MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 13|1975

Operatoralgebren und Darstellungstheorie

23. 3. bis 28. 3. 1975

Tagungsleitung: Prof. Dr. H. Behncke (Osnabrück)
Prof. Dr. E. Thoma (München)

Seit der Entwicklung der Tomita-Takesaki-Theorie Ende der sechziger Jahre hat die Theorie der Operatoralgebren einen starken Aufschwung genommen, der sich nicht zuletzt in einer Vielzahl dieses Gebiet betreffende Veröffentlichungen äußert. Als Folge davon setzt eine Beschäftigung mit Operatoralgebren und Darstellungstheorie notwendig die Kenntnis der Tomita-Takesaki-Theorie und die daraus resultierenden Ergebnisse voraus. Zudem wird es für den Einzelnen allein immer schwerer, den Überblick über alle neuen Ergebnisse zu behalten.
So wurde diese Tagung als Arbeitsgemeinschaft durchgeführt, um den bereits angesprochenen Stoff allen Teilnehmern zugänglich zu machen und der eigenen Forschung neue Impulse zu geben.

Teilnehmer

H. Behncke	Osnabrück
W. Bös	Osnabrück
M. Breuer	Marburg
J. Cuntz	Bielefeld
F. Eckstein	München
R. Felix	München
V. Flory	Heidelberg
W. Gleißner	München
W. Hauenschild	München
R.W. Henrichs	München
E. Kaniuth	München
H.W. Kirstein	München
F. Krauss	Paderborn
H. Krautwald	München
W. Kugler	Bielefeld
J. Gil de Lamadrid	München
R. Lasser	München
H. Lohöfer	Marburg
J. Ludwig	Bielefeld
P. Müller-Römer	Bielefeld
J. Peters	München
D. Poguntke	Bielefeld
G. Schlichting	München
H.L. Skudlarek	München
D. Steiner	München
E. Thoma	München
G. Zumbusch	München

Im ersten Teil der Tagung wurde ein Überblick über die Tomita-Takesaki-Theorie und einige der wichtigsten Folgeergebnisse gegeben.
Die Einführung bildete eine kurze Rekapitulation der -auf Grund der neueren Entwicklung schon fast klassisch zu nennenden-Theorie der Hilbert-Algebren, ihr Zusammenhang mit Spuren auf von Neumann Algebren und die daraus resultierende Theorie der Standard-Form für semifinite von Neumann Algebren.
Im Anschluß daran folgte -als direkte Verallgemeinerung- die Besprechung der Tomita-Takesaki-Theorie.

Dazu wurden Gewichte auf von Neumann Algebren und der Begriff der Links-Hilbert-Algebra oder verallgemeinerten Hilbert-Algebra eingeführt, der Zusammenhang zwischen diesen und vor allem die aus einer Links-Hilbert-Algebra resultierende von Neumann Algebra in "Standard-Form" und deren spezifische Eigenschaften diskutiert.Als Folgeergebnisse standen die verschiedenen Formen von Radon-Nikodym Sätzen für lineare Funktionale und Gewichte auf dem Pogramm.
Zur Erörterung des -zur Zeit wohl aktuellste- Problems der Klassifikation von von Neumann Faktoren dient dann ein Überblick über die verschiedenen Invarianten für Faktoren und ihre Bedeutung für die Klassifikation.

Der zweite Teil der Tagung behandelte die Dualitätstheorie für von Neumann Algebren und ihre Anwendungen auf die Dualitätstheorie lokalkompakter Gruppen. Unter Anwendung der Ergebnisse und Methoden der Tomita-Takesaki-Theorie wurde eine Dualitätstheorie für Hopf-von Neumann Algebren entwickelt und daraus die bekannten Dualitätstheorien von Pontryagin und Tannaka abgeleitet.

Außerdem wurde im Verlauf dieser Tagung über folgende eigene Forschungsergebnisse berichtet:

Vortragsauszüge

J.Cuntz: Lokal C^*- aequivalente Algebren

Eine Banach $*$ Algebra $\mathfrak{A}$ heißt C^*-äquivalent, wenn sie in einer zur Ausgangsnorm äquivalenten Norm eine C^*- Algebra ist.

$\mathfrak{A}$ heißt lokal C^*-äquivalent, wenn für jedes $x \in \mathfrak{A}$ mit $x=x^*$ die von x erzeugte abgeschlossene $*$ -Alegbra in $\mathfrak{A}$ C^*-äquivalent ist.

Es wird der Satz bewiesen, daß jede lokal C^*-äquivalente Banach $*$ Algebra C^* aquivalent ist.

V. Flory: Bestimmung von Normen in $L^1(G)$

Sei G eine diskrete Gruppe und sei K eine Teilmenge von G mit Elementen. Falls

$$w(K) = \inf_{G \supset M \text{ endl.}} \frac{|K\,M|}{|M|} = w ,$$

dann gilt für die charakteristische Funktion X_K als Faltungsoperator von $L^2(G)$

$$|X_K|^2 \leq +2\sqrt{w(u-1)(u-w)} + (u-2)(u-w)$$

R. W. Henrichs: Fortsetzung positiv definiter Funktionen

Satz 1) Ist H eine abgeschlossene Untergruppe einer lokalkompakten Gruppe G und G eine Umgebungsbasis der Eins aus H-invarianten Mengen ($G \in [SIN]_H$), so ist jede irreduzible Darstellung π von H in $U^\pi_{|H}$ enthalten (U^π die von π auf G induzierte Darstellung).

Satz 2) Jede irreduzible positiv definite stetige Funktion auf einer abgeschlossenen Untergruppe

H einer $[SIN]_G$ - oder einer separablen $[SIN]_H$ - Gruppe läßt sich zu einer irreduziblen positiv definiten stetigen Funktion auf G fortsetzen.

Satz 3) Sei G eine beliebige lokalkompakte Gruppe; jede irreduzible Darstellung einer kompakten Untergruppe ist in der Einschränkung $\pi|_H$ einer irreduziblen Darstellung π von G enthalten und zu jedem Charakter γ einer abgeschlossenen zentralen Untergruppe H gibt eine irreduzible Darstellung π von G mit der Eigenschaft $\pi(z) = \gamma(z)\cdot Id$ für alle z aus H.

Satz 4) Die Einschränkung $\varphi \to \varphi|_H$ ist eine surjektive Abbildung der Fourier-Stieltjes-Algebra B(G) auf die Algebra B (H), falls G eine $[SIN]_H$- Gruppe ist.

F.Krauss: Strukturtheorie von C^*- Algebren

Die Menge der Isomorphieklassen der n-homogenen C^*- Algebren A mit Prim A $\cong$ X, wobei X ein kompakter T_2 Raum ist, entspricht bijektiv der Menge $[X, BPU(n)]$ von Homotopie k lassen von Abbildungen von X in B P U (n), dem klassifizierenden Raum der projektiven n-dimensionalen Gruppe, und ist daher mit den bekannten Methoden aus der Homotopietheorie in gewissen Fällen berechenbar.
Die Menge Vect(X) und M(X) aller $\mathbb{C}^n$ - Bündel, respektive $M_n(\mathbb{C})$- Bündel über einem kompakten T_2 Raum X können über das Tensorprodukt von Bündeln zu kommutativen Monoiden gemacht werden. Aequivalenzrelationen werden auf Vect(X) und M(X) eingeführt, die alle Produktbündel zusammenfallen lassen. Die resultierenden abelschen Gruppe $\widetilde{KP}(X)$, $\widetilde{M}(X)$ und die Brauer Gruppe Br(X) ergeben eine exakte Sequenz, die für die homogene C^*- Algebra Theorie ausgenutzt wird.

I. Lohöfer: Doppelverhältnisse im Projektionenverband von Neumannscher Algebren.

Aufbauend auf einem Ansatz von A. Fuhrmann, der den Begriff des Doppelverhältnisses von Punkt-Hyperebenen-Paaren auf beliebige Paare komplementärer linearer Teilräume eines Vektorraumes über einem Schiefkörper verallgemeinerte, lassen sich Doppelverhältnisse in der Projektionengeometrie einer beliebigen, auch nichtdiskreten von Neumannschen Algebra definieren.

Man erhält Klassen von unbeschränkten Operatoren, welche die bekannten Permutationseigenschaften des gewöhnlichen Doppelverhältnisses besitzen. Die Standardrepräsentanten dieser Klassen verallgemeinern den operatorwertigen Sinus und liefern damit eine wichtige unitäre Invariante der Lagebeziehung des Quadrupels von Projektionen. Außerdem gestatten sie die Konstruktion eines Atlasses vom Typ C^∞ für die Menge aller Projektionen, die zu ihrem orthogonalen Komplement äquivalent sind. Der klassische Satz, daß bei Vorgabe dreier Elemente des Quadrupels und eines Doppelverhältnisses das vierte Element eindeutig existiert, läßt sich verallgemeinern.

J.Peters: Gruppen mit vollständig regulärem Primidealraume

Jeder Lokalkompakten Gruppe G wird der Raum der primitiven Ideale von $C^*(G)$, versehen mit der Hüllen-Kern Topologie, kurz Prim $C^*(G)$, zugeordnet. Es ist bekannt, daß für eine δ-kompakte $[FC]^-$ Gruppe G Prim $C^*(G)$ hausdorffsch ist. Ein Punkt $P_o \in$ Prim $C^*(G)$ heißt regulär, wenn eine Umgebung U von P_o existiert, die in der relativen Topologie hausdorffsch ist und $C^*(G)/_{k(U)}$ eine Eins enthält.

(Hier ist $k(U) = \bigcap_{P\in U} P)$. Sei P_e das der trivialen

Darstellung von G entsprechende Ideal in Prim $C^*(G)$. Es wird gezeigt, daß für unimodulares und mittelbares G und reguläres P_e G in $[FC]^-$ liegt. Außerdem wird bewiesen, daß, wenn G unimodular und jeder Punkt $P \in$ Prim $C^*(G)$ regulär ist, G in $[SIN]$ liegt.

E. Thoma: Unzerlegbare invariante Charaktere einer bestimmten Gruppe

$M_\infty(Z)$ sei die additive Gruppe aller Matrizen $A = (a_{i,k})_{i,k\in N}$ mit $a_{i,k} \in Z$ und $a_{i,k} = o$ fast überall. Für $n \in N$ sei $M_n(Z)$ der Ring der nxn Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten. Ist $B \in M_n(Z)$, so wird B mit $\begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix} \in M_\infty(Z)$

identifiziert. Also sind die $M_n(Z)$ Untergruppen von $M_\infty(Z)$. Es sei $SL^-(\infty, Z) := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \middle| A \in M_n(Z), \det A = \pm 1 \right\}$, wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$ ist.

$SL^-(\infty, Z) \times SL^-(\infty, Z)$ wirkt durch Automorphismen auf $M_\infty(Z)$ durch $(A_1, A_2) : B \longrightarrow A_1 B A_2^{-1}$.

Es sei $P = \{\alpha : M_\infty \longrightarrow \mathbb{C} \mid \alpha$ invariant gegenüber $B \longrightarrow A_1 B A_2^{-1}$ für alle $A_1, A_2 \; SL^-(\infty, Z)\}$, $K = \{\alpha \in P \mid \alpha(0) = 1\}$ und E die Menge der Extremalpunkte von K. E wird explizit bestimmt wie folgt: Ist p eine Primzahl und $r \in \mathbb{N}$, so ist $\alpha_{p^r} \in E$ mit $\alpha_{p^r} \begin{pmatrix} k & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \frac{(k, p^r)}{p^r}$ und E besteht im wesentlichen aus Produkten solcher Charaktere.

W. Bös (Osnabrück)