MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 12 /1975

Gewöhnliche Differentialgleichungen

16.3. - 22.3.1975

Die fünfte Tagung über gewöhnliche Differentialgleichungen fand bereits nach einer nur einjährigen Pause statt, da die Koppelung mit der Tagung für Regelungstheorie aufgegeben wurde und beabsichtigt ist, von nun an beide Tagungen im jährlichen Wechsel abzuhalten. Die Leitung hatten wieder H.-W. Knobloch (Würzburg) und R. Reißig (Bochum). Das (vor allem von ausländischer Seite) entgegengebrachte Interesse war diesmal so groß, daß nicht alle Teilnahmewünsche erfüllt werden konnten. Von den 38 Teilnehmern kamen 22 aus dem Ausland; 21 der insgesamt 32 Vorträge wurden von ausländischen Teilnehmern gehalten. Nach Umfang und Vielfalt bot das wissenschaftliche Programm, verglichen mit früheren Tagungen, einen Höhepunkt; jedoch ist dies weniger auf eine Aktivierung der Forschung in Deutschland als auf das Anwachsen der ausländischen Beteiligung zurückzuführen. Es wurde in Betracht gezogen, in das Programm der für 1977 geplanten nächsten Tagung auch Übersichtsvorträge über noch festzulegende aktuelle Problemkreise aufzunehmen. Trotz des unfreundlichen und wenig frühlinghaften Wetters nahm die Tagung einen recht harmonischen Verlauf; dies war nicht zuletzt darauf zurückzuführen, daß sich die räumlichen Verhältnisse im Mathematischen Forschungsinstitut durch die Inbetriebnahme des neuen Vortrags- und Bibliotheksgebäudes wesentlich gebessert haben. Für einen gemeinsamen Ausflug bot sich nach geduldigem Warten sogar noch ein sonniger Nachmittag. Zum Schluß herrschte der Eindruck vor, daß die Tagung den meisten Teilnehmern durch die Vorträge und die in großem oder kleinem Kreise geführten Diskussionen vielfältige Anregungen gebracht hat.

Teilnehmer

J. Albrecht (Clausthal-Zellerfeld)
J. Blaz (z.Zt. Karlsruhe)
F.J. Delvos (Siegen)
W. Eberhard (Marburg)
L.H. Erbe (z.Zt. Würzburg)
M. Essén (Stockholm)
W.N. Everitt (Dundee)
R. Gaines (z.Zt. Louvain-la-Neuve)
M. Giertz (Stockholm)
J.R. Graef (Mississippi)
P. Habets (Louvain-la-Neuve)
P. Hagedorn (Darmstadt)
W. Hahn (Bochum)
W. Hahn (Graz)
F. Kappel (Würzburg)
N.D. Kazarinoff (z.Zt. Oxford)
U. Kirchgraber (Zürich)
H.W. Knobloch (Würzburg)
V. Marić (Novi Sad)
J. Mawhin (Louvain-la-Neuve)
R. Rautmann (Paderborn)
L. Reich (Graz)
Frau G. Reißig (Bochum)
R. Reißig (Bochum)
J. Roels (Louvain-la-Neuve)
P. Sagirow (Stuttgart)
K. Schmitt (Salt Lake City)
J. Sprekels (Hamburg)
U. Staude (Mainz)
H. Stettner (Graz)
K. Szilárd (Budapest)
K. Taubert (Hamburg)
B. Textorius (Linköping)
Frau I. Troch (Wien)
P. Volkmann (Karlsruhe)
W. Walter (Karlsruhe)
H. Wimmer (z.Zt. Würzburg)
A. Zettl (z.Zt. Dundee)

Vortragsauszüge

J. BLAZ: Über die Nicoletti-Aufgabe für Funktional-Differentialgleichungen mit voreilendem Argument

Es seien $\Delta = \langle 0, +\infty)$, Φ die Menge aller stetigen Funktionen $\varphi: \Delta \to R^n$ und $\delta: \Delta \to \Delta$ stetig. Ist $x \in R^n$, so setzen wir $\|x\| = \max\,(|x_\nu|;\ 1 \leq \nu \leq n)$; wenn $\varphi \in \Phi$, $t \in \Delta$, so ist $|\varphi_\nu|^*_t = \sup\,(|\varphi_\nu(u)|;\ 0 \leq u \leq t)$, $\|\varphi\|^*_t = \max\,(|\varphi_\nu|^*_t;\ 1 \leq \nu \leq n)$ und $\{\varphi\}_t$ die Funktion $\{\varphi(s) \mid 0 \leq s \leq t\}$.
Gegeben sind: $F: \Delta \times \Phi \to \mathbb{R}^n$ (wobei der Wert $F(t,\varphi)$ nur abhängt von dem Verhalten der Funktion φ im Intervall $\langle 0, t+\delta(t)\rangle$), $\eta \in \mathbb{R}^n$ sowie Zahlen $t_1, \ldots, t_n$ und h, wobei $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq h$. Wir betrachten die Aufgabe

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi'(t) = F(t, \{\varphi\}_{t+\delta(t)}), & t \in \Delta \\ N\varphi = \eta \end{cases}$$

mit

$$(2) \qquad N\varphi = (\varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_n(t_n)) .$$

Für die Menge aller Funktionen $\varphi \in \Phi$, die der Ungleichung genügen

$$(3) \qquad \|\varphi\| = \sup\,\{\|\varphi\|^*_t \exp[-a\,\Phi(t)];\ t \in \Delta\} < \infty$$

($a > 0$, $\Phi(t)$ eine vorgegebene stetige Funktion) wird E geschrieben. Unter entsprechenden Voraussetzungen beweist man die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Aufgabe (1) in der Klasse E.

F.J. DELVOS: Greensche Funktionen und optimale Interpolation

Es sei $L = \sum_{i=0}^{n} p_i D^i$ ein Differentialoperator mit $p_o, \ldots, p_n \in C^n[a,b]$ und $p_n(x) \neq 0$ für $x \in [a,b]$. Ferner gelte für die Randbedingungen

$$U_i\, u = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} D^j u(a) + \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij} D^j u(b) \quad (i = 1,\ldots,n)$$

die Beziehung: $L\,u = 0$, $U_i\,u = 0$ $(i = 1,\ldots,n) \Rightarrow u = 0$.

Es seien $U_{n+1},\ldots,U_m$ $(m \geq n)$ weitere stetige lineare Funktionale auf dem Sobolev-Raum $W_2^n[a,b]$, so daß die Funktionale $U_1,\ldots,U_n, U_{n+1},\ldots,U_m$ linear unabhängig sind.

<u>Satz</u> (Optimale Interpolation). Zu $(y_1,\dots,y_m) \in \mathbb{C}^m$ existiert genau eine Funktion $s \in W_2^n[a,b]$ mit

$$\int_a^b |L\, s(x)|^2\, dx = \min_{U_i u = y_i} \int_a^b |L\, u(x)|^2\, dx . -$$

Es wird eine Methode zur Konstruktion von s mittels der Greenschen Funktion des Operators $L^* L$ mit geeigneten Randbedingungen dargestellt.

W. EBERHARD: <u>Irreguläre Eigenwertprobleme</u>

Es wird das Eigenwertproblem $(M - \lambda N)\, y = 0$ über dem Intervall $[0,1]$ betrachtet. M , N seien lineare gewöhnliche Differentialoperatoren der Ordnung n , p $(n \geq p-1)$. Die Randbedingungen $U_j(y)$ $(j = 1,\dots,n)$ seien zerfallend, wobei sich m Bedingungen auf den Randpunkt 0 und n-m Bedingungen auf den Randpunkt 1 beziehen. Sie heißen irregulär, falls $m > \frac{n+p}{2}$ gilt. Die betreffende Klasse von nichtausgearteten Problemen besitzt reines nicht-leeres Punktspektrum mit dem einzigen Häufungspunkt ∞. Die Greensche Funktion $G(x,\xi,\lambda)$ wächst jedoch für $0 \leq \xi < x \leq 1$ exponentiell für $|\lambda| \to \infty$. Dies hat starken Einfluß auf die Entwicklungssätze, für die die bekannten Sätze aus der Theorie der Sturm-Liouvilleschen Probleme nicht mehr gelten. Vielmehr sind Holomorphieeigenschaften notwendig, damit die Entwicklungen gleichmäßig in $[0,1]$ konvergieren. Diese Bedingungen erweisen sich für eine engere Klasse von irregulären Eigenwertproblemen als hinreichend für die Entwickelbarkeit einer vorgegebenen Funktion. Mit Hilfe des Satzes von Müntz kann gezeigt werden, daß das System der Eigenfunktionen in $L^2(0,1)$ abgeschlossen ist.

L.H. ERBE: <u>On existence and nonexistence of oscillatory solutions to nonlinear differential equations</u>

A very general change of variable technique is introduced to study solutions of second order nonlinear differential equations including the generalized Emden-Fowler equation $y'' + p(x)\, y^{\gamma} = 0$ $(0 < \gamma \neq 1)$. This allows a geometric description of certain regions in the (t,y)-plane related to the oscillatory or non-oscillatory character of solutions. This, in conjunction with appropriate energy functions and monotonicity conditions, yields sufficient conditions for the existence and non-existence of oscillatory solutions. In the special case $x = e^t$, $y = e^{t/2}u(t)$ we give a sufficient condition for the coexistence of oscillatory solutions and nonoscillatory solutions with zeros: $x^{(\gamma+3)/2}p(x)\downarrow\ \geq k > 0$, $\gamma > 1$, and $\neq$ const. $\Rightarrow\ \exists$ oscillatory solutions and nonoscillatory solutions with zeros.

M. ESSÉN: The Schwarzian derivative and estimates of functions analytic in the unit disc

Let w be analytic in the open unit disc Δ in the z-plane. The Schwarzian derivative is defined by $\{w,z\} = (w''(z)/w'(z))' - \frac{1}{2}(w''(z)/w'(z))^2$. Let $F = F(p)$ denote the class of functions w which are analytic in Δ and satisfy the conditions $|\{w,z\}| \leq 2\,p(|z|)$, $w(z) = z + a_2z^2 + \ldots$. For certain choices of the increasing function p, it is known that the functions in F(p) are univalent in Δ (Nehari).

Problem: Determine upper and lower bounds, depending only on r, for $|w(r\,e^{i\theta})|$ if $w \in F$. Determine $\sup\limits_{w \in F} |a_2|$.

Let $\{w,z\} = 2\,P(z)$. Introducing the function $u = (w')^{-1/2}$, we obtain the equation $u'' + P\,u = 0$, $u(0) = 1$. Let v_1 and v_2 be solutions on the real axis of the equation $v'' - p\,v = 0$, where $v_1(0) = 1$, $v_1'(0) = 0$, $v_2(0) = 0$, $v_2'(0) = 1$. We choose γ so that $v(x) = (v_1 + \gamma\,v_2)(x) \to 0$, $x \to -1$.

Theorem: $v(-r) \leq |u(r\,e^{i\theta})| \leq v(r)$, $0 < r < 1$. If $w_0(r) = \int_0^r v(t)^{-2}\,dt$, then $w \in F \Rightarrow \sup\limits_{\theta} |w(r\,e^{i\theta})| \leq w_0(-r)$. If furthermore $w(z) \neq 0$, $0 < |z| < 1$, then $\inf\limits_{\theta} |w(r\,e^{i\theta})| \geq w_0(r)$, $0 < r < 1$. $\sup\limits_{F} |a_2| \leq \gamma$.

For certain choices of p, w_0 can be extended to Δ and w_0 will be extremal in F(p) for the inequalities considered here. This is in particular true when F(p) consists of univalent functions.

W.N. EVERITT: Some integral inequalities and connected ordinary differential equations

Let the coefficients p and q be real-valued on the interval $[a,b)$ of the real line, with $-\infty < a < b \leq +\infty$; let $p > 0$ on $[a,b)$; let M denote the symmetric differential expression

$M[f] = -(p\,f')' - q\,f$ on $[a,b)$ $\quad (' = d/dx)$;
let M be regular on $[a,b)$ but singular and strong limit-point at b. The integral inequalities are of the form

$$\left(\int_a^b \{p|f'|^2 + q|f|^2\}\right)^2 \leqq K(p,q)\int_a^b |f|^2 \int_a^b |M[f]|^2 \qquad (*)$$

where $0 < K(p,q) \leqq \infty$ depends on the coefficients p and q but not on the functions f for which f and $M[f]$ are in $L^2(a,b)$. The determination of the best possible $K(p,q)$ for which $(*)$ is valid depends on the spectral properties of the ordinary boundary value problems
$M[y] = \lambda\, y$ on $[a,b)$, $y \in L^2(a,b)$ and either $y(a) = 0$ or $y'(a) = 0$.

R. GAINES: Convex-Concave Hamiltonian Systems

Systems of the form

$$(H) \qquad \dot K \in H_Q(t,K,Q)\ ,\quad \dot Q \in -H_K(t,K,Q)$$

are considered where $H: [0,+\infty) \times R^n \times R^n \longrightarrow R^n$, H is convex in Q, concave in K, and $(H_Q, -H_K)$ are multivalued subgradient. Boundary value problems for various subclasses of (H) which arise in economic growth theory are studied using Leray-Schauder degree for multi-functions and Ważewski funnel techniques of Bebernes and Schuur for generalized differential equations. In particular, the problem of optimal growth with positive discounting

$$(H_\varrho) \qquad \dot K \in H_Q(K,Q)\ ,\quad \dot Q \in -H_K(K,Q) + \varrho\, Q$$

$$K(0) = K_o\ ,\quad \lim_{t\to+\infty} e^{-\varrho t} K(t)\, Q(t) = 0$$

is treated.

M. GIERTZ: Deficiency indices associated with powers of formally symmetric differential expressions

Let L be a formally symmetric differential expression (f.s.d.e.) with real coefficients and of order 2 n, acting on sufficiently differentiable complex-valued functions on $[0,\infty)$. The deficiency indices of the closed minimal operator generated by L in $L_2(0,\infty)$ are then both equal to a number r_1 which we refer to as the index of L. Assume L^m exists as a d.e. on $[0,\infty)$ for some $m > 1$. Then each L^k $(k = 0,1,\ldots,m)$ is a f.s.d.e. of order 2 k n with index r_k satisfying $k\,n \leqq r_k \leqq 2\,k\,n$; here $L^o = I$ and $L^1 =$

L. We call $(r_k)_0^m$ the <u>index sequence</u> of L.

<u>Theorem</u>. A sequence $(r_k)_0^m$ of integers is an index sequence of some f.s.d.e. of order 2 n $\Longleftrightarrow$ $n\,k \leq r_k \leq 2\,n\,k$ and $(r_k - r_{k-1})_1^m$ is non-decreasing ($\Longrightarrow$ Kauffman, $\Longleftarrow$ Read). -

Concerning the determination of the index sequence for a given L we have the following information:

(A) for any n

(1) $r_m = m\,r_1 \Longleftrightarrow f \in L_2,\ L^m f \in L_2 \Longrightarrow L^k f \in L_2\ (k = 1,\dots,m-1)$
(Everitt-Giertz, Zettl)

(B) for n = 1 and $L\,y = -(p\,y')' + q\,y$

(2) $r_m = m$ if $p = 1$ and $\int^{\infty} |q + k| < \infty$ for some number k
(Everitt-Giertz)

(3) $r_m = m$ if, for some $k > 0$, $0 < K < [n(n-1)]^{-1/2}$, $q + k > 0$ and $\log p(x) \leq K \int_0^x \{(q+k)/p\}^{1/2}$ on a set of infinite measure
(Read)

(4) $r_1 = 1$ and $r_2 = 2$ if, for some k, K, $x_0 \in (0,\infty)$ and $\alpha \in (-\infty, 2]$, $0 < p(x) < K\,x^{\alpha}$, $q(x) > -k\,x^{2-\alpha}$ $(x \in (x_0,\infty))$
(Everitt-Giertz).

Further generalisations of (1) and (2) have been obtained by Zettl. The result (3) includes and generalises previous results containing the condition q bounded below. In (4) $\alpha = 0$ gives the classical limit-point condition $0 < p \leq K$, $q(x) > -k\,x^2$ on $[x_0,\infty)$ for L. It is known that $r_1 = 2$ when $q(x) = -x^{2+\varepsilon}$ for any $\varepsilon > 0$, and $p = 1$. There are examples with $p = 1$ and $q(x) \geq -x^{2+\varepsilon}$, for any given $\varepsilon > 0$, where $r_1 = 1$ and $r_2 = 3$.

J.R. GRAEF: <u>Some boundedness results for second order nonautonomous nonlinear differential equations</u>

Consider the equation

$(a(t)\,x')' + h(t,x,x') + q(t)\,f(x)\,g(x') = e(t,x,x')$ $\quad(*)$

where a, q: $[t_0,\infty) \to \mathbb{R}$, f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, and h, e: $[t_0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are continuous, $a(t) > 0$, $q(t) > 0$, and $g(x') > 0$. Three theorems giving sufficient conditions for all solutions of (*) to be bounded are given. Let $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$, $G(y) = \int_0^y s/g(s)\,ds$.

<u>Theorem 1.</u> Suppose that there are nonnegative continuous functions r_1, r_2, w: $[t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ such that $|e(t,x,y)| \leq r_1(t) + r_2(t)\,|y|$ (1), $-w(t)y^2 \leq y\,h(t,x,y)$ (2), there are positive constants M and k such that

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$y^2/g(y) \leq M\, G(y)$ for $|y| \geq k$, (3)

$\int_{t_o}^{\infty} (a'(s)/a(s))\, ds < \infty$ and $a(t) \leq a_2$, (4)

$\int_{t_o}^{\infty} (q'(s)/q(s))\, ds < \infty$,

$g(y) \geq c > 0$,

$\int_{t_o}^{\infty} w(s)\, ds < \infty$, $\int_{t_o}^{\infty} r_2(s)\, ds < \infty$, $\int_{t_o}^{\infty} r_1(s)/(q(s))^{1/2}\, ds < \infty$.

If $F(x) \to \infty$ as $|x| \to \infty$, then all solutions of (*) are bounded.-

<u>Theorem 2.</u> Suppose conditions (2)-(4) hold, there is a continuous function $r: [t_o,\infty) \to \mathbb{R}$ and a constant $d > 0$ such that

$|e(t,x,y)\, y| \leq q(t)\, g(y) / r^d(t)$,

$\int_{t_o}^{\infty} \left(r'(s)/r(s)\right) ds < \infty$, $\int_{t_o}^{\infty} \left(1/r^d(s)\right) ds < \infty$,

$H(t) = r(t)/q(t)$ is bounded.,

$\int_{t_o}^{\infty} \left(H'(s)/H(s)\right) ds < \infty$, $\int_{t_o}^{\infty} w(s)\, ds < \infty$.

If $F(x) \to \infty$ as $|x| \to \infty$, then all solutions of (*) are bounded.-

<u>Theorem 3.</u> Suppose $g(y) = 1$, conditions (1) and (2) hold,

$\int_{t_o}^{\infty} \left((a(s)q(s))'/(a(s)q(s))\right) ds < \infty$, $\int_{t_o}^{\infty} \left(r_1(s)/(q(s))^{1/2}\right) ds < \infty$,

$\int_{t_o}^{\infty} \left(r_1(s)/(q(s))^{1/2} a(s)\right) ds < \infty$, $\int_{t_o}^{\infty} \left(r_2(s)/a(s)\right) ds < \infty$,

and $\int_{t_o}^{\infty} \left(w(s)/a(s)\right) ds < \infty$.

If $F(x) \to \infty$ as $|x| \to \infty$, then all solutions of (*) are bounded.-

Of significance in these results is the fact that we have allowed for negative damping as well as large forcing terms $e(t,x,x')$.

J.R. GRAEF: <u>An oscillation and comparison theorem for a nonlinear differential equation</u>

Consider the equations

$(a(t)\, x')' + q(t)\, x = 0$ (*)

and

$(a(t)\, y')' + q(t)\, f(y) = r(t,y)$ (**)

where $a, q: [t_o,\infty) \to \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, and $r: [t_o,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous and $a(t) > 0$. Assume that

$y\, f(y) \geq 0$ for all y, $f(y) \not\equiv 0$ on any interval,

$(y\, f(y))'^2 \leq 4\, y\, f(y)$ for all y, and $r(t,y)\, y > 0$ if $y \neq 0$.

<u>Theorem.</u> If $y(t)$ is a solution of (**) with consecutive zeros at $t = t_1$ and $t = t_2$, then every solution of (*) must vanish on $[t_1,t_2]$.-

<u>Corollary 1.</u> If there is a solution $x(t)$ of (*) with no zeros

on the interval $[t_1,t_2]$, then no solution of (**) has more than one zero on $[t_1,t_2]$. –

Corollary 2. If (*) is nonoscillatory, then (**) is nonoscillatory. –

Corollary 3. If (**) has an oscillatory solution, then (*) is oscillatory. –

P. HABETS: Singular perturbations of a boundary value problem

Consider the boundary value problem

$$(t+\varepsilon)\ddot{x} = f(t,x,\dot{x},\varepsilon) \; ; \quad x(0) = \alpha(\varepsilon) \; , \; x(1) = \beta(\varepsilon) \qquad (*)$$

where $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon \in \,]0,E]$. Suppose a formal approximation $x_0(t,\varepsilon)$ of the solution $x_\varepsilon(t,\varepsilon)$ of the boundary value problem (*) has been obtained by heuristic or physical arguments. This approximation will be justified by proving that, under appropriate assumptions,

$$x_\varepsilon(t,\varepsilon) - x_0(t,\varepsilon) = O(\varepsilon \ln \varepsilon) \; , \; \dot{x}_\varepsilon(t,\varepsilon) - \dot{x}_0(t,\varepsilon) = O\left(\frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{t+\varepsilon}\right) .$$

These estimations are obtained using an adequate study of the corresponding linear problem and Schauder's fixed point theorem.

W. HAHN (Bochum): Asymptotisches Verhalten von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen in einem Banach-Raum

Im Banach-Raum X wird das folgende Anfangswertproblem betrachtet:

$$\frac{du}{dt} = A\,u + F_1(t,u) + F_2(t,u) \; , \; u(0) = u_0 \; ; \; t \geq 0 .$$

Der Operator $A: X \supset D(A) \to X$ sei nicht-linear und unbeschränkt; die Abbildungen F_1 und F_2 seien in $[0,\infty) \times G$ definiert ($G \subset X$ offen). Unter einer Lösung des Problems versteht man eine absolut stetige, f.ü. differenzierbare Funktion $u(t) \in D(A) \cap G$. Mit $[\cdot,\cdot]$ sei das Semi-Skalarprodukt in X bezeichnet. Für $u \in D(A)$ gelte $[A\,u\,,\,u] \leq -\beta \|u\|^2$ $(\beta > 0)$. Ist $\|u\| < a$, so sei $[F_1(t,u), u] \leq \alpha \|u\|^2$ $(\alpha < \beta)$. Ferner gelte für $\|u\| < \varrho$: $[F_2(t,u),u] \leq \gamma(t)\,\|u\|$. Gilt entweder $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$ oder

$$\int_0^\infty \gamma(t)\,dt < \infty \text{ sowie}$$

$$\int_0^t \exp(-2(\beta-\alpha)(t-s))\,\gamma(s)\,ds \leq M \; , \; 2M < b = \min(a,\varrho) \; ,$$

so sind die folgenden Aussagen richtig:

1. Wählt man zu $\varepsilon \in (2M,b)$ die Schranke $\delta = (\varepsilon^2 - 2\varepsilon M)^{1/2}$, so folgt aus $\|u_0\| < \delta$ für $t \geq 0$: $\|u(t)\| < \varepsilon$.
2. Ist $\|u_0\| < (b^2 - 2bM)^{1/2}$, so gilt $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0$.

W. HAHN (Graz): Orthogonalpolynome und Polynomketten mit Differentialgleichung

"Kettenpolynome" $p_n(x)$ genügen einer Rekursionsformel
$p_n(x) = (x - a_n)\, p_{n-1}(x) - b_n\, p_{n-2}(x)$.
Sind die a_n reell und die b_n positiv, so handelt es sich um Orthogonalpolynome. Es werden diejenigen Ketten gekennzeichnet, deren Polynome einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen:
$r(x)\, r_n(x)\, p_n''(x) + s_n(x)\, p_n'(x) + t_n(x)\, p_n(x) = 0$,
wobei die Koeffizienten Polynome beschränkten Grades sind. Es wird ein System von Differenzengleichungen zweiter bzw. dritter Ordnung für die Größen a_n, b_n und die Koeffizienten des Polynoms $r_n(x)$ abgeleitet. Durch diese Größen sind dann auch $s_n(x)$ und $t_n(x)$ bestimmt. Man kann Polynomketten konstruieren, bei denen der Grad von $r_n(x)$ beliebig groß ist.

F. KAPPEL: Lineare Funktional-Differentialgleichungen mit Dimensionsdefekt

Man betrachtet lineare Differenzen-Differentialgleichungen der Form (*) $\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} B_j\, x(t - j h)$, $h > 0$, B_j konstante $n{\times}n$-Matrizen. Gleichung (*) heißt entartet bezüglich $q \in \mathbb{R}^n$ $(q \neq 0)$ zum Zeitpunkt $t_1 > 0$, wenn $q^* x(t;\varphi) = 0$ für $t \geq t_1$, $\varphi \in C([-mh, 0],\mathbb{R}^n)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $q^*\Delta^{-1}(\lambda)$, $\Delta(\lambda) = \lambda I - \sum_{j=0}^{m} e^{-j\lambda h} B_j$, eine ganze Funktion ist. Eine notwendige Bedingung für Entartung ist, daß $p(\lambda,\mu) = \det(\lambda I - \sum_{j=0}^{m} \mu^j B_j)$ $= q_1(\lambda,\mu)\, q_2(\lambda)$, $q_2 \neq 1$, ist. Hierbei ist $\mu = e^{-\lambda h}$ gesetzt. Diese Aufspaltung des charakteristischen Exponentialpolynoms gibt Anlaß zu folgender Fragestellung. Es sei $p(\lambda,\mu) = p_1(\lambda,\mu)\cdot p_2(\lambda,\mu)$ mit relativ primen Polynomen $p_1, p_2 \neq 1$. Auf welche Gestalt kann Gleichung (*) gebracht werden? Es gilt der Satz: Es existiert eine unimodulare Matrix $S(\mu)$, die das gegebene System (*) in Blockdreiecksgestalt transformiert. Auf die Anwendung dieses Sachverhaltes auf Funktional-Differentialgleichungen vom Typ (*) mit Entartung wird eingegangen.

N.D. KAZARINOFF: An applicable Hopf bifurcation formula and periodic solutions of the Field-Noyes model and a two-cell Turing model

A general formula for the direction of bifurcation for the following class of systems is derived: $\dot{X} = A(\mu)\, X + \hat{F}(X,\mu)$,

where $X = (x_1,\dots,x_n)$, $\hat{F}$ is a real analytic function on $G \times (-c,c)$ with $\hat{F}(0,\mu) = 0$ and $\hat{F}_X(0,\mu) = 0$, G is an open, connected domain in $\mathbb{R}^n$, $c > 0$, and A is a real $n \times n$ analytic matrix defined on $(-c,c)$ with exactly two purely imaginary eigenvalues at $\mu = 0$ whose continuous extensions $\alpha(\mu)$, $\bar{\alpha}(\mu)$ satisfy the conditions: $\alpha(0) = -\bar{\alpha}(0)$, $\operatorname{Re}\alpha'(0) \neq 0$, $\operatorname{Im}\alpha(0) = w_o > 0$. This formula is applied to study existence and stability and instability of periodic solutions of the Field-Noyes model for the Belousov-Zaikin-Zhabotinskiĭ reaction:
$\dot{x}_1 = s(x_1+x_2-x_1x_2-qx_1{}^2)$, $\dot{x}_2 = s^{-1}(fx_3-x_2-x_1x_2)$, $\dot{x}_3 = w(x_1-x_3)$.
Here x_1, x_2, x_3 are proportional to the concentrations of $H\,Br\,O_2$, Br^-, and Ce(IV), respectively; and s, f, q, and w are positive parameters related to rate constants and the concentration of $Br\,O_3{}^-$ with $s \sim 10^2$, $f \sim 1$, $q \sim (10^{-6}, 10^{-5})$, $w \sim (10^{-3}, 1)$.
A 4×4 system corresponding to a 2-cell Turing model is similarly studied.

U. KIRCHGRABER: <u>Fehlerabschätzung bei gestörten Differentialgleichungssystemen</u>

Man betrachtet die folgenden Anfangswertprobleme:
(1) $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_o) = z$
(2) $\dot{y} = f(t,y) + g(t,y)$, $y(t_o) = z$;
die Lösungen werden mit $x(t,t_o,z)$ bzw. $y(t,t_o,z)$ bezeichnet. Die Funktionen f, g seien in einem gewissen Bereich stetig und bezüglich x Lipschitz-stetig. Das Stabilitätsverhalten der Lösungen von (1) sei insofern bekannt, als eine skalare Funktion ω existiert, mit der (3) $|x(t,t_o,z')-x(t,t_o,z'')| \leq \omega(t,t_o,z',z'')\cdot|z'-z''|$ gilt. Dann wird behauptet:

<u>Satz 1.</u> $|y(t)-x(t,t_o,z)| \leq \int_{t_o}^{t} \omega(t,s,y(s),y(s))\, |g(s,y(s))|\, ds$,
wobei $y(s) = y(s,t_o,z)$.—

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung der bekannten Formel von Alekseev. Als Anwendung sei folgendes Stabilitätsresultat erwähnt:

<u>Satz 2.</u> Es gelte $f(t,0) = g(t,0) = 0$, $g(t,y) = o(|y|)$ gleichförmig in t, $\omega(t,s,z',z'') \leq \omega(t,s)$, $\lim\limits_{t\to\infty}\omega(t,s) = 0$ gleichförmig über kompakten s-Intervallen, $\int_\tau^t \omega(t,s)\,ds \leq M \;\forall \tau, t$.
Dann ist die Nullösung von (2) asymptotisch stabil.—

Sodann behandelt man das Anfangswertproblem (4) $\dot{y} = F(t,y)$, $y(t_o) = z$ mit der Lösung $y(t,t_o,z)$. Sei $x(t,t_o,z)$, $x(t_o,t_o,z) = z$, eine Näherungslösung, die keiner Differentialgleichung zu genügen braucht. Um die "Güte" der Approximation zu bestimmen, werden folgende Funktionen eingeführt: (5) $K(t,s,y) = \frac{\partial x}{\partial t_o}(t,s,y) + \frac{\partial x}{\partial z}(t,s,y)\, \frac{\partial x}{\partial t}(s,s,y)$; $\Phi(t,s,y) = \frac{\partial x}{\partial z}(t,s,y)$; $g(s,y) = F(s,y) - \frac{\partial x}{\partial t}(s,s,y)$. Falls $x(t,t_o,z) = y(t,t_o,z)$, so gilt $K = 0$, $g = 0$.

Satz 3. $y(t)$ ist eine Lösung von (4) gdw.

$$y(t) - x(t,t_o,z) = \int_{t_o}^{t} \{\Phi(t,s,y(s))\, g(s,y(s)) + K(t,s,y(s))\}\, ds \text{ .-}$$

Satz 3. wird schließlich auf das Problem der asymptotischen Äquivalenz angewendet. Man setze $G(t,s,y) = \Phi(t,s,y)g(s,y) + K(t,s,y)$, $x(t) = x(t,t_o,z)$.

Satz 4. Es existiere ein ϱ, so daß $\int_t^T \sup_{|x(s)-y|<\varrho} |G(t,s,y)|\, ds \leqq J(T) < J$; $\lim_{T\to\infty} J(T) = J_o$; $|x(t,T,x(T))-x(t)| \leqq N(T) < N$; $\lim_{T\to\infty} N(T) = N_o$; $J + N < \varrho$. Dann existiert eine Funktion $y(t)$, die der Gleichung $\dot{y} = F(t,y)$ genügt, wobei $|x(t)-y(t)| < J_o+N_o \;\forall t \geqq 0$.-

H.W. KNOBLOCH: Lokale Kontrollierbarkeit bei nicht-linearen Differentialgleichungen

Betrachtet werden Kontrollsysteme, welche durch gewöhnliche Differentialgleichungen $\dot{x} = f(t,x,u)$ definiert werden. Die Kontrollvariable darf hierbei zu einer beliebigen Funktion (aus einer gewissen Klasse) mit Werten in einem vorgegebenen Kontrollbereich spezialisiert werden. Zugrundegelegt wird eine feste "reference trajectory" $x(t)$, welche zur Kontrollfunktion $u(t) \equiv 0$ gehört; es sei $0 \in \operatorname{int}(U)$. Gegenstand des Vortrages sind die verschiedenartigen bisher bekannten Kriterien für lokale Kontrollierbarkeit des Systems in einem Punkt der reference trajectory, sowie ihre Bedeutung für die Theorie der optimalen Steuerungen. Vorgestellt wird ein neuer Zugang zu diesem Problemkreis, welcher u.a. ein hinreichendes Kriterium für vollständige lokale Kontrollierbarkeit liefert; dieses geht im linearen Fall in das bekannte Kalman-Kriterium über.

V. MARIĆ: Properties of solutions of the equation $y'' = f(x)\varphi(y)$

Let $f(x)$ and $\varphi(y)$ be continuous and positive for $x > 0$, $y > 0$, and let $y(x)$ be any solution of the equation $y'' = f(x)\varphi(y)$ such that $y(x) \to 0$, $x \to \infty$. The following result is announced:

Theorem. Let, for some $0 \leqq \alpha \leqq 2-\varepsilon$, $x^{\alpha} f(x)$ be almost increasing and, for some $m \geqq 0$, let $x^{-m} f(x)$ be almost decreasing for x sufficiently large. Further let $y^{-1-\varepsilon}\varphi(y)$ be almost decreasing and, for some $n > 1+\varepsilon$, let $y^{-n}\varphi(y)$ be almost increasing for sufficiently small y.

Then, there exist two constants M_1, M_2 $(0 < M_1 < M_2)$ such that for sufficiently large x there holds

$$M_1 \, (x^2 f(x))^{-1} < \frac{\varphi(y(x))}{y(x)} < M_2 \, (x^2 f(x))^{-1} . -$$

The results are obtained in collaboration with M.Tomić (Beograd).

J. MAWHIN, Periodic perturbations of conservative systems

Let us first quote two underlying axioms for this work.

Axiom 1. No result is new.

Axiom 2. If the used methods are new, they should not!

The paper is motivated by the following result due to W.S.Loud:

Theorem 0. Let $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be C^1 and such that, for all $x \in \mathbb{R}$, $n^2 < q \leqq g'(x) \leqq p < (n+1)^2$ when $n \in \mathbb{N}$. Then, for each continuous, 2π-periodic $e: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, the equation $x'' + g(x) = e(t)$ has a unique 2π- periodic solution.

An abstract theorem is proved using only Banach contraction principle and basic properties of linear self-adjoint operators in Hilbert space.

Theorem 1. H being a (real) Hilbert space, let $L: \operatorname{dom} L \subset H \to H$ be linear and self-adjoint, and $N: H \to H$ having for each $x \in H$ a linear bounded Gateaux derivative $N'(x)$ which is symmetric. Assume there exist reals $\lambda < \mu$ such that $]\lambda, \mu[\subset \varrho(L)$; $\lambda, \mu \in \sigma(L)$ and reals p, q with $\lambda < q \leqq p < \mu$ such that for each $x \in H$ $qI \leqq N'(x) \leqq pI$ $(A \geqq B \iff A - B$ is semidefinite positive). Then $L - N$ is one-to-one, $(L-N)(\operatorname{dom} L) = H$ and $(L-N)^{-1}$ is globally Lipschitzian.

The extension due to Lazer and Sanchez, of Loud's theorem to a system of the form $x'' + \operatorname{grad} G(x) = e(t)$ is also a very special case of Theorem 1.

If in the above problem one uses Schauder's fixed point theorem, instead of Banach's principle, one can get the following

Theorem 2. Let $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be continuous and such that, for some $R > 0$, $n^2 < q \leqq \frac{g(x)}{x} \leqq p < (n+1)^2$ when $n \in \mathbb{N}$ and $|x| \geqq R$.

Then, for each continuous, 2π- periodic $e: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, the equation

$x'' + g(x) = e(t)$ has at least one 2π- solution.
This extends partially a result of Reissig which requires $0 < q \leq \frac{g(x)}{x} \leq p < 1$ but holds for the equation $x'' + f(x)\, x' + g(x) = e(t)$ with an arbitrary continuous $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

R. RAUTMANN: Zur Lösung parabolischer Randwertaufgaben mit Hilfe gewöhnlicher Anfangswertaufgaben

An einem praktisch wichtigen Beispiel wird gezeigt, wie sich parabolische Randwertaufgaben mit Methoden der gewöhnlichen Differentialgleichungen und -ungleichungen lösen lassen. Zunächst werden mit diesen Methoden Energieabschätzungen und Eindeutigkeitsaussagen für (im Fall von mehr als zwei Raumdimensionen hypothetische) klassische Lösungen der Navier-Stokesschen Randwertaufgabe hergeleitet. Die entsprechenden Aussagen gelten auch für die Lösungen einer schwachen Form dieser Aufgabe, die aus der Hopfschen Formulierung durch Einführung einer Mittelfunktion hervorgeht. Die eindeutig bestimmte Lösung läßt sich daher nach dem Verfahren von E.Hopf, das jetzt sogar konstruktiv wird, als Grenzwert der Lösungen einer Folge gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme berechnen.

(Vgl. E.Hopf, Math.Nachr.4(1951),213-231
J.Leray, Acta Math.63(1934),193-248
R.Rautmann, Intern.Ser.Num.Analysis 27, Basel 1974/75
J.Serrin, Nonlinear Problems (ed.R.E.Langer), Madison 1963,S.69-98.)

L. REICH: Analytische Iteration und Liesche Reihen

Es sei $F: x = {}^t(x_1,\ldots,x_n) \mapsto F(x) = A\,x + \mathcal{P}(x)$ - ord $\mathcal{P} \geq 2$, $\det A \neq 0$ - eine formal biholomorphe Abbildung (d.h. ein Automorphismus des Potenzreihenringes $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$). Wir behandeln das Problem: Wann gibt es ein formales autonomes Differentialsystem $\frac{dy}{dt} = B\,y + \mathcal{O}\!\!\!/(y)$ ($= G(y)$), dessen formales allgemeines Integral $y(t,x) = \sum_{|\nu|=1}^{\infty} \varphi_\nu(t)\, x^\nu$ zu den unbestimmten Anfangswerten x die Eigenschaft hat: $y(0,x) = 0$, $y(1,x) = F(x)$?
Äquivalent damit ist das Problem der Existenz einer einparametrigen Lieschen Gruppe (analytischen Iteration) $F(t,x) = A(t)\,x + \mathcal{P}(t,x)$ mit $F(0,x) = x$, $F(1,x) = F(x)$. Indem nun das Differentialsystem $\frac{dy}{dt} = G(y)$ unbestimmt angesetzt wird und das formale allgemeine Integral $y(t,x)$ mittels einer Lieschen Reihe möglichst explizit dargestellt wird, ergeben sich für die Lös-

barkeit obiger Aufgabe notwendige und hinreichende Bedingungen in der Form eines (im allgemeinen) unendlichen algebraischen Gleichungssystems in den Koeffizienten von $\wp(x)$ und in einem gewissen Parametersystem.

R. REISSIG: Das Stabilitätsproblem bei Differentialgleichungen 3. Ordnung mit einer Nichtlinearität

In zahlreichen Veröffentlichungen werden die folgenden Differentialgleichungen hinsichtlich der Stabilität ihrer Ruhelage behandelt:

(1) $x''' + a\,x'' + b\,x' + f(x) = 0$

(2) $x''' + a\,x'' + f(x') + c\,x = 0$

(3) $x''' + f(x'') + b\,x' + c\,x = 0$ (a,b,c positive Konstanten).

In einer neueren Arbeit entwickelt S.Kasprzyk Kriterien für globale asymptotische Stabilität in den Fällen (1) und (3), die recht einschränkend und dem Problem nicht angemessen sind. Dies liegt an der Beweismethode, die sich auf den für die Anwendungen ungeeigneten Stabilitätssatz von Hartman-Olech stützt. Ein optimales Ergebnis läßt sich erzielen, wenn man auf die in Vektorform $\underline{z}' = \underline{F}(\underline{z})$, $\underline{F}(\underline{0}) = \underline{0}$, geschriebenen Gleichungen folgendes einfache und "natürliche" Prinzip anwendet: Es sei jede Trajektorie für $t \geqq 0$ beschränkt, der Ursprung stabil, jede ω-Grenztrajektorie für $t \to \infty$ konvergent mit dem Ursprung als Grenzpunkt. Dann ist dieser asymptotisch stabil im ganzen. (Offenbar kommt nur der Ursprung als ω-Grenztrajektorie in Frage, jedoch ist die Formulierung aus Gründen der Beweistechnik so gewählt.) Die Gleichungen (1) und (2) lassen sich in Systeme vom Tuzov-Typ, die Gleichung (3) in ein System vom Pliss-Typ transformieren. Mittels der für solche Systeme bekannten Ljapunovschen Funktionen kann man das Resultat herleiten:

Hinreichend für globale asymptotische Stabilität ist

(1) $0 < f(u)/u \leqq ab \;(u \neq 0)$, $0 \in \overline{\{u \neq 0:\ f(u)/u < ab\}}$

(2) $f(u)/u \geqq c/a \;(u \neq 0)$, $0 \in \overline{\{u \neq 0:\ f(u)/u > c/a\}}$

(3) $c/b + b^2/c \geqq f(u)/u \geqq c/b \;(u \neq 0)$, $0 \in \overline{\{u \neq 0:\ f(u)/u > c/b\}}$.

Die Bedingungen (1) und (2) sind schwächer als die verallgemeinerten Hurwitz-Bedingungen. Zu (3) sei bemerkt, daß Pliss eine Nichtlinearität $f(u)$ mit $f(u)/u > c/b$ $(u \neq 0)$, $f'(0) > c/b + b^2/c$ konstruiert hat, für die die Differentialgleichung (3) nichttriviale periodische Lösungen zuläßt. Ersetzt man dagegen in (3) $f(u)/u$ durch $f'(u)$, so entfällt die obere Schranke.

R. REISSIG: Eine Bemerkung zur verallgemeinerten Liénardschen Differentialgleichung

Für die Differentialgleichung $x'' + f(x)\,x' + g(x) = e(t) \equiv e(t+2\pi)$ wird unter der Bedingung $0 \leqq q \leqq g(x)/x \leqq p < 1$ $(|x| \geqq R)$ sowie $\int_0^{2\pi} e(t)\,dt = 0$ (falls $q = 0$) die Existenz wenigstens einer 2π-periodischen Lösung nachgewiesen. Der Beweis stützt sich auf die Leray-Schauder-Fixpunkttechnik und knüpft an die Überlegungen eines Vortrags der Tagung 1974 an. Es wird gezeigt, wie man sich von der dort getroffenen Einschränkung "q positiv" befreit.

Auch die Ausdehnung des Resultates auf den Fall "q negativ" ist möglich, wenn man zusätzlich fordert:

$\int_0^{2\pi} e(t)\,dt = 0$, $x\,g(x) \geqq 0$ für $|x| \in [a_n, b_n]$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n/a_n = \infty$$

oder

$g(x)\,\mathrm{sgn}\,x < -\,\mathrm{Max}\,|e(t)|$ für $|x| = a_n \to \infty\ (n \to \infty)$.

J. ROELS: On new series for the Routh problem of critical mass ratio in the restricted problem of three bodies

The plane restricted 3 body problem, linearized in the neighborhood of Lagrangian equilibria L_4 and L_5, has in general two distinct eigenvalues and their opposite. When they are pure imaginary and non multiple each of the other, they generate two families of periodic solutions called long and short periodic families. This is essentially a consequence of the famous theorem of Liapunov. We showed how to solve the problem when the eigenvalues are multiple each of the other in building series with negative exponents instead of the integer expansions of Siegel. When the eigenvalues are equal which is the case for the mass ratio of Routh, the problem was solved by Deprit - Henrard using formal series in ordinary non normalized variables. Since the variables are non adapted to the problem these series are very complicated. We solve the problem in this paper in using normalized variables. This brings to build expansions with fractionary exponents. So, in summary, normalized variables generate integer series in the non resonant cases, series with negative exponents in the case of resonance $k \geqq 3$, and series with fractionary exponents when the resonance is 1.

K. SCHMITT: Über das n-Nullstellen-Problem für sublineare Differentialgleichungen

Man betrachtet die nichtlineare Differentialgleichung

$$(*) \qquad x'' + f(t,x) = 0 ,$$

wo $x\, f(t,x) \geq 0$ und f sublinear bezüglich x ist:

$f(t,x)/x \to \infty\ (x \to 0)$, $f(t,x)/x \to 0\ (x \to \infty)$.

Es wird gezeigt, daß für jede ganze Zahl $n \geq 0$ eine Lösung $x(t)$ der Gleichung (*) existiert, so daß $x(0) = x(1) = 0$ ist und $x(t)$ genau n Nullstellen in $(0,1)$ besitzt. Der Beweis im Falle $n = 0$ wird auf ein Fixpunktproblem für positive kompakte Operatoren zurückgeführt. Im Falle $n \geq 1$ benutzt man die gerade bewiesene Aussage und zeigt, daß die Lösbarkeit eines gewissen algebraischen Gleichungssystems die gewünschte Aussage zur Folge hat. Die Existenz einer Lösung dieses nichtlinearen algebraischen Systems wird mit Hilfe elementarer Eigenschaften des Browerschen Abbildungsgrades bewiesen.

J. SPREKELS: Existenz und erste Einschließungen bei superlinearen Randwertaufgaben

Es werden superlineare Randwertaufgaben des Typs:

$$(*) \quad -x'' = f(t,x,x') \ , \quad t \in [0,1] \ ; \quad \begin{pmatrix} c_1\, x(0) - c_2\, x'(0) \\ d_1\, x(1) + d_2\, x'(1) \end{pmatrix} = \Theta$$

betrachtet. Mit Hilfe des bekannten Satzes von Krasnoselskii über Expansionen von Kegeln werden Bedingungen angegeben, unter denen man die Existenz nicht-trivialer Lösungen von (*) nachweisen und eine erste Einschließung der Lösungen gewinnen kann. Die Existenzaussagen verallgemeinern Resultate von Gustafson-Schmitt. Durch eine Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes von Krasnoselskii lassen sich die gewonnenen Schranken bei speziellen Nichtlinearitäten wesentlich verbessern. Hinweise auf weitere Problemklassen, bei denen die vorgeführte Methodik anwendbar ist, und numerische Beispiele werden gegeben.

K. SZILÁRD: Über die möglichen Definitionen der "Ableitung" und des "Produktes" in Ringen von Funktionen ganzer Zahlen

Es sei S Ring aller komplexwertigen Funktionen der nichtnegativen ganzen Zahlen n. Sind a(n) und b(n) solche Funktionen, so definieren wir ihre Summe und ihr Produkt folgendermaßen:

(1) $\{a(n)\} + \{b(n)\} = \{a(n)+b(n)\}$, $\{a(n)\} * \{b(n)\} = \{\sum_{\nu=0}^{n} a(n-\nu)b(\nu)\}$

Hier bedeutet a(n) bzw. b(n) den Funktionswert an der Stelle n, hingegen $\{a(n)\}$ bzw. $\{b(n)\}$ die Funktion als Ganzes. Mit der Definition (1) ist der Ring S nullteilerfrei; somit kann er zu einem Quotientenkörper Q erweitert werden: $\frac{\{a(n)\}}{\{b(n)\}} \in Q$. Es kann weiterhin eine Ableitung D in S definiert werden: $D\{a(n)\} = \{-\ n\ a(n)\}$. Man kann dann zeigen, daß

(2) $D\left(\{a(n)\} * \{b(n)\}\right) = D\{a(n)\} * \{b(n)\} + \{a(n)\} * D\{b(n)\}$

gilt, analog zur klassischen Differentialrechnung. Auf Grund der Definition (1) kann man in dem Quotientenkörper Q einen Kalkül entwickeln, der der klassischen Differential- und Integralrechnung entspricht (Differentialgleichungen inbegriffen). Die Regeln dieses Kalküls werden sehr übersichtlich, wenn man beachtet, daß der Ring A aller analytischen Funktionen f(z) der komplexen Veränderlichen z, die in einem Kreis $|z| < r$ der z-Ebene regulär sind, einem Teilring U von S isomorph ist. Dieser Isomorphismus ist durch die Potenzreihen-Entwicklung von f(z) gegeben:

(3) $f(z) = a(0) + a(1)z + a(2)z^2 + \dots$; $\{a(n)\} \in U \subset S$.

Betrachtet man analytische Funktionen, die durch konvergente Dirichletsche Reihen dargestellt werden, so kann man, wiederum auf Grund eines Isomorphismus, andere Definitionen für das "Produkt" und die "Ableitung" finden, z.B.

(4) $\{a(n)\} + \{b(n)\} = \{a(n) + b(n)\}$,

$\{a(n)\} * \{b(n)\} = \{\sum_{\nu \backslash n} a(\nu) \cdot b(\frac{n}{\nu})\}$

($\nu \backslash n$ bedeutet: ν Teiler von n). Entsprechend wird die Ableitung durch

(5) $D\{a(n)\} = \{-\ \log n\ \ a(n)\}$

definiert.

<u>Beispiele</u>:

$D\{1\} + \{\Lambda(n)\} * \{1\} = 0$, wo $\Lambda(n)$ die "Mangoldtsche Funktion" ist ($\Lambda(n) = \log n$, wenn $n = p^{\alpha}$, p Primzahl, α natürliche Zahl; im übrigen $\Lambda(n) = 0$)

$D\{\mu(n)\} - \{\Lambda(n)\} * \{\mu(n)\} = 0$, wo $\mu(n)$ die "Möbiussche Funktion" ist ($\mu(1) = 1$; $\mu(n) = 0$, wenn n teilbar durch ein Primzahlquadrat; $\mu(n) = (-1)^r$, wenn $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ und die p_i voneinander verschiedene Primzahlen darstellen).

K. TAUBERT: Numerische Behandlung von Bewegungen mit trockener Reibung

A.F.Filippov gab 1960 einen Lösungsbegriff für gewöhnliche Differentialgleichungen $\dot{y} = f(t,y)$ mit Unstetigkeiten in den räumlichen Koordinaten an. Bewegungen mit trockener Reibung führen auf Differentialgleichungen dieser Art. Der Filippovsche Lösungsbegriff berücksichtigt auf natürliche Weise das bekannte "Steckenbleiben in der Unstetigkeit", das bei obigen Bewegungen auftreten kann. Es wird gezeigt, daß die Lösungen von Filippov unter geeigneten Voraussetzungen über f durch Differenzenverfahren der Form

$$y_{n+1} = y_n + h\, g_n \,,\; g_n \in \bigcap_{\sigma N=0} \text{Kon}\,(f(t,U(y_n,\delta)-N))$$

gleichmäßig approximiert werden. Das Verfahren wurde u.a. an den Differentialgleichungen

$$\ddot{x} + 2\,D\,\omega\,\dot{x} + \omega^2\,x = \operatorname{sgn}(x+\dot{x}) \quad \text{und} \quad \ddot{x} + 2\,D\,\dot{x} + x + \operatorname{sgn}\dot{x} = q\cos\pi t$$

erprobt.

B. TEXTORIUS: Kanonische Differentialgleichungen mit definisierbarem Monodromie-Operator

Man behandelt die kanonische Differentialgleichung $x'(t) = i\,J\,H(t)\,x(t)$, $t \geqq 0$, $H(t)$ periodisch, im Hilbert-Raum vom Standpunkt der Störungstheorie. Es werden Kriterien dafür aufgestellt, daß der Monodromie-Operator der gestörten Gleichung definisierbar ist, sobald dies für die ungestörte Gleichung zutrifft. Man gewinnt Aussagen über das Wachstum der Lösungen und die Stabilität der Differentialgleichung.

W. WALTER: Invariante Mengen

Es wird über neuere Untersuchungen im Zusammenhang mit dem Invarianzproblem berichtet. Die Menge $M \subset B$ (B normierter Raum) heißt invariant bezüglich der Differentialgleichung $u'(t) = f(t,u(t))$, wenn aus $u(t_o) \in M$ folgt $u(t) \subset M \;\forall\; t \geqq t_o$. Wesentlich für die Theorie ist eine die geometrischen Gegebenheiten möglichst gut beschreibende Abschätzung der verschiedenen Größen. Ist $u(t)$ Näherungslösung, $p(t) \in M$ durch $\operatorname{dist}(u(t),M) = |p(t)-u(t)|$ bestimmt, so wird im wesentlichen vorausgesetzt:

(E) $e(t) = u'(t)-f(t,u(t))$, $[u-p,e]^+ \leqq \varepsilon(t)$

(F) $[u-p,f(t,u)-f(t,p)]^+ \leqq \omega(t,|u-p|)$

(G) $[u-p,f(t,p)] \leqq \gamma(t)$.

Es gilt $[x,y]^+ = \lim\limits_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\,(|x+h\,y| - |x|)$, also $[x,y]^+ =$

$\frac{1}{|x|}\langle x,y\rangle^{+}$, wobei $\langle .,.\rangle^{+}$ die bekannte Klammer (Verallgemeinerung des inneren Produkts) ist. Man erhält für $\delta(t) = \mathrm{dist}(u(t),M)$ die Ungleichung $D^{+}\delta(t) \leqq \omega(t,\delta(t)) + \gamma(t) + \varepsilon(t)$. Hieraus ergeben sich Sätze über Invarianz, Stabilität, Fehlerabschätzung usw. Die Ergebnisse sind in einer gemeinsamen Arbeit mit R.Redheffer enthalten.

H. WIMMER: Eine Elementarteiler-Theorie der linearen Funktional-Differentialgleichungen

Der linearen Funktional-Differentialgleichung $\dot{x} = L(x_t)$ läßt sich nach der Theorie von Hale eine Transformationshalbgruppe zuordnen. Der Eigenraum, der zu einem Eigenwert des infinitesimalen Generators dieser Halbgruppe gehört, ist endlich-dimensional. Es werden die Dimensionen der zyklischen Teilräume bestimmt, in die sich ein Eigenraum zerlegen läßt. Zum Beweis dieser Ergebnisse wird eine neue Normalform für holomorphe Matrizen entwickelt.

A. ZETTL: An algorithm for the construction of disconjugate operators

A differential operator (*) $Ly = y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\dots+a_o(t)y$ is said to be disconjugate on an interval I if every non-trivial solution of the equation $Ly = 0$ has less than n zeros, multiple zeros being counted according to their multiplicity. An algorithm for the construction of disconjugate operators of type (*) is given here. All disconjugate operators are obtained at least on intervals I which are either open or closed.

R. Reißig (Bochum)