MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 15 | 1975

Arbeitstagung über Invariantentheorie

(Arbeitsgemeinschaft M.Kneser - P.Roquette)

6.4. bis 12.4.1975

Ziel der Tagung, die von Herrn W.-D. Geyer (Erlangen) geleitet wurde, war es, einige Aspekte der über 12o Jahre alten Invariantentheorie zu erarbeiten. Zur Einführung in dieses Gebiet sei auf die Vorlesungen von J.Dieudonné ([D]) verwiesen.

Der wechselhaften Geschichte entsprechend zerfällt das Programm in Teile unterschiedlichen Niveaus. Im ersten Teil werden Methoden des 19. Jahrhunderts zur effektiven Berechnung von Invarianten studiert. Der zweite Teil behandelt die Endlichkeitsfragen im Umkreis des 14$^{\text{ten}}$ Hilbertschen Problems, sowie das Gegenbeispiel von Nagata. Der dritte Teil behandelt Hilbert's zweiten invariantentheoretischen Ansatz zu einem konstruktiven Beweis seines Endlichkeitssatzes, der von Mumford in der Theorie der stabilen und semistabilen Punkte aufgegriffen und weiterentwickelt wurde. Der vierte Teil liefert Anwendungen auf Modulprobleme, die der Grund für die derzeitige Belebung der Invariantentheorie sind. Im letzten Vortrag wird Haboush's Beweis der Mumfordschen Vermutung vorgetragen, der die Invariantentheorie auch in Charakteristik p gültig werden läßt.

Teilnehmer:

G. Angermüller	(Erlangen)
H.-J. Bartels	(Bonn)
Martin Becker	(Erlangen)
Rolf Berndt	(Hamburg)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Walter Borho	(Bonn)
Peter Draxl	(Bielefeld)
Gerhard Frey	(Erlangen)
Akira Fujiki	(Kyoto/Bonn)
Jens Gamst	(Bremen)
Wulf-Dieter Geyer	(Erlangen)
E. Gottschling	(Mainz)
Bernhard Hain	(Erlangen)
Günter Harder	(Wuppertal)
H. Helling	(Bielefeld)
J. Hurrelbrink	(Bielefeld)
Friedrich Ischebeck	(Münster)
Ernst Kani	(Heidelberg)
Ursel Kiehne	(Saarbrücken)
Manfred Knebusch	(Regensburg)
Hanspeter Kraft	(Bonn)
Herbert Lange	(Göttingen)
Gerriet Martens	(Erlangen)
Heinrich Matzat	(Karlsruhe)
Leonhard Miller	(Karlsruhe)
Rolf Mulczinksi	(Bonn)
Iku Nakamura	(Nagoya/Bonn)
Yukihiko Namikawa	(z.Zt. Mannheim)
H.J. Nastold	(Münster)
Jürgen Neukirch	(Regensburg)
Walter Neumann	(Bonn)
Meinhard Peters	(Münster)
K. Pommerening	(Mainz)
Herbert Popp	(Mannheim)
Marius van der Put	(Utrecht)
Claus Ringel	(Bonn)
J. Rohlfs	(Bonn)
Michael Schneider	(Regensburg)
Ulrich Stuhler	(Göttingen)
S. Suckow	(Mainz)
Günther Tamme	(Göttingen)
Eckart Viehweg	(Mannheim)
D. Voigt	(Bonn)

Vortragsauszüge

I. Klassische Invariantentheorie der $GL_n(K)$

1 + 2: G.Frey und U.Kiehne: Erster und zweiter Hauptsatz der Invariantentheorie (Basisinvarianten und Basisrelationen)

Mit Hilfe der Capelli-Identität wurde nach ([W]) bewiesen: Sei $f(x^1,\dots,x^k, \xi^1,\dots,\xi^l)$ eine Polynomfunktion in den k Vektorvariablen $x^i = (x^i_1,\dots,x^i_n)$, auf denen $GL_n(K)$ kontravariant, und den l Vektorvariablen $\xi^j = (\xi^j_1,\dots,\xi^j_n)$, auf denen $GL_n(K)$ kovariant operiert, dann ist f eine relative Invariante genau dann, wenn f ein Polynom in $\det(x^{i_1},\dots,x^{i_n}), \det(\xi^{i_1},\dots,\xi^{i_n})$ und $\langle x^i,\xi^j\rangle$ ist. Hier und im folgenden ist char K = 0 vorausgesetzt. Daran anschließend wurden die Relationen zwischen den Basisinvarianten bestimmt.

3. G. Martens: Die symbolische Methode

Aufbauend auf dem Aronholdschen Polarisierungsprozess wurde unter Verwendung von ([D]) die "symbolische Methode" der Invariantentheorie (Clebsch, Gordan) entwickelt und an einigen Beispielen erläutert. Bei einigen Invarianten bzw. Kovarianten (Diskriminante und Jakobische, Hessesche und Hankelsche Determinante) wurde die Invarianz durch Angabe des symbolischen Ausdrucks nachgewiesen; anschließend wurden Basisinvarianten für zwei binäre quadratische Formen und einen kontravarianten Vektor mittels des symbolischen Kalküls berechnet und geometrisch gedeutet (z.B. Doppelverhältnis der isotropen Punkte).

4. M.Peters: Der Cayley-Sylvestersche Abzählkalkül bei Invarianten binärer Formen

Es wurde die Dimension $N(n,r,p)$ des Raumes der Invarianten einer binären Form des Grades n mit Hilfe des Cayley-Sylvesterschen Abzählkalküls dargestellt; r ist dabei der Homogenitätsgrad und p das Gewicht der Invarianten. Dazu wurde gezeigt: Invarianten F werden charakterisiert durch die Gewichtsregel $nr = 2p$, Isobarität und die Cayley-Aronholdschen Differentialgleichungen $\mathcal{D} F = 0$ und $\Delta F = 0$. Sei $F(n,r,p)$ der Raum der homogenen, isobaren Funktionen in $n + 1$ Variablen, dann ist $\mathcal{D} : F(n,r,p) \to F(n,r,p-1)$ für $nr - 2p \geq o$ surjektiv, und somit die gesuchte Dimension $N(n,r,p) = A(n,r,p) - A(n,r,p-1)$; dabei bedeutet $A(n,r,p)$ die Dimension von $F(n,r,p)$, die sich (vgl. [S]) leicht charakterisieren läßt. Der Kalkül wurde zur vollständigen Beschreibung der Invarianten für Formen vom Grad ≤ 4 angewandt.

5. K.Pommerening: Der Gordansche Endlichkeitssatz

Sei k ein unendlicher Integritätsbereich, V ein freier k-Modul vom Rang 2; die Gruppe $G = SL(V)$ operiert auf dem Vektorraum $S^n(V^*)$ der binären Formen n-ten Grades. P sei der Koordinatenring $S(S^n(V^*)^*) \doteq S(S^n(V))$, $I := P^G$ der Invariantenring dieser Darstellung. Sei $k_o := \mathbb{Z}[\frac{1}{n!}]$, dann gilt: (i) Ist $n!$ Einheit in k, so ist I endlicherzeugte K-Algebra und $I = I(k) = I(k_o) \otimes_{k_o} k$ als graduierte k-Algebra.

(ii) Ist k noethersch, so ist I endlich erzeugt.

Dieser Satz wurde nach $[H_1]$ und [G] bewiesen.

II. Affine Invariantentheorie

6. C.Ringel: Kategorielle, gute und geometrische Quotienten für eine Gruppenoperation auf einer Mannigfaltigkeit.

Operiert ein Gruppenschema G auf einem anderen Schema X, so fragt man sich, wann ein "Quotientenschema" Y definiert werden kann. Mumford und Seshadri haben verschiedene Definitionen von Quotienten vorgeschlagen: Der kategorielle Quotient (existiert oft, kann aber selbst im Falle der Existenz von mehreren abgeschlossenen Bahnen zu einem einzigen Punkt zusammenschrumpfen), gute Quotienten (hier werden wenigstens disjunkte, abgeschlossene G-invariante Teilmengen getrennt) und geometrische Quotienten (es werden alle G-Bahnen getrennt). Beispiele zeigen, daß selbst die Existenz eines geometrischen Quotienten es nicht gestattet, aus der Tatsache, daß G mengentheoretisch frei operiert, darauf zu schließen, daß G auch geometrisch frei operiert. Auch braucht das Quotientenschema im allgemeinen nicht separiert zu sein. Man hat jedoch das folgende Kriterium: Seien X/k und Y/k irreduzible, normale, noethersche Schemata, $\phi: X \to Y$ ein dominanter Morphismus von endlichem Typ. Der Restklassenkörper des generischen Punktes von Y habe die Charakteristik Null. Sei weiter G ein Gruppenschema von endlichem Typ über k, das auf X vermittels $\sigma : G\times_k X \to X$ wirkt. Ist $\phi \circ \sigma = \phi \circ p_2$ und enthalten für algebraisch abgeschlossenes $\bar{k}$ die geometrischen Fasern von ϕ höchstens eine $G(\bar{k})$-Bahn, so ist $\phi : X \to \phi(X)$ ein geometrischer Quotient.

7. Der Quotient einer affinen Mannigfaltigkeit nach einer linearen Gruppe G

a) H. Matzat: $K = \mathbb{C}$

Für reduktive Gruppen d.h. Gruppen mit kompakter Form wurde der klassische Beweis von H. Weyl für die Endlichkeit des Invariantenringes vorgeführt (unitary trick). Daraus läßt sich für ein affines, algebraisches Schema, auf dem eine solche Gruppe operiert, die Existenz eines guten Quotienten folgern.

b) L.Miller: Allg.Fall

Sei G eine affine Gruppe über k, A eine k-Algebra und G operiere auf A. Dann operiert G auf SpecA=: X. Sei weiter

$Y := \operatorname{Spec} A^G$ und $\pi : X \to Y$. Ist G geometrisch reduktiv, so gilt (i) $\pi : X \to Y$ ist ein guter Quotient, (ii) falls $X_o = \{x \in X : \dim Ox \text{ maximal}\}$ offen ist, existiert ein nichtleeres, offenes Y' in Y, sodaß $\pi^{-1}(Y') =: X' \to Y'$ ein geometrischer Quotient ist, und (iii) falls X algebraisch ist, so ist auch Y algebraisch (Endlichkeitssatz) und X_o ist offen. Dabei heiße G geometrisch reduktiv, falls gilt: Für k-Algebren A und A', auf denen G operiert, und jeden G-Homomorphismus $\phi: A \to A'$ genügt jedes Element aus A'^G einer reinen Gleichung über $\phi(A^G)$. Reduktive Gruppen in char 0 erfüllen sogar die stärkere Bedingung $A'^G = \phi(A^G)$.

8. F.Ischebek: Nagata's Beispiel eines nicht endlich erzeugten Invariantenringes.

Zunächst wird im Polynomring $R = k[X_1,\ldots,X_r, Y_1,\ldots,Y_r]$ für $r = n^2 \geq 16$ ein Teilkörper L des Quotientenkörpers von R konstruiert, so daß $I = R \cap L$ nicht endlich erzeugbar ist, und anschließend gezeigt, daß I der Invariantenring einer abelschen Untergruppe Γ von $GL(2r,k)$ ist.

III. Projektive Invariantentheorie

9. H.Kraft: Stabile und semistabile Punkte bei der Operation einer linearen Gruppe auf einer projektiven Mannigfaltigkeit.

Operiert eine geometrisch reduktive Gruppe G auf einem projektiven k-Schema $X = \operatorname{Proj} R$, wobei die Operation durch eine homogene Darstellung auf dem graduierten Ring R gegeben ist (z.B. G operiert linear auf dem k-Vektorraum V und somit auf $X = \operatorname{Proj} S(V) = \mathbb{P}(V)$), so ist $\operatorname{Proj} R^G$ der richtige Kandidat für einen Quotienten. Der Definitionsbereich $(\operatorname{Proj} R)^{ss}$ der rationalen Abbildung $\operatorname{Proj} R \to \operatorname{Proj} R^G$ besteht aus den semistabilen Punkten. Der Quotient $\phi : (\operatorname{Proj} R)^{ss} \to \operatorname{Proj} R^G$ ist ein guter Quotient. Die

semistabilen Punkte lassen sich auch dadurch charakterisieren, daß der Abschluß des Orbits $\overline{O\tilde{x}}$ im Kegel Spec R ($\tilde{x}$ Urbild von x) den Nullpunkt nicht enthält: $x \in (\mathrm{Proj}\ R)^{ss} \iff \exists f \in R^G$ homogene Form positiven Grades, mit $f(x) \neq 0$.
Um diese Definitionen auf beliebige algebraische k-Schemata X übertragen zu können, benötigt man den Begriff der G-Linearisierung eines Geraden-Bündels L/X. Eine solche liefert einen G-invarianten Morphismus $\varphi: X \to \mathbb{P}(V)$, wobei $V \subset \Gamma(L^{\otimes n})$ ein G-invarianter Unterraum ist und $\mathbb{P}(V)$ die induzierte Operation trägt. Es gilt dann im wesentlichen $X^{ss}(L) = \varphi^{-1}(\mathbb{P}(V)^{ss})$ und $X^s(L)$ ist die offene Teilmenge von $X^{ss}(L)$, wo die Operation abgeschlossen ist. Man erhält dann einen guten Quotienten $\phi: X^{ss}(L) \to Y$ mit quasiprojektivem Y und einen guten geometrischen Quotienten $\phi' : X^s(L) \to Y'$ mit $Y' \subset Y$ offen und $X^s(L) = \phi^{-1}(Y')$.

10. R.Mulczinski: Das Stabilitätskriterium von Hilbert-Mumford.

Sei k algebraisch abgeschlossen, X/k ein vollständiges Schema, G eine reduktive algebraische Gruppe, die auf X operiert, und L ein sehr amples Geradenbündel mit G-Linearisierung. Dann gilt:

$x \in X(k)$ semistabil $\iff \forall$ 1-Parameteruntergruppen $\lambda: G_m \to G$ ist $\mu^L(x)(\lambda) \geq 0$

$x \in X(k)$ stabil und dim Ox maximal $\iff \forall \lambda: G_m \to G$ ist $\mu^L(x)(\lambda) > 0$.

Dabei ist $\mu^L(x)(\lambda) = -\min\{r_i \mid x_i \neq 0\}$ mit $\lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha^{r_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha^{r_n} \end{pmatrix}$

bezüglich einer geeigneten Basis von $\Gamma(L)$.
Beispiel: Sei $\mathbb{P}(V)$ die projektive Ebene, dann operiert Aut $\mathbb{P}(V)$ auf dem linearen System $(S^4(V^*))$ von Kurven vom Grad 4 im $\mathbb{P}(V)$ · $SL(V) \hookrightarrow$ Aut $\mathbb{P}(V)$ induziert die Operation und operiert außerdem auf dem affinen Kegel $S^4(V^*)$.

Man kann daher das Kriterium anwenden und erhält eine Kennzeichnung der semistabilen und stabilen ebenen Kurven 4. Grades.

11. D.Voigt: Ein elementares Beispiel ([M]), chap.3, § 1,2)

Sei k algebraisch abgeschlossen und $PGL_n \times (\mathbb{P}_n)^m \to (\mathbb{P}_n)^m$ $(n \geq 1,\ m > n)$ die kanonische Operation. Betrachtet man die Menge der Punkte $x \in (\mathbb{P}_n)^m$ mit endlicher Standgruppe, so erhält man ein offenes Unterschema $U_{reg} \subset (\mathbb{P}_n)^m$. Schränkt man die Operation auf das offene, stabile Unterschema $U_{stab} \subset U_{reg}$ ein, so ist der Quotient quasiprojektiv. U_{stab} kann durch folgende Bedingung an die Punkte $x \in (\mathbb{P}_n)^m$ charakterisiert werden:

$$x = (x^1,\ldots,x^m) \in U_{stab} \iff \frac{\text{Anzahl der } x^i \text{ in } L}{m} < \frac{\dim L+1}{n+1}$$

für alle echten linearen Teilräume $L \subset P_n$.

12. H.-J. Bartels: Effektive Konstruktion einer Invariantenbasis.

Die Gruppe $G = SL(n,k)$ operiere homogen und polynomial auf k^N, und somit auf $F = k[X_1,\ldots,X_N]$. Gesucht wird ein Verfahren zur Bestimmung eines Fundamentalsystems $S \subset R^G$, so daß $R^G = k[S]$ ist. Man stellt sich nach Hilbert ([H_2]) dazu zunächst ein System S_1 von Invarianten auf, deren Verschwinden notwendig das Verschwinden aller übrigen homogenen Invarianten zur Folge hat. Bei der Bestimmung von S_1 kann man sich auf Polynome beschränken, deren Grad eine berechenbare Schranke nicht übersteigt. Aus S_1 kann das gesuchte S bestimmt werden durch Konstruktion eines ganzen Abschlusses.

IV. Anwendungen auf Modulprobleme

14. G.Angermüller: Modulschemata für Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$.

Sei $g \geq 2$ und $n = 5g - 6$. Dann parametrisiert ein lokal-abgeschlossenes Teilschema H des Hilbert-Schemas $Hilb^{P(x)}$ zum Hilbertpolynom $P(x) = 6(g-1)x+1-g$ die trikanonisch eingebetteten Kurven vom Geschlecht g; der geometrische Quotient von H nach PGL(n) ist ein grobes Modulschema für Kurven vom Geschlecht g. Durch Anwendung des Hilbert-Mumfordschen Stabilitätskriteriums wurde (unter Benutzung von Vortrag 16) gezeigt, daß ein geometrischer Quotient von H existiert.

15. Das grobe Modulschema für stabile Vektorbündel auf Kurven

a) G. Tamme: Parametrisierung

Zu einer irreduziblen glatten projektiven Kurve X über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und $(r,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wird der kontravariante Funktor

$$M_X^{(r,d)} : Sch/k \longrightarrow Ens$$

betrachtet. Dabei ist $M_X^{(r,d)}(T) = \{$Isomorphieklassen lokal-freier $\mathcal{O}_{X\times T}$-Moduln E mit $\mathrm{rang} E_t = r$, $\deg E_t = d$, und E_t stabil für alle $t \in T\}$. Zur Konstruktion eines groben Modulschemas für $M_X^{(r,d)}$ beweist man

1) Satz von Atiyah: Sei B(r,d) die Menge der Isomorphieklassen stabiler Vektorbündel vom Rang r und vom Grad d auf X. Dann gibt es ein $n_o = n(r,d,g)$ so, daß für alle $n \geq n_o$ $H^1(X,E(n)) = 0$ gilt, und E(n) von $H^o(X,E(n))$ erzeugt wird.

2) Sei $Q = Quot^P(\mathcal{O}_X^p/X/k)$ das Hilbertschema von kohärenten Quotienten von $\mathcal{O}_X^p$ zum Polynom $P \in \mathbb{Q}[t]$. Dann wird gezeigt:

Die Menge $R = \{q \in Q : F_q$ lokal frei auf $X \times \{q\}$, $H^1(X \times \{q\}, F_q) = o$ und $H^o(X \times \{q\}, \mathcal{O}^p_{X\times\{q\}}) \xrightarrow{\cong} H^o(X\times\{q\},F_q)\}$ ist offen in Q.

b) U.Stuhler: Modulschema

Zur Konstruktion des Modulschemas würden Morphismen $\tau_* : R \to H^N_{p,r}(E)$ konstruiert ($H_{p,r}(E)$=Grassmann-Schema der r-dimensionalen Quotienten des p-dimensionalen

Raumes $E = \Gamma(1^p)$) durch Einsetzung von Punkten $\mathfrak{u} = (x_1,\dots,x_N)$, $x_i \in X(k)$. Wählt man N hinreichend groß, so erreicht man, daß $\tau_{\mathfrak{u}}$ universell injektiv wird. Weiter gilt $\tau_{\mathfrak{u}}^{-1}(H^N_{p,r}(E)_s) = R_s$, wobei R_s die stabilen Vektorraumbündel in R bezeichnet und $H^N_{p,r}(E)_s$ die stabilen Punkte von $H^N_{p,r}(E)$. Dann existiert der gute Quotient $H^N_{p,r}(E)/\mathrm{Aut}(E)$. Bei weiterer Vergrößerung von N kann man erreichen, daß $\tau_{\mathfrak{u}}$ eigentlich wird. Unter diesen Voraussetzungen existiert auch der gute Quotient $R_s/\mathrm{Aut}E$. Mit den Mitteln des vorhergehenden Vortrags kann man zeigen, daß $R_s/\mathrm{Aut}E$ ein grobes Modulschema für die stabilen Vektorbündel vom Rang r und Grad d ist.

16. G. Harder: Reduktive Gruppen sind geometrisch reduktiv (vgl. [H]).

Die Mumfordsche Vermutung besagt: Sei $\pi : G \to GL(V)$ eine Darstellung einer reduktiven Gruppe, die einen invarianten Vektor $v_o \neq o$ besitzt. Dann gibt es ein invariantes Polynom $P \in S^n(V)$, $n > o$, mit $P(v_o) \neq o$, vgl. auch Vortrag 7b. Zum Beweis kann man annehmen, daß G halbeinfach und einfach zusammenhängend ist, und der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen. T bezeichne einen maximalen Torus. Auf der affinen Algebra A(G) operiere G von links und T von rechts. Dann ist der G-Modul $A(G)^T$ aufsteigende Vereinigung endlichdimensionaler Untermoduln F, die isomorph sind zu End(E) wobei E ein G-Modul ist, woraus sofort Mumfords Vermutung folgt. Die Teilmoduln F bieten sich in natürlicher Weise an, die Isomorphie $F \simeq \mathrm{End}\,E$ benutzt tiefere Resultate von Steinberg.

Literatur

[D] Dieudonné + Carell: Invariant Theory, Old and New Advances in Math. 4(197o)

[G] Geyer: Invarianten binärer Formen. Lect.Notes in Math. 412(1974)

[H] M.Demazure: Démonstration de la conjecture de Mumford (d'après Haboush) Sém. Bourbaki 27(1975) No.462

[H_1] Hilbert: Über die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen, Math.Ann.33(1889)

[H_2] Hilbert: Über die vollen Invariantensysteme Math. Ann. 42 (1893)

[M] Mumford: Geometric Invariant Theory Springer 1965

[S] Schur: Vorlesungen über Invariantentheorie, Springer 1968

[W] Weyl: The Classical Groups, Princeton 1939

B. Hain (Erlangen)