MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 10/1975

Partielle Differentialgleichungen

2. - 8. 3. 1975

Tagungsleiter: E. Heinz (Göttingen), G. Hellwig (Aachen)

Diese achte Tagung war mit 63 Teilnehmern und 35 Vorträgen sehr arbeitsreich. Die Beiträge entstammten vielen verschiedenen Teilgebieten der partiellen Differentialgleichungen. Nichtlineare Probleme, Minimalflächenprobleme, sowie die Störungstheorie erfuhren besonderes Interesse.

Der Vormittag des 5. März war dem Andenken an Konrad Jörgens gewidmet. J. Weidman gab einen Überblick über die Entstehung und den Inhalt der Arbeiten von Konrad Jörgens zur Störungstheorie, die in den Jahren 1963-1973 entstanden sind. P. A. Rejto und L. Hörmander sprachen über Probleme aus der Streutheorie und der Störungstheorie.

Die vorbildliche Betreuung im Institut trug wesentlich zum harmonischen Verlauf der Tagung bei.

Teilnehmer

H. W. Alt (Heidelberg)
W. Alt (Münster)
H. Amann (Bochum)
G. Avakumović (Marburg)
N. W. Bazley (Köln)
R. Böhme (Erlangen)
R. Brübach (Marburg)
J. Brüning (Marburg)
G. Bruhn (Darmstadt)

F. J. Bureau (Liege/Belgien)
D. L. Colton (Konstanz)
J. Donig (Darmstadt)
K.-J. Eckardt (München)
J. Edenhofer (München)
J. Frehse (Bonn)
K. O. Friedrichs (München)
C. Gerhardt (Mainz)
R. P. Gilbert (Berlin)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

W. Gromes (Marburg)
Ch. P. Gupta (Zürich/Schweiz)
W. Haack (Berlin)
E. Heinz (Göttingen)
G. Hellwig (Aachen)
P. Hess (Zürich/Schweiz)
St. Hildebrandt (Bonn)
E. Hölder (Mainz)
L. Hörmander (Lund/Schweden)
R. Illner (Bonn)
W. Jäger (Heidelberg/Münster)
H. Kaul (Bonn)
H. Kielhöfer (Stuttgart)
R. Kress (Göttingen)
R. Leis (Bonn)
R. Lemmert (Karlsruhe)
F. Lewerenz (Göttingen)
W. Littmann (Göteborg/Schweden)
V. Lvov (München)
C. S. Morawetz (New York/USA)
C. Müller (Aachen)
B. Najman (Zagreb/Yugoslawien)
J. C. C. Nitsche (Minneapolis/USA)
H. Pecher (Göttingen)
R. Rannacher (Bonn)
P. A. Rejto (Minneapolis/USA)
N. Rogler (München)
M. Schneider (Berlin)
Ch. G. Simader (München)
H. Sohr (Tübingen)
E. Sperner jun. (Bonn)
F. Tomi (Saarbrücken)
K. Veselić (Zagreb/Yugoslawien)
V. Vogelsang (Clausthal-Zellerfeld)
A. Voigt (Karlsruhe)
J. Voigt (München)
W. von Wahl (Bochum)
J. Walter (Aachen)
W. Walter (Karlsruhe)
J. Weidmann (Frankfurt)
H. F. Weinberger (Minneapolis/USA)
W. Wendland (Darmstadt)
P. Werner (Stuttgart)
K.-O. Widman (Linköping/Schweden)
R. Wüst (Aachen)

Vortragsauszüge

W. ALT: Regularitätsfragen beim $\bar\partial$-Problem

In streng pseudokonvexen Gebieten $G \subset\subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 2$, mit glattem Rand gilt eine Integraldarstellung

$$u = K(u|_{\partial G}) + T(\bar\partial u)$$

mit $\bar\partial = (\bar\partial_1, \ldots, \bar\partial_N)$, so daß $\bar\partial T = \mathrm{id}$ ist und die Stetigkeit

$$T : H^{m,\infty}(G) \cap \mathrm{Ker}\ \bar\partial^{(1)} \longrightarrow \tilde{C}^m_\alpha(\bar G) \quad \forall m \in N,\ \alpha < 1$$

gilt, wobei $\bar\partial^{(1)} f := (\bar\partial_j f_k - \bar\partial_k f_j)_{j,h=1,\ldots,N}$ sei und $\tilde{C}^m_\alpha$ den Banachraum der $\tilde{C}^m_\alpha$ (G,lok)-Funktionen bezeichne, für die $\nabla^m u$ in einem Randstreifen von G α-hölderstetig bezüglich einer geeigneten Fast-Metrik ist. Der Singuläre Integraloperator (mit gemischten Homogenitäten)

$$K : \tilde{C}^m_\alpha(\partial G) \longrightarrow \tilde{C}^m_\alpha(\bar G) \cap \mathrm{Ker}\ \bar\partial$$

ist stetig und hat bei Annäherung an den Rand das Sprungverhalten

$$K|_{\partial G} = \frac{1}{2}\,\mathrm{id} + \tilde{K},$$

wobei $\tilde{K}$ ein im Cauchy-Hauptwert definierter stetiger singulärer Integraloperator in $\tilde{C}^m_\alpha(\partial G)$ ist (mit gemischten Homogenitäten). Der Operator $P = \frac{1}{2}\,\mathrm{id} + \tilde{K}$ ist stetige Projektion von $\tilde{C}^m_\alpha(\partial G)$ auf $\tilde{C}^m_\alpha(\partial G) \cap \mathrm{Ker}\ \bar\partial_b$, wobei Ker $\bar\partial_b$ genau aus den stetigen Randwerten holomorpher Funktionen besteht.

NORMAN W. BAZLEY: Existenz und Schranken für kritische Werte

Eine Methode zur Bestimmung oberer und unterer Schranken für kritische Werte ist gegeben. Durch die unteren Schranken bekommen wir eine Existenzaussage für den kleinsten kritischen Wert der Hartreegleichung. Die Theorie ist eine nichtlineare Erweiterung der Theorie selbst-adjungierter Operatoren.

REINHOLD BÖHME: Über das generische Plateauproblem

Es sei γ eine reguläre C^∞-Kurve im R^3 und x eine Minimalfläche, die Extremale des Plateauproblems zu γ ist. Dann gilt: x ist entarteter kritischer

Punkt des Variationsproblems immer dann, wenn x Verzweigungspunkte hat. Man kann den Raum der Jacobifelder $J(x)$ zu dieser Extremale x im generischen Fall explizit beschreiben. Es gilt: fast alle Minimalflächen mit Verzweigungspunkten sind, wenn auch entartete, so doch isolierte Extremalen des zugehörigen Variationsproblems. Zum Beweis betrachtet man die "Mannigfaltigkeit" aller Minimalflächen und ihren Schnitt mit der Mannigfaltigkeit aller Flächen, die von γ berandet werden.

RICKLEFF BRÜBACH: <u>Über die Spektralmatrix elliptischer Systeme</u>

In diesem Vortrag wird das asymptotische Verhalten der Spektral(matrix)-funktion $\mathcal{E}_{ij}(x,y;\lambda) \in C^{\infty}(G \times G)$, $G \subset R^n$ beschränkt, $\lambda \in R^1_+$, eines halbbeschränkten, selbstadjungierten, elliptischen Differentialoperators 2m-ter Ordnung untersucht, der durch ein stark elliptisches $N \times N$ Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten erzeugt wird. Es wird gezeigt, daß es wie im Falle einer Gleichung auch bei allen Systemen mit konstanten Koeffizienten Zahlen K_i gibt, mit denen die bestmöglichen Abschätzungen

$$|\mathcal{E}_{ii}(x,x;\lambda) - K_i \lambda^{\frac{n}{2m}}| \leq \frac{C}{l(x)} \lambda^{\frac{n-1}{2m}}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad x \in G, \ \lambda \in R^1_+$$

gelten. Dabei bedeutet $l(x)$ den Abstand des Punktes $x \in G$ vom Rand von G. Aus diesem Ergebnis folgt u. a. die folgende Abschätzung der Anzahlfunktion $N(\lambda)$

$$|N(\lambda) - C_o \lambda^{\frac{n}{2m}}| = C \lambda^{\frac{n-1}{2m}} \log \lambda .$$

G. BRUHN: <u>Lösungsabschätzungen beim Modifizierten DIRICHLET-Problem</u>

Alle folgenden Aussagen lassen sich auf die BELTRAMI-Gleichung im $\mathbb{R}^n$ übertragen. G sei ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^2$. $F(G)$ sei die Teilmenge der in G harmonischen Funktionen, welche der "Flußbedingung" $\oint_L d_n u = o$ für beliebige geschlossene Wege $L \subset G$ genügen. Die DIRICHLETsche Randbedingung $u|_{\partial G} = g$ ist in $F(G)$ i. a. nicht erfüllbar. Jedoch hat I. N. MUSCHELISCHWILI 1941 gezeigt, daß für $\partial G = \bigcup_{\mu=o}^{m} L_\mu$ mit hinreichend glatten Randkomponenten L_p und hinreichend glatter Vorgabe g das sog. <u>Modifizierte</u> <u>DIRICHLET-Problem</u> $u|_{L_\mu} = g + c_\mu$ $(\mu=o,\dots,m)$ mit $c_o = o$ und <u>freien</u> Konstanten $c_1,\dots,c_m$ in $F(G)$ eindeutig lösbar ist. Die übliche Lösungsabschätzung mittels Maximumprinzips scheitert an den unbekannten Konstanten c_μ. Die Funktionen $\in F(G)$ besitzen jedoch die Besonderheit, jeden in G vorkommenden Wert auch am Rande anzunehmen. Es resultiert die (scharfe) Abschätzunge $|\overline{u(G)}| \leq \sum_{\mu=o}^{m} |g(L_\mu)|$ mit Gleichheit genau dann, wenn auf höchstens einer Randkomponente $L_\mu |g(L_\mu)| > o$ ist. Dabei bezeichnet $|J|$ die Länge des Intervalls J. Ferner ist eine harmonische Funktion in G konstant, wenn sie auf einer Randkomponente L_o konstant den Extremalwert u_o annimmt und zugleich der Fluß $\oint_{L_o} d_n u$ verschwindet. Hieraus ergeben sich für die Inverse $(C_{\rho\mu})$ der MAXWELLschen Kapazitätsmatrix die Abschätzungen $o < C_{\rho\mu} < C_{\rho\rho}$ für $\mu \neq \rho$ und $C_{\mu\rho} - C_{\mu\mu} < C_{\tau\rho} - C_{\tau\mu} < C_{\rho\rho} - C_{\rho\mu}$ für $\tau \neq \mu,\rho$ und $\mu \neq \rho (\mu,\rho,\tau = 1,\dots,m)$.

JÖRG DONIG: Elliptische singuläre Integro-Differentialoperatoren in $L^p(R^n)$.

Wir betrachten singuläre Integro-Differentialoperatoren im Lebesgueschen Raum $L^p(R^n)$ $(1 < p < \infty)$, die im Sobolewschen Raum $W^{m,p}(R^n)$ definiert sind gemäß

$$A := \sum_{|\alpha| \leq m} (S_\alpha + K_\alpha)\hat{D}^\alpha + T \ ; \quad m \in N .$$

Hier sind S_α singuläre Integraloperatoren vom Michlin-Typ (vgl. Michlin, Multidimensional singular integrals and integral equations, Pergamon Press, Oxford 1965; S. 70 ff.), K_α sind verallgemeinerte reguläre Faltungsoperatoren mit Kernen k_α ; $\operatorname{ess\,sup}_x \int_{R^n} |k_\alpha(x,y)| dy < \infty$, $\hat{D}^\alpha$ sind normierte schwache Differentialoperatoren und T ist eine bel. kompakte Störung.

Untersucht werden soll die Fredholmeigenschaft von A. Es werden insbesondere Bedingungen angegeben, die einerseits mit der Gültigkeit geeigneter a priori Abschätzungen für A und andererseits mit der Semi-Fredholmeigenschaft von A äquivalent sind.

J. FREHSE: Variationsprobleme mit niederdimensionalen Hindernissen

Es wird das skalare Variationsproblem $\int F(x, u, \nabla u)dx = \min.$ unter Dirichletrandbedingungen sowie unter der Nebenbedingung, daß u über einem niederdimensionalen Hindernis liegt (Beispiel: Eine Seifenhaut über einer Rasierklinge).
Es werden die üblichen Bedingungen der Elliptizität sowie der Regularität der Daten vorausgesetzt. Es wird dann gezeigt, daß die ersten Ableitungen der Lösungen der zugehörigen Variationsungleichung, die in tangentialer Richtung zum Hindernis genommen werden, stetig sind, und daß die entsprechenden Ableitungen in Richtung der Normalen zum Hindernis einseitig stetig sind.

K. O. FRIEDRICHS: Bemerkungen über die Regularität der Lösungen akkretiver Gleichungen

Die Laxsche Ungleichung für eine Norm negativer Ordnung wird uminterpretiert als Inversbeschränktheit der Adjungierten des Differentialoperators mit Bezug auf eine Norm positiver Ordnung. Diese Adjungierte ist kein Differentialoperator. Aber ein allgemeiner Hilbertraumexistenzsatz ist anwendbar.

CLAUS GERHARDT: Zur Existenz einer Verwölbungsfunktion bei den elast.-plast. Torsien eines zylindrischen Stabes mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt

Wir weisen die Existenz einer Verwölbungsfunktion bei dem Torsionsproblem nach, falls je zwei Randkomponenten eines Querschnitts nicht durch eine "plastische Brücke" verbunden sind.

Beim Existenzbeweis sehen wir das elastisch-plastische Torsionsproblem als einen Grenzfall der nichtlinearen Elastizitätstheorie an.

WOLFGANG GROMES: Spektraleigenschaften nicht-symmetrischer elliptischer Differentialoperatoren

Es sei $\Omega \subset R^n$ ein beschränktes Gebiet und L ein abgeschlossener, halbbeschränkter, elliptischer Differentialoperator der Ordnung m mit $o \in \rho(L)$, für den gilt:

$\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}(L^*) \subset H_m(\Omega)$ und

$||(L-L^*)\phi||_{o,\Omega} \leq ||\phi||_{k,\Omega}$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(L)$,

wobei $k < m - \frac{3}{2} n$ sei.

Für $\mu = 1,2,\ldots$ wird $\mathcal{Y}_\mu$ als die endliche Summe gewisser algebraischer Eigenräume von L definiert. Dann gilt

Satz 1: Die Folge $(\mathcal{Y}_\mu)$ von unter L invarianten Teilräumen ist eine Basis unbedingter Konvergenz (sogar eine Bari- Basis) von $L_2(\Omega)$.

Aus Satz 1 folgt: Es existiert eine Folge (T_μ) von Spektraloperatoren mit $\mathcal{D}(T_\mu) = \mathcal{D}(L)$, $\sigma(T_\mu) = \sigma(L)$ für $\mu = 1,2,\ldots$ und $||(T_\mu - L)\phi|| \to o$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(L)$. Ferner ist $T_\mu = S_\mu + N_\mu$ mit S_μ skalarer Operator, N_μ nilpotent. Für die Spektralfunktion e_μ von S_μ gilt:

$$|e_\mu(x,y;\lambda)| \leq C\lambda^{\frac{n}{m}} \quad \text{für } \lambda \geq \operatorname{Re} \lambda_{j_\mu} .$$

CHAITAN P. GUPTA: Solvability of a nonlinear elliptic boundary value problem of Neumann type

Let Ω be a bounded domain in an Euclidean space R^N with smooth boundary Γ. Let β be a maximal monotone graph in $R \times R$ such that there exists a convex lower semi continuous function $j : R \to (-\infty,\infty)$, $j \not\equiv \infty$ with $\beta = \delta j$, the subdifferential of j. Let $T : D(T) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ be a nonlinear quasi-bounded mapping of monotone type in $L^2(\Omega)$ such that $C_o^\infty(\Omega)$ is contained in $L^2(\Omega)$ and $\lim\limits_{\substack{||u||\to\infty \\ u \in D(T)}} \frac{(Tu,u)}{||u||} = \infty$. Then for any given $f \in L^2(\Omega)$ there exists a $u \in L^2(\Omega)$ such that $-\Delta u + Tu = f$ a.e. on Ω, $-\frac{\delta u}{\delta n} \in \beta(u)$ a.e. on Γ, where Δ denotes the Laplacian and $\frac{\delta}{\delta n}$ the outward normal derivative on Γ. This is obtained using an existence theorem for an abstract operator equation involving mappings of monotone type. We also discuss operator equations obtained by compact perturbations.

E. HEINZ: Über die Regularität der Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen

Betrachtet wird das Cauchysche Anfangswertproblem

(1) $u_{tt} + Au + F(x,D^{\alpha}u) = o, \quad t \geqq o, \; x \in R^n, \quad |\alpha| \leqq h$;

(2) $u(x,o) = \phi(x) \; ; \; u_t(x,o) = \psi(x)$.

Dabei ist $A = \sum\limits_{|\alpha| \leqq 2m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha}$ ein positiver selbstadjungierter elliptischer Differentialoperator mit unendlich oft differenzierbaren Koeffizienten, und $F = F(x, u_{\alpha})$ ist eine Funktion der Klasse C^{∞}, die in den komplexen Veränderlichen u_{α} holomorph ist. Außerdem wird verlangt, daß $h < m$ gilt und daß die durch $M(u) = F(x,D^{\alpha}u)$ $(u \in W^{m,2}(R^n))$ definierte Abbildung für $u \in C_o^{\infty}(R^n)$ einer Ungleichung der Form

(3) $||M(u)||_{L^2(R^n)} \leqq \omega \; (||u||_{W^{m,2}(R^n)})$

mit einer in $[o,+\infty)$ stetigen monoton nichtfallenden Funktion $\omega(t)$ genügt. Als Hauptergebnis wird gezeigt, daß die klassische Lösbarkeit von (1) - (2) für $t \geqq o$ gesichert ist, falls die Anfangsdaten $\{\phi,\psi\}$ hinreichend regulär sind und für $u(t)$ eine Abschätzung der Form

(4) $||u'(t)||^2_{L^2(R^n)} + ||u(t)||_{W^{m,2}(R^n)} \leqq K(t)$

mit $K(t) \in C^o \; [o,+\infty)$ besteht.

PETER HESS: Zur Lösbarkeit nichtlinearer elliptischer Randwertprobleme

Es sei $\mathcal{A}$ ein quasilinearer elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform:

$$(\mathcal{A}u)(x) = - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x,u(x),\nabla u(x)),$$

definiert auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset R^N$. Dabei sollen die Koeffizientenfunktionen A_i die üblichen Bedingungen von Leray-Lions erfüllen.

Ferner genüge die Funktion $p : \Omega \times R \times R^N \to R$ der Carathéodory-Bedingung. Für gegebene f, g wird die Lösbarkeit des Dirichletproblems

(D) $(\mathcal{A}u)(x) + p(x,u(x),\nabla u(x)) = f(x) \quad (x \in \Omega), \quad u(x) = g(x) \quad (x \in \partial\Omega)$

untersucht. Falls ϕ, ψ bekannte Unter- resp. Oberlösungen von Problem (D) bezeichnen, mit $\phi \leqq \psi$ in Ω, so wird die Existenz einer Lösung $u : \phi \leqq u \leqq \psi$ in Ω, bewiesen. Mit einer neuen Methode werden damit zahlreiche frühere Resultate erweitert; dieselbe Methode erlaubt auch die Behandlung anderer Randwertprobleme sowie variationeller Ungleichungen.

S. HILDEBRANDT: Harmonische Abbildungen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Sei $\mathfrak{X}$ eine n-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand Σ und M eine N-dimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Abbildungen $U : \mathfrak{X} \to M$ der Klasse C^1 ordnet man ein Energieintegral $E(U) = \int_{\mathfrak{X}} ||dU||^2 dR^n$ zu. Die regulären kritischen Punkte von E heißen harmonische Abbildungen. Nach Diskussion der Arbeiten von Bochner, Morrey, Eells-Sampson, P. Hartman, Hamilton wurde gezeigt, daß man zu beliebigen Randwerten $\phi \in C^{1+\alpha}(\Sigma,M)$, $0 < \alpha < 1$, eine harmonische Abbildung $U : \mathfrak{X} \to M$ mit $U|_\Sigma = \phi$ finden kann, wenn M einfach zusammenhängend ist und nichtpositive Schnittkrümmung K_M hat. In der Tat ist die Voraussetzung des einfachen Zusammenhangs von M überflüssig, wie Hamilton mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung gezeigt hat. Jedoch setzt diese Methode, die schon von Eells-Sampson benutzt wurde, unabdingbar $K_M \leqq 0$ voraus, während die vorgetragene Technik (Bernsteinschranken + Abbildungsgrad) auf den Fall $K_M \leqq \varkappa$ mit $\varkappa \geqq 0$ ausgedehnt werden kann. In diesem allgemeinen Fall ist eine Kleinheitsvoraussetzung an die Randwerte ϕ in Termen von $\varkappa$ und der Topologie von M erforderlich. Die vorgetragenen Ergebnisse sind in zwei gemeinsam mit H. Kaul und K.-O. Widman verfaßten Arbeiten erhalten.

LARS HÖRMANDER: The existence of wave operators in scattering theory

Let $P(D)$, $D = -i\partial/\partial x$, be a partial differential operator in R^n with constant real coefficients, and denote by H_0 the closure in $L^2(R^n)$ of $P(D)$ with domain $\mathcal{S}(R^n)$. Assume that $V(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq} V_\alpha(x)D^\alpha$ is a perturbation, of any order, such that

$$\int |V_\alpha(x)|^2 (1+|x|^2)^{-M} dx < \infty$$

for some M and all α, and such that $P(D) + V(x,D)$ with domain $\mathcal{S}$ has a self-adjoint extension H in $L^2(R^n)$. If the wave operators

$$W_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$$

exist, they are isometric operators intertwining H_0 and H. The first part of the lecture gives a refinement of the sufficient conditions for the existence of wave operators due to Cook, Hack, Jauch-Zinnes, Kuroda and others. The second part is a discussion of the existence of modified wave operators in the sense of Dollard, Buslaev-Matveev, Alsholm and Kato. A proof for their existence is indicated when for some $\varepsilon > 0$ and all α

$$|D^\beta V_\alpha(x)| \leq C(1+|x|)^{-\varepsilon-|\beta|}, |\beta| \leq 3.$$

HANSJÖRG KIELHÖFER: Zur Lyapunov-Stabilität stationärer Lösungen semilinearer parabolischer Differentialgleichungen

Wir untersuchen die stationäre Lösung $u = o$ (o.B.d.A.) von

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\tilde\alpha| \leq 2m} a_{\tilde\alpha}(x) D^{\tilde\alpha} u = f(x, D^{\tilde\alpha_1} u, \ldots, D^{\tilde\alpha_N} u), \quad |\tilde\alpha_i| \leq 2m-1, \\ &u\big|_{t=o} = u_o, \quad D^{\tilde\alpha} u\big|_{\partial\Omega} = o, \quad |\tilde\alpha| \leq m-1 \end{aligned}$$

auf Stabilität bzw. Instabilität. Es erweist sich, daß der klassische Satz von Lyapunov bezügl. Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen auf die partielle Gleichung (1) übertragbar ist: Die Realteile der Spektralpunkte des linearen ellipt. Operators A bestimmen über die Stabilität bzw. Instabilität der Lösung $u = o$. (Da wir auch unbeschränkte Gebiete zulassen, besteht das Spektrum von A nicht nur aus Eigenwerten). Während die Stabilitätsaussagen in der stärksten Norm, nämlich in der von D(A) (äquivalent zu der in $W_p^{2m}(\Omega)$

bzw. $C^{2m+\alpha}(\bar{\Omega})$) erfolgen, können wir die Instabilität in der Norm von $L_p(\Omega)$ bzw. $C^{\alpha}_{*}(\bar{\Omega})$ beweisen.

R. KRESS: Zur Konvergenz der sukzessiven Approximation bei Integralgleichungen für potentialtheoretische Randwertprobleme unter Verwendung von Greenschen Funktionen für benachbarte Gebiete

Von Roach stammt die Idee, bei der Integralgleichungsmethode für Randwertaufgaben zum Laplaceoperator die Grundlösung $1/|x-y|^{m-2}$ zu ersetzen durch die Greensche Funktion für ein den Definitionsbereich $B \subset R^m$ der gesuchten Lösung umfassendes Nachbargebiet B'. Es wird demonstriert, daß diese Variante zu einer Konvergenzverbesserung führt bei der Methode der sukzessiven Approximation zur näherungsweisen Lösung der den Randwertaufgaben zugehörenden Integralgleichungen.

FRIEDER LEWERENZ: Analytische Eigenwertprobleme im Banachraum

Das Eigenwertproblem

$$Ax + B(\varepsilon,x) = (\lambda + \mu)x$$

wird betrachtet. A sei ein selbstadj. Operator in einem reellen Hilbertraum - mit dem Skalarprodukt (.,.) - mit dem Eigenwert endlicher Vielfachheit λ. μ und ε seien reelle Parameter und $B(\varepsilon,x) = \varepsilon B_1(x) + \varepsilon^2 B_2(\varepsilon,x)$ ein reellanalytischer Operator in x und ε. Es gebe reellwertige Operatoren $F_1(x)$ und $F_2(\varepsilon,x)$ mit

$$(B_1(x),z) = DF_1(x)\langle z\rangle$$

und

$$(B_2(x),z) = DF_2(\varepsilon,x)\langle z\rangle \quad \text{für } z \in \mathcal{G}.$$

F_1 habe auf der Einheitssphäre im Kern von $(A-\lambda)$ einen nichtentarteten kritischen Punkt x_o. Dann gibt es ein $\varepsilon_1 > o$ und analytische Abbildungen $\mu(\varepsilon) : (-\varepsilon_1,\varepsilon_1) \to R$ und $x(\varepsilon) : (-\varepsilon_1,\varepsilon_1) \to X \cap \{(x,x) = 1\}$ mit

$$(A-\lambda)\, x(\varepsilon) + B(\varepsilon,x(\varepsilon)) = \mu(\varepsilon)\, x(\varepsilon)$$

Es ist $\mu(o) = o$ und $x(o) = x_o \in \mathcal{E}_\lambda$. Die Lösung ist eindeutig in einer Umgebung von $(x,\mu) = (x_o,o)$.

WALTER LITTMAN: Boundary Control for Partial Differential Equations

Boundary control problems are considered for strictly hyperbolic equations (of even order) with constant coefficients. An initial disturbance can be brought to rest by applying appropriate boundary conditions during a time interval of length $T > T_o$, where $T_o \leq$ diameter of domain/slowest propagation speed. (Actual results are slightly better).

For parabolic problems $T_o = o$.

V. LVOV: Untersuchungen über das asymptotische Verhalten der NAVIER-STOKES-Gleichungen

Die vorliegende Arbeit untersucht das asymptotische Verhalten ($s \to \infty$) der NAVIER-STOKES-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten auf dem Gebiet $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)} \subset R^n$ $(n = 2,3)$. $F^{(s)}$ besteht entweder aus endlich vielen beschränkten, paarweise disjunkten abgeschlossenen Mengen $F_i^{(s)}$ $(i = 1,2,\dots,s)$, also $F^{(s)} = \bigcup_i F_i^{(s)}$, oder $F^{(s)}$ ist eine zusammenhängende beschränkte und abgeschlossene Menge von komplizierter äußerer Gestalt (z. B. engmaschiges Gitter oder poröse Hindernisse usw.).

Es wird das asymptotische Verhalten des Ausgangsproblems untersucht, wenn diam $F_i^{(s)} \to 0$ und $\rho(F_i^{(s)}, F_j^{(s)}) \to 0$ $(i \neq j)$ bei $s \to \infty$. Es wird gezeigt, daß die Folge der Lösungen $\{\vec{v}^{(s)}(x), p^{(s)}(x)\}$ des Ausgangsproblems für $s \to \infty$ gegen Funktionen $\{\vec{v}(x), p(x)\}$ strebt, welche veränderten NAVIER-STOKES-Gleichungen im Gebiet $\Omega \subset R^n$ genügen.

CATHLEEN S. MORAWETZ: A new way of finding iteration schemes for partial differential equations

Suppose we seek a solution of $Lu = f$ in D, $Nu = g$ on ∂D. Here N may be $\equiv o$ on part of ∂D. Suppose $(BV,LV) \leq -(PV, PV) \leq -k(BV, BV)$ if $NV = o$ where BV is some operator of lower order than L. To solve the original problem use as an iteration scheme a stable difference scheme for the time-dependent system: $\alpha(BW)_t = LW - f$, $NW = g$, W arbitrary initially and t acting as iteration variable. Here $\alpha > \delta > o$ is a function independent of t. For, let $V = W_t$ so that $\alpha(BV)_t = Lv, Nv = o$ and $\frac{1}{2}(Bv,\alpha Bv)_t = (Bv,Lv) \leq -k(Bv,Bv) \leq -k\delta^{-1}(Bv,\alpha Bv)$. Hence $(Bv,\alpha Bv)$ decays exponentially or $BW_t \to o$ and hence $Lw \to f$, $Nw = g$ which implies $w \to u$. Applications to a variety of problems including mixed equations.

JOHANNES C. C. NITSCHE: Über die Regularität der Spur beim halbfreien Randwertproblem der Minimalflächen

Gegenstand des Vortrages ist das halbfreie Randwertproblem einer über dem Halbkreis $P = \{u,v; u^2 + v^2 < 1,\ v > o\}$ definierten Fläche $\phi = \phi(u,v)$ minimalen Dirichletschen Integrals (und, wie man auch weiß, minimalen Flächeninhaltes). Der auf einer vorgegebenen Stützfläche T aufsitzende freie Rand, die Spur, entspricht dem Durchmesser $\{u,v; |n| < 1,\ v = o\}$. Die Spur ist lokal Hölderstetig, wenn T eine Bogen-Sehnen-Bedingung erfüllt (insbes. wenn T konvex ist oder zur Klasse C^1 gehört). Weiterhin ist bekannt, daß die Spur bei einer Stützfläche der Klasse $C^{m,\alpha}$ $(m \geq 3,\ o < \alpha < 1)$ selbst lokal zu $C^{m,\alpha}$ gehört. Es wird nun bewiesen, daß bei der zweiten Aussage auch der Fall $m = 2$ zugelassen werden kann. Zum Nachweis dafür wird unter Heranziehung einer geeigneten Vergleichsfläche zunächst eine "Anfangsregularität" sichergestellt: Für $T \in C^2$ und jedes r, $o < r < 1$, gilt $\mathfrak{X}(u,v) \in C^{o,1}(\bar{P}_r)$. Dabei ist $P_r = \{u,v; u^2 + v^2 < r^2,\ v > o\}$. Daher kann die Transversalitätsbedingung in ihrer starken Form verwendet werden. Der behauptete Satz - und höhere Regularität - folgen nun mit Hilfe der zum Beweis des "Kelloggschen Satzes" für das Plateausche Problem entwickelten Methoden (Bemerkung: Für $T \in C^2$ gilt bereits $\mathfrak{X}(u,v) \in C^{1,\gamma}(\bar{P}_r)$ für jedes $\gamma < 1$.)

HARTMUT PECHER: Klassische Lösungen des Cauchyproblems semilinearer parabolischer Differentialgleichungen

Es werden nichtlineare Differentialgleichungen der Form $\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f(u)$ in $R^n \times [0,\infty)$ betrachtet. Dabei ist A ein positiv definiter elliptischer formal selbstadj. Differentialoperator 2m-ter Ordnung und f eine nichtlineare glatte Funktion, die nicht schneller als $|u|^\rho$ wächst, wobei $\rho < 1 + \frac{4m}{n-2m}$ für $n > 2m$ und $\rho < \infty$ für $n \leq 2m$, und deren Ableitungen polynomial wachsen.

Außerdem besitze f eine nichtpositive Stammfunktion. Unter diesen Voraussetzungen wird durch Betrachtung der zugehörigen Integralgleichung in $L^p(R^n)$ und unter Benutzung der Sobolevräume gebrochener Ordnung die globale klassische Lösbarkeit des Cauchyproblems für glatte Anfangswerte gezeigt.

PETER A. REJTO: On a theorem of Tichmarsh-Neumark-Walter concerning absolutely continuous operators.

Let the potential function p be real and twice continuously differentiable on $[o,\infty)$ and such that

$$\lim_{x\to\infty} p(x) \text{ exists in the extended sense, } \int \frac{dx}{|p^{\frac{1}{2}}(x)|} = \infty .$$

Suppose that there is a number λ in the open interval $(p(\infty),\infty)$ and a neighborhood of infinity, such that

$$\int_{\tilde{x}}^{\infty} \left| \frac{5}{16}\left(\frac{p'(x)}{p(x)-\lambda}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{p''(x)}{p(x)-\lambda} \right| \frac{dx}{|p(x)-\lambda|^{\frac{1}{2}}} < \infty$$

With the aid of such a potential and the boundary condition $f(0) = 0$ define the differential operator $L(p)f(x)=f''(x)+p(x)f(x)$, in the usual manner. A theorem of Walter (Math. Z. 129, (1972), 83-94) implies the following: The continuous part of the operator $L(p)$ is absolutely continuous. We give another proof of this theorem, in fact, we extend it to potentials of the form $p = p_1 + p_2$, where p_1 is short range in the sense that it is in $L_1(R_+)$, and p_2 satisfies the above condition. Specifically, with the aid of the JWKB approximation method we derive it from an abstract criterion formulated elsewhere (Some absolutely continuous operators, in Physical Reality and Mathematical Description, Enz/Mehra eds. 202-225 D. Reidel, 1974).

M. SCHNEIDER: Über Differentialgleichungen vom gemischten Typ im R^3

In $G \subset R^3$ werden Differentialgleichungen vom gemischten Typ der Gestalt

$$(1) \quad L[u] := (A^{ik} u_{x_i})_{x_k} + B^i u_{x_i} + Ru = f$$

untersucht. Nach Formulierung einiger spezieller Probleme (z. B.: $A^{11} = A^{22} = k(x_3)$, $A^{33} = 1$, Frankl-Morawetz-Problem im R^3) werden a-priori Abschätzungen für (1) hergeleitet. Hierzu wird mit

$$d_n u = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{irl}\, A^{ik}\, u_{x_k} [dx^r, dx^l]\ , \quad \theta = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{irl}\, B^i [dx^r, dx^l]$$

$$\tilde{R} = R - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial B^i}{\partial x^i}$$

(1) in Pfaffscher Form

$$L[u]\ [dx^1, dx^2, dx^3] = [d, d_n u] + [d, u\theta] + \tilde{R}\, u\, [dx^1, dx^2, dx^3]$$

geschrieben und eine spezielle Pfaffsche Form zweiten Grades

$$\Omega = 2(\alpha^o u + \alpha^i u_{x_i})\, d_n u + (Ru^2 - A^{ii} u_{x_i}^2)\, w_2 - u^2 d_n \alpha^o + \alpha^o u^2 w$$

mit $w_2 = \alpha^1 [dx^2, dx^3] - \alpha^2 [dx^1, dx^3] + \alpha^3 [dx^1, dx^2]$, $w = B^1 [dx^2, dx^3] \ldots$

untersucht.

HERMANN SOHR: Singuläre Störungen selbstadjungierter Operatoren

Das Kriterium von Rellich und Kato über die Selbstadjungiertheit einer Summe A + B selbstadjungierter Operatoren A und B wird auf eine Klasse nicht relativ zu A beschränkter Operator-Störungen B erweitert. Es braucht also dann nicht mehr $D(A) \subseteq D(B)$ zu gelten. Damit wird gezeigt, daß die Summe $-\bar{\Delta} + \bar{V}$ der Abschließungen von $-\Delta$ und dem Potential V auf C_0^∞ ein selbstadjungierter Operator ist, wenn folgendes gilt: $V \in C^o$, $\exists\, r > o$: $V(x) > o$ für $|x| \geq r$ und $\sup_{|x| \geq r} \Delta \frac{1}{V(x)} < 1$. Diese Bedingung ist für den harmonischen Ossillator ($V(x) = |x|^2$) erfüllt sowie für alle Potentiale der Form $V(x) = |x|^\alpha$ mit $\alpha > o$.

EMANUEL SPERNER: Zur Regularitätstheorie gewisser Systeme nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen

Es wird die einmalige hölderstetige Differenzierbarkeit beschränkter schwacher Lösungen von inhomogenen Systemen nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen gezeigt, deren Hauptteil in eine Summe

$$A_{ij}(x) \cdot \delta^{hk} + B_{ij}^{hk}(x,u,p)$$

zerfällt, wo B_{ij}^{hk} in genau bestimmter Weise beschränkt sein muß. Der Vektor $f^h = f^h(x,u,p)$ darf quadratisch in p wachsen:

$$||f(x,u,p)|| \leq a \cdot p^2 + b \;;\; a,b \geq o,$$

wenn $a < \lambda/(2\cdot||u||_{L_\infty})$, wo $\lambda > o$ eine untere Schranke für die Eigenwerte der $(A_{ij}(x))$ ist.

V. VOGELSANG: Das Ausstrahlungsproblem für elliptische Differentialgleichungen in Gebieten mit unbeschränktem Rand

Wir beweisen mit der Methode der Grenzabsorption die Existenz und Eindeutigkeit von "Strahlungslösungen" $(1+r)^{-1/2-\varepsilon}\, u \in \mathring{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)\,(\varepsilon > o)$ mit $D^\alpha(e^{-is}u) \in L^2(\Omega)$, $1 \leq |\alpha| \leq m$, der Gl. $(A-k)\,u = f$, $(1+r)\,f \in L^2(\Omega)$, über die entscheidende A-priori-Abschätzung

$$\sum_{1\leq|\alpha|\leq m} ||D^\alpha(e^{-is}u)||_{o,\Omega} + ||(1+r)^{-1/2-\varepsilon}\, u||_{2m,\Omega} \leq c||(1+r)(A-k-i\lambda)u||_{o,\Omega}.$$

Dabei ist $A = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} D^\alpha\, a_{\alpha\beta}(x) D^\beta$ ellipt., symmetr. mit asymptot. konst. Koeff. $a_{\alpha\beta}(x) - \mathring{a}_{\alpha\beta} = o(|x|^{-1})$ und Ω ein Gebiet mit unbeschränktem Rand, auf dem die Normalenbedingung $x \cdot \nu(x) \leq c_o|x|^{-1}, |x| \to \infty$, erfüllt ist, sowie $s(x) = \sigma(\frac{x}{|x|}) \cdot x$, σ die Umkehrabb. von $\sigma \in N \to \nu(\sigma) \in S_1^{n-1}$, $\sigma\cdot\nu(\sigma) > o$, wobei N die reelle Nullstellenfläche $\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \zeta^\alpha\, \mathring{a}_{\alpha\beta}\zeta^\beta - k = o$ ist, die gewisse Konvexitätsbedingungen erfüllt. Außerdem zeigen wir über die Abschätzung $||u||_{m,\Omega} \leq c||(1+r)(A-k)u||_{o,\Omega}$ für alle $u \in \mathring{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$, daß A in (k_o,∞) $k_o \geq o$ geeignet, keine Punkteigenwerte besitzt und Lösungen $(1+r)^{-1}\, u \in \mathring{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ existieren (unter schwächeren Bedingungen an A).

WOLF VON WAHL: Semilineare partielle Differentialgleichungen

Wir beschäftigen uns mit der Existenz regulärer Lösungen im Großen, d. h. für alle Zeiten, des Rand-Anfangswertproblems für

$u_t + A(t)u + f(u) = o$ (parabolischer Fall),

$u_{tt} + A(t)u + f(u) = o$ (hyperbolischer Fall oder Wellengleichung).

Unter geeigneten Wachstums- und Positivitätsbedingungen an f gelingt der Nachweis der Existenz globaler regulärer Lösungen, die vorgeschriebene Rand- und Anfangswerte annehmen. Im Falle der Wellengleichung benötigt man noch eine Dimensionseinschränkung. Auch für semilineare elliptische Gleichungen

$$Au + f(u) = o$$

läßt sich ein ähnliches Resultat beweisen.

W. WALTER: Periodische Lösungen parabolischer Differentialgleichungen

Es werden für in t periodische Lösungen der nichtlinearen bzw. quasilinearen parabolischen DGl

$$u_t = f(t,x,u,u_x,u_{xx})$$

bzw. $$u_t = a(t,x,u,u_x)u_{xx} + b(t,x,u,u_x)$$

in einer Raumdimension a-priori Abschätzungen für u, u_x und u_t abgeleitet. Darauf läßt sich eine Existenztheorie aufbauen.

Dies sind Resultate einer gemeinsam mit Robert E. Gaines verfaßten Arbeit.

JOACHIM WEIDMANN: Konrad Jörgens und seine Arbeiten zur Störungstheorie

H. F. WEINBERGER: Invariante Mengen bei parabolischen und elliptischen Systemen

Eine Menge $S \subset R^m$ heißt invariante Menge für das parabolische System

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} = f^\alpha(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}) \quad \alpha = 1,\ldots,m$$

wenn aus den Bedingungen $u \in S$ auf $D \times \{o\}$ und $\partial D \times [o,T]$ für irgendein Gebiet $D \subset R^n$ folgt, daß $u \in S$ in $D \times (o,T]$.

Man nimmt an, daß die a_{ij} und f^α so glatt sind, daß das Anfangs-Randwertproblem immer eine eindeutige Lösung hat. Es wird gezeigt, daß S invariante Menge ist, wenn sie konvex und geschlossen ist und wenn an jedem Punkte u^* der Grenze ∂S von S die Ungleichung

$$n \cdot f(x,t,u^*,V) - \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} K_{\alpha\beta}(u^*)\, a_{ij}(x,t)\, V_i^\alpha V_j^\beta \leq o$$

(n äußerer normale zu ∂S mit $|n| = 1$ und $K_{\alpha\beta}$ die Krümmungsform von ∂S) für alle (x,t) in $D \times (o,T]$ und alle Matrizen V_i^α mit $\sum n_\alpha V_i^\alpha = o$ gültig ist.

Es wird ferner gezeigt, daß unter denselben Bedingungen, wenn $u \in S$ in $D \times [o,t_1]$ und $u(x_1,t_1) \in \partial S$, gilt: $u \in \partial S$ in $D \times [o,t_1]$.

Unter den obigen Bedingungen wird auch gezeigt, daß S invariante Menge für das elliptische System

$$-\sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} = f^\alpha(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})$$

ist in dem Sinne, daß wenn $u \in S$ auf ∂D, dann ist auch $u \in S$ in D.

Man muß hier verlangen, daß das Randwertproblem eindeutig lösbar ist.

WOLFGANG WENDLAND: Verallgemeinerte hyperanalytische Funktionen

R. P. Gilbert und der Vortragende haben elliptische lineare Systeme erster Ordnung für Re U^j, Im U^j, $j = o, r-1$ untersucht, die eine Normalform

$$(1) \qquad U^j_{\bar z} + \alpha U^{j-1}_z + \sum_{k=o}^{r-1} A_{jk} U^k + B_{jk} \bar U^k = F^j, \quad (U^{-1} \equiv o)$$

haben. A. Douglis hat für solche Systeme die Funktionentheorie der hyperanalytischen Funktionen eingeführt. Verwendet man diese Funktionentheorie, so läßt sich die von I. N. Vekua behandelte Methode zur Darstellung und Erzeugung von Lösungen mittels analytischer Fortsetzungen und hyperbolischer linearer Systeme in C^2 auf obengenannte Systeme übertragen. Damit kann sowohl eine Konstruktion von Lösungssystemen angegeben werden als auch der Satz von Carleman für (1) bewiesen werden, falls α, A_{jk} und $B_{jk}(z,\zeta)$ analytisch in beiden Veränderlichen sind. Ein Beispiel für ein System (1) ist das Differentialgleichungssystem für die Spannungen in einem isotropen inhomogenen elastischen Körper mit 2-dimensionalem Spannungszustand.

K.-O. WIDMAN: Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order

We consider weak solutions $u \in H^1 \cap L^\infty(\Omega, R^N)$ of elliptic systems of second order

$$(*) \qquad -D_\alpha(a^{\alpha\beta}(x)D_\beta)u^1 = f^1(x,u,\nabla u),\ 1 = 1,2,\dots,N$$

and assume that

$$a^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega), \qquad a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geq \lambda|\xi|^2,\ \lambda > o,\ \forall\, x \in \Omega \subset R^n, \xi \in R^n.$$

$$|f(x,u,\nabla u)| \leq a|\nabla u|^2 + b\ ,\quad f = (f^1, f^2, \dots, f^N).$$

Theorem: If $n = 2$ and $a \sup_\Omega |u| < \lambda$ then $u \in c^\alpha$, $\alpha > o$.
$n > 2$ and $a \sup_\Omega |u| < \lambda/2$ then $u \in c^\alpha$, $\alpha > o$.

The results will appear shortly in Math. Z. (jointly with S. Hildebrandt).

Applications can be found in the theory of harmonic mappings between Riemannian manifolds (jointly with S. Hildebrandt and H. Kaul).

RAINER WÜST: Ausgezeichnete selbstadjungierte Fortsetzungen von Operatoren, konstruiert mit cut-off-Potentialen

Im Hilbertraum $H = (L^2(R^3))^4$ sei T_o der minimale Dirac-Operator des "freien Teilchens". Ist q ein Potential, $u := \sup_{x \in R^3 \setminus \{o\}} |xq(x)|$, so ist

$T := (T_o + q) \restriction D_o$ $(D_o := (C_o^\infty(R^3 \setminus \{o\}))^4$ für $\mu > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ i. a. nicht mehr wesentlich selbstadjungiert (und T für kein q halbbeschränkt). Für $\mu < 1$ läßt sich jedoch, falls q halbbeschränkt ist, über cut-off-Potentiale $\{q_t\}_{t \geq t_o}$ eine selbstadjungierte Fortsetzung T_g von T als ein geeigneter Grenzoperator der Operatoren $T_t := (T_o + q_t) \restriction D_o$ $(t \geq t_o)$ konstruieren. Wesentliche Beweismittel sind eine Abschätzung der Form

$$||(T_o + q)u|| \geq a \, ||u|| \quad (u \in D_o, \quad a > o \quad \text{geeignet})$$

("Lücke im Spektralkern") und ein abstrakter Konvergenzsatz. T_g ist unabhängig von der Schar $\{q_t\}$ (solange diese monoton und stetig in t ist) und als physikalisch ausgezeichnete Fortsetzung charakterisiert durch

$$D(T_g) = \{u | u \in D(T^*), \int \frac{|u(x)|^2}{|x|} dx < \infty\}.$$

Ferner ist $\sigma(T_g) \subset \{\lambda | \lambda \in R, |\lambda| \geq a\}$; es ist also, in Analogie zu der "Schranken erhaltenden" Friedrichsfortsetzung halbbeschränkter Operatoren, T_g eine "Lücken erhaltende" Fortsetzung von T.

W. Wendland (Darmstadt)