Zu jeder Menge $E \in S$ und jeder Funktion $f \in A(E)$ gibt es eine Folge $\{n_k\}$, so daß

$$\sigma_{n_k}(z) = \sum_{\nu=o}^{n_k} \alpha_{n_k\nu}(1+z+\ldots+z^{\nu})$$

auf E gleichmäßig gegen f(z) konvergiert.

Satz 2: Zu einer SZ-Matrix $(\alpha_{n\nu})$ existiert eine Potenzreihe $\sum a_{\mu} z^{\mu}$ vom Konvergenzradius 1 mit der Eigenschaft: Zu jeder Menge $E \in S$ und jeder Funktion $f \in A(E)$ gibt es eine Folge $\{n_k\}$, so daß

$$\sigma_{n_k}(z) = \sum_{\nu=o}^{n_k} \alpha_{n_k\nu} s_{\nu}(z) \quad \text{mit} \quad s_{\nu}(z) = \sum_{\mu=o}^{\nu} a_{\mu} z^{\mu}$$

auf E gleichmäßig gegen f(z) konvergiert.

H.-J.MIETH: Funktionentheoretische Methoden bei Problemen der Potentialtheorie und der Elastomechanik

Am Beispiel des Spannungsrandwertproblems der Elastomechanik und des DIRICHLETschen bzw. NEUMANNschen Randwertproblems der Potentialtheorie werden Anwendungen funktionentheoretischer Methoden erläutert, deren Ursprünge hauptsächlich auf die Arbeiten von MUSCHELISCHWILI zurückgehen. MUSCHELISCHWILI ersetzte insbesondere bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten die ursprünglichen Probleme durch modifizierte Randwertaufgaben der Funktionentheorie, deren Lösungen mit denen der Ausgangsprobleme auf "einfache" Weise zusammenhängen. Ziel des Vortrags ist es, einerseits die Vorteile dieser Methode zu verdeutlichen und andererseits die durch die Modifikation auftretenden Nachteile herauszuarbeiten.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

M.v.RENTELN: Über die topologische Entfernung von Idealen in gewissen Algebren im Einheitskreis holomorpher Funktionen

Für eine sehr allgemeine Klasse von Algebren $A = A_p^g(\Omega)$ von auf Ω holomorphen Funktionen mit Wachstumsbedingung $|f(z)| \leq C_1 \exp[C_2 p(z)]$ und Glattheitsbedingung g wird das funktionentheoretische Hauptproblem (Wann ist $f \in A$ durch gegebene Funktionen $f_1,\ldots,f_n \in A$ darstellbar?) formuliert. Dies legt die Einführung der Ideale

$$I = \{\sum_{i=1}^{n} f_i g_i : g_i \in A\}$$

und

$$W = \{f \in A: |f(z)| \leq C_1 \exp[C_2 p(z)] \sum_{i=1}^{n} |f_i(z)|\}$$

nahe, für die eine Distanz $D(I,W) = \sup_{w \in W} \operatorname{dist}(I,W)$ definiert wird. Anschließend werden $\Omega = D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, $p(z) \equiv 1$ und g spezialisiert, so daß A eine Unteralgebra der Disc-Algebra $A(\bar{D})$ wird, die die Polynome enthält. Bekannte Beispiele sind etwa $\Lambda_\alpha = A(\bar{D}) \cap \mathrm{Lip}_\alpha(\partial D)$, $A^{(n)} = \{f \in A(\bar{D}): f^{(k)} \in A(\bar{D}),\ k = 1,\ldots,n\}$, $A^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$, A_{aw} (siehe Vortrag Indlekofer). Für solche Algebren wird folgender Satz mit funktionalanalytischen Methoden (Hahn-Banach, Rieszscher Darstellungssatz, F.+M.Riesz) bewiesen:

Satz: $D(I,W) = 0$.

Als Korollar erhält man sofort eine notwendige und hinreichende Bedingung für das oben formulierte Hauptproblem im wichtigen Spezialfall: f ist nullstellenfrei. Dies läßt sich auch für manche Algebren, die nicht von obigem Typ sind, erhalten, z.B. für $A = \mathrm{Hol}(D)$, indem man ein Ergebnis über Fréchetalgebren benutzt. Als offenes Problem wird die Charakterisierung derjenigen Ideale I in der Algebra H^∞ mit $D(I,W) \neq 0$ genannt.

L.VOLKMANN: Ganze Funktionen der Ordnung $\lambda < 1$

Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion, $M(r,f)$ der Maximalbetrag, $n(r,0)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ im Kreis $|z| \leq r$,

$$T(r,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

die Nevanlinnasche Charakteristik und λ die Ordnung. Zunächst wird im Falle $\lambda < 1$ die bekannte Abschätzung

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,0)}{\log M(r,f)} \geq \frac{\sin \pi\lambda}{\pi}$$

von G. Polya aus dem Jahre 1923 bewiesen. Mit der gleichen Methode wird anschließend folgender Satz bewiesen.

Satz: Sei $f(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung $\lambda < 1$, dann gilt

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,0)}{T(r,f)} \geq \begin{cases} \lambda & \text{für } \lambda < \frac{1}{2} \\ \lambda \sin \pi\lambda & \text{für } \frac{1}{2} \leq \lambda < 1 \end{cases},$$

und diese Abschätzung ist scharf.

E. Mues (Karlsruhe)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft