MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 16|1975

Quadratische Formen

13.4. bis 19.4.1975

Es war dies die erste Tagung über quadratische Formen in der Bundesrepublik Deutschland; sie fand unter der Leitung der Herren Knebusch (Regensburg), Pfister (Mainz) und Scharlau (Münster) statt. Wohl alle Teilnehmer empfanden, daß mit dieser Tagung einem bereits lange bestehenden Kommunikationsbedürfnis entsprochen wurde. Mit Rücksicht auf die internationale Zusammensetzung des Teilnehmerkreises wurden die Vorträge mit wenigen Ausnahmen in englischer Sprache gehalten.

Der Schwerpunkt lag in der algebraischen Theorie der quadratischen Formen, die sich erst in den sechziger Jahren als selbständiger Forschungszweig entwickelt hat und inzwischen ein starkes, noch nicht abschätzbares Wachstum erfährt. Jedoch wurde auch über arithmetische und analytische Resultate berichtet.

Leider konnten einige in den letzten Jahren erzielte bemerkenswerte Fortschritte der Theorie nicht genügend dargestellt werden, da einzelne geladene Gäste zu kommen verhindert waren, insbesondere A.Dress (z.Zt.Princeton), R.Elman und T.Y.Lam (University of California).

Teilnehmer

Amer, M.	Mainz
Arason, J.	Reykjavik
Baeza, R.	Saarbrücken
Bak, A.	Bielefeld
Bartels, H.-J.	Bonn
Becker, E.	Köln
Bröcker, L.	Kiel
Draxl, P.	Bielefeld
Gerstein, L.J.	Santa Barbara
Geyer, W.D.	Erlangen
Heß, Chr.	Münster
Heuser, A.	Regensburg
Hornix, Elizabeth	Utrecht
Hurrelbrink, J.	Bielefeld
James, D.G.	University Park
Karoubi, M.	Paris
Knebusch, M.	Regensburg
Kneser, M.	Göttingen
Köpping, E.	Köln
Körner, O.	Ulm
Lenz, H.	Berlin
Lorenz, F.	Münster
Nobs, A.	Bures-sur-Yvette
Patterson, S.J.	Göttingen
Peters, M.	Münster
Pfeuffer, H.	Mainz
Pfister, A.	Mainz
Ponomarev, P.	z.Zt.Göttingen
Prestel, A.	Bonn
Ranicki, A.A.	Cambridge
Rehmann, U.	Bielefeld
Reiter, H.	Mainz
Riehm, C.R.	Hamilton
Rosenberg, A.	Ithaca
Scharlau, W.	Münster
Seeland, H.K.	Stuttgart
Szymiczek, K.	Katowice
Uhlig, F.	Würzburg
Wall, C.T.C.	Liverpool
Wolfart, J.	Freiburg

Vortragsauszüge

A.PRESTEL: Quadratische Formen über (formal) reellen Körpern.

K sei ein (formal) reeller Körper, $W(K)$ sein Wittring und $X(K)$ die Menge der Anordnungen von K. Die Signaturabbildung $\mathrm{sgn}: X \times W \to \mathbb{Z}$ ordnet jeder Anordnung mit Positivitätsbereich P und jeder Klasse ρ einer quadratischen Form die Signatur von ρ bzgl. P zu. Die Abbildung $\mathrm{sgn}(\ ,\rho): X \to \mathbb{Z}$ ist stetig ($\mathbb{Z}$ diskret topologisiert), wenn man X mit der von den Mengen $H(a) = \{P \in X \mid a \in P\}$, $a \in K$, erzeugten Topologie versieht. Die Abbildung $\sigma: W \to C(X,\mathbb{Z})$ mit $\sigma(\rho) = \mathrm{sgn}(\ ,\rho)$ ist ein Ringhomomorphismus, dessen Kern nach Pfister gerade aus den Torsionselementen besteht; andererseits sind dies gerade die nilpotenten Elemente von W. Damit erhält man eine Injektion

$$W_{red} = {}^{W}/_{\mathrm{Nil}W} \hookrightarrow \mathbb{Z} + C(X, 2\mathbb{Z}) \subset C(X,\mathbb{Z}).$$

Nach Knebusch-Rosenberg-Ware ist diese Injektion genau dann surjektiv, wenn K ein sogenannter SAP-Körper ist, d.h. sich je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen von X durch ein $H(a)$ trennen lassen. Es wurden Sätze angegeben, die es erlauben, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}(t)$ (sowie deren algebraische Erweiterungen), $\mathbb{R}((t))$ und $\mathbb{Q}((t))$ als SAP-Körper zu identifizieren, desgleichen $\mathbb{Q}(t)$ als nicht SAP-Körper.

E.KÖPPING: Anordnungen reeller Körper.

Eine Teilmenge T eines reellen Körpers K heiße Präordnung, wenn für sie gilt: $K^2 \subset T$, $T + T \subset T$, $T \cdot T \subset T$. Ein solches T ist im Falle $T \neq K$ in einer Anordnung P enthalten, und es gilt: $T = \bigcap_{T \subset P} P$. X_T bezeichne den (abgeschlossenen) Teilraum derjenigen Anordnungen von $X(K)$, die eine feste Präordnung T enthalten. Jedes $a \in K^*$ induziert eine stetige Abbildung $\hat{a}: X_T \to \mathbb{Z}$ durch $P \mapsto \operatorname{sgn} p(a)$. Der von den $\hat{a}, a \in K^*$, erzeugte Unterring W_T von $C(X_T, \mathbb{Z})$ heißt der T-reduzierte Wittring von K, seine Elemente T-reduzierte Formen. Ohne Zuhilfenahme der Theorie der quadratischen Formen läßt sich zeigen: W_T ist der freie, von den Formen $\hat{a}$ erzeugte kommutative Ring modulo den bekannten Relationen. Offenbar gilt: $W_T \cong W(K)/_{\alpha(T)}$, wobei $\alpha(T)$ von den Formen $\langle 1,-t \rangle, t \in T^*$, erzeugt wird. Für das Fundamentalideal I_T von W_T gilt:

$$X_T \text{ erfüllt SAP} \iff I_T^2 = 2I_T.$$

Eine Präordnung T heißt Fächer, wenn für jede Untergruppe $U < K^*$ mit $-1 \notin U$, $T^* \subset U$, $[K^*:U] = 2$ die Menge $U \cup \{0\}$ eine Anordnung ist. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} T \text{ Fächer} &\iff W_T \cong \mathbb{Z}[H] \text{ für eine Gruppe } H \text{ (Ware)} \\ &\iff 1 + a \in T \cup aT \text{ für alle } a \notin -T. \end{aligned}$$

Ein Fächer T heißt nichttrivial, falls $[K^*:T^*] \geq 8$:

X_T erfüllt SAP $\iff$ über T liegt kein Fächer T_o mit $[K^*:T_o^*] = 8$

T nichttrivialer Fächer $\iff$ jede über T liegende Präordnung T_o mit $[K^*:T_o^*] = 8$ ist ein Fächer.

L. BRÖCKER: <u>Erblich pythagoräische Körper.</u>

Ein Körper K heißt <u>erblich pythagoräisch</u>, wenn jede reelle algebraische Erweiterung von K pythagoräisch ist. K heißt <u>strikt-pythagoräisch</u>, wenn jede reelle Erweiterung vom Grad ≤ 2 pythagoräisch ist.

Beispiele für strikt-pythagoräische Körper:

1. euklidische Körper
2. Durchschnitte von 2 euklidischen Hüllen
3. φ eine reelle 2-Henselsche Bewertung von K; Restklassenkörper strikt-pythagoräisch $\Rightarrow$ K strikt-pythagoräisch.

Beispiele für erblich-pythagoräische Körper:

1.' reell abgeschlossene Körper

2.' Durchschnitte von 2 reell abgeschlossenen Hüllen

2'a. $G(K(i))$ abelsch mit zyklischer 2-Sylow-Gruppe ($G(K(i))$ = = abs. Galoisgr.)

3.' φ eine reelle Henselsche Bewertung von K; Restklassenkörper erblich pythagoräisch $\Rightarrow$ K erblich pythagoräisch.

Es wird bewiesen, daß alle strikt-pythagoräischen Körper (bzw. erblich-pythagoräische) unter 3. (bzw. 3.') fallen, wobei der Restklassenkörper 1. oder 2. (bzw. 2'a.) erfüllt. Der Beweis wird mit Hilfe gewisser Präordnungen T beliebig reeller Körper K geführt, für die $T + aT = T \cup aT$ ist, $a \notin -T$. Solche T heißen <u>Fächer</u>.

<u>Satz.</u> Jeder Fächer T ist verträglich mit einer reellen Bewertung, so daß $\bar{T}$ Durchschnitt von höchstens 2 Anordnungen in $\bar{K}$ ist. Hieraus folgt mit Hilfe früherer Resultate

$$st(K) + 1 = \sup\{ \text{ex Fächer } T \subset K \text{ mit } (K:T) \geq 2^n \}$$

Dabei ist st(K) ("Stabilitätsindex") die Höhe von S(K) mit

$$S(K) = \operatorname{Coker} \quad W(K) \xrightarrow{\sigma} C(X,\mathbb{Z}).$$

E.BECKER: <u>Ordnungen höherer Stufe.</u>

Sei K Körper, $n \in \mathbb{N}$. Als Ordnungen der Stufe n von K werden die Teilmengen $P \subset K$ mit den folgenden Eigenschaften bezeichnet:

$P + P \subset P$, $-1 \notin P$, $K^{2^n} \subset P$, $P^\times$ ist Gruppe und $K^\times/P^\times$ zyklisch von der Ordnung 2^n.

Dabei ist $P^\times = P \setminus \{0\}$. Sei $Q_n = \{ \sum_{\text{endlich}} x_i^{2^n} \mid x_i \in K \}$;

es wurde bewiesen:

<u>Satz.</u> Ist K unendlicher Körper, char K $\neq$ 2, so gilt

α) $$Q_n = \bigcap_{\substack{P \text{ Ordnung der} \\ \text{Stufe} \leq n}} P$$

β) K formal-reell $\Leftrightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ und eine Ordnung der Stufe n

Dieser Satz ist von Artin-Schreier um 1925 für n = 1 bewiesen worden. Der Beweis von β) stützt sich auf eine von Hilbert gefundene Identität:

$$\left(\sum_1^n X_i^2\right)^m = \sum_j \rho_j (a_{j_1} X_1 + \ldots + a_{j_n} X_n)^{2m}$$

mit rationalen Zahlen $\rho_j, a_{j_i}, \rho_j > 0$. In Körpern mit genau einer Anordnung gibt es keine Ordnungen einer Stufe n für $a \geqslant 2$; Ordnungen zu jeder vorgeschriebenen Stufe gibt es dagegen in Körpern, die eine reelle Stelle mit nicht 2-teilbarer Wertegruppe besitzen. Ordnungen höherer Stufe sind Beispiele von vollen unendlichen Primstellen im Sinne von Harrison. Jede volle unendliche Primstelle eines endlichen Zahlkörpers ist nach Harrison eine Anordnung. Gestützt auf diesen Satz wurde bewiesen:

<u>Satz.</u> Ist $K/\mathbb{Q}$ algebraisch, $n \in \mathbb{N}$, so gilt in K:

$$\left\{ \sum_{\text{endlich}} X_i^2 \right\} = \left\{ \sum_{\text{endlich}} Y_j^{2^n} \right\}.$$

A.ROSENBERG: <u>Ein neuer Beweis für die Äquivalenz von WAP, SAP und HMP.</u>

R sei ein semilokaler Ring mit $\frac{1}{2} \in R$, X die Menge der Signaturen; die Mengen $W(a) = \{\sigma \in X \mid \sigma(a) = -1\}$, $a \in R$ Einheit, bilden eine Subbasis der Topologie von X. "SAP" bedeutet, daß jeder Durchschnitt $\bigcap_1^n W(a_i)$, a_i Einheiten, der Form W(a) ist. Um WAP ⇒ SAP zu zeigen, stellt man $\bigcap W(a_i)$ in der Form $\bigcup_1^n W(b_i)$ dar, was wegen WAP möglich ist, und beendet den Beweis durch Betrachtung der Pfisterformen $\langle\langle -a_1, \ldots, -a_n \rangle\rangle$ und $\langle\langle b_1, \ldots, b_n \rangle\rangle$. Zu SAP ⇒ HMP: E sei total indefinit vom Rang n; $Y_k = \{\sigma \in X \mid \sigma(E) = -n + 2k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Wegen SAP hat man Einheiten $b_1, \ldots, b_{n-2}$ in R mit $W(b_1) = Y_1, W(b_2) =$

$Y_1 \cup Y_2, \ldots, W(b_{n-2}) = Y_1 \cup \ldots \cup Y_{n-2}$. Sei $F = \langle b_1, \ldots, b_{n-2} \rangle$: für alle σ ist dann $\sigma(E) = \sigma(F)$, also $E - F$ Torsionselement in $W(R)$, also E schwach isotrop. In HMP $\Rightarrow$ SAP: $\langle -1, a, b, ab \rangle$ ist für Einheiten a, b total indefinit, also $m\langle -1, a, b, ab \rangle$ isotrop für geeignetes m. Sätze von Knebusch und Baeza liefern eine Einheit c mit $W(a) \cap W(b) = W(c)$, also gilt SAP.

P.PONOMAREV: A correspondence between quaternary forms.

Let $\mathfrak{A}$ be the definite quaternion algebra over $\mathbb{Q}$ having discriminant p^2, p a prime $\equiv 1 \pmod 4$. Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $\mathfrak{A}_K = \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{Q}} K$. Put $V = \{\alpha \in \mathfrak{A}_K \mid \bar{\alpha}^* = \alpha\}$, where $*$ is the canonical involution and $\bar{\ }$ is the $\mathfrak{A}$-automorphism of $\mathfrak{A}_K$ induced by the conjugation on K. We establish a one-to-one correspondence between the maximal orders of $\mathfrak{A}$ and certain maximal lattices of discriminant p in V. This correspondence is one-to-one from type classes of maximal orders to similitude classes of maximal lattices except for the maximal orders containing an element $\pi, \pi^2 = -p$, in which case the correspondence is "usually" two-to-one. Interpreted classically, this gives a correspondence from the set of classes of quaternary forms of discriminant p^2 representing one onto the set of classes of quaternary forms of discriminant p representing one which is one-to-one except for the quaternary forms of discriminant p^2 which represent p. Our correspondence yields a "quaternionic" interpretation of some results of Kitaoka (Nagoya Math.J. 52 (1974), 147 - 161).

R.BAEZA: Quadratische Formen über semi-lokalen Ringen.

Sei A ein semi-lokaler Ring. Für zwei quadratische Formen q_1, q_2 über A definiert man ein Produkt durch $q_1 \circ q_2 = b_{q_1} \otimes q_2 \cong b_{q_2} \otimes q_1$ (b_q = Bilinearform von q).
Mit diesem Produkt ist die Witt-Gruppe Wq(A) der nicht singulären quadratischen Formen über A ein (komm.) Ring (i.a. ohne 1). Es gilt dann

Satz 1. Die Ordnung eines Torsionselements in Wq(A) ist eine Potenz von 2.

Satz 2. Sei $X \in Wq(A)$. X ist nilpotent genau dann, wenn X Torsionselement und gerade-dimensional ist.

Beim Beweis von Satz 1,2 benutzt man folgendes Resultat: ist $A \to B = A \oplus Az$, $z^2 = z + t$, $1 + 4t \in A^*$ eine quadratische Erweiterung von A, so gilt $\mathrm{Ker}(Wq(A) \to Wq(B)) = W(A).[1,-t]$, wobei $[1,-t]$ die Form mit Wertematrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix}$ ist.

Insbesondere für einen semi-lokalen Ring A mit $|A/m| \geqslant 3$ für alle $m \in \max(A)$ erhält man aus Satz 1,2:

$$\mathrm{Nil}(Wq(A)) = \sum_{\substack{a \in \boxed{\infty} \\ 1+4a \in A^*}} W(A) \cdot [1,-a]$$

wobei $\boxed{\infty} = \{ \sum_{\text{endl.}} b_i^2 \mid b_i \in A \}$ ist.

Mit Hilfe der Produktstruktur in Wq(A) kann man auch folgendes Resultat beweisen: Sei $A \to B$ eine Galois-Erweiterung ungeraden Ranges mit Galoisgruppe G. Dann ist $Wq(A) \to Wq(B)$ injektiv und $W_q(A) = Wq(B)^G$.

M.KNEBUSCH: Generische Zerfällung quadratischer Formen

Sei φ eine nicht zerfallende quadratische Form über einem Körper K einer Char $\neq$ 2, und sei

$$j_0 < j_1 < \dots < j_n$$

die Menge der Wittindizes, die für die Formen $\varphi \otimes L$ bei beliebigen Erweiterungen L des Grundkörpers K auftreten. Wir konstruieren einen "generischen Zerfällungsturm"

$$K_0 = K \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$$

von Körpern mit der folgenden universellen Eigenschaft:

1) $\varphi \otimes K_s$ hat den Wittindex j_s für $0 \leq s \leq h$;

2) Ist L eine beliebige Körpererweiterung von K und j_r der Wittindex von $\varphi \otimes L$, so gibt es eine Stelle $\lambda : K_r \longrightarrow L \cup \infty$ über K, aber es gibt keine Stelle von K_{r+1} nach L über K. Es gilt dann weiter:

3) Bzgl. jeder solchen Stelle λ hat die Kernform φ_r von $\varphi \otimes K_r$ "gute Reduktion", und ihre Spezialisierung $\lambda_*(\varphi_r)$ ist die Kernform von $\varphi \otimes L$.

Wir nennen h die Höhe der Form φ. Die Formen der Höhe 1 sind bis auf skalare Faktoren genau die anisotropen Pfisterformen $(1,a_1) \otimes \dots \otimes (1,a_m)$ $(m \geq 1)$ und ihre Teilformen der Kodimension 1 $(m \geq 2)$. Allgemein hat φ_{h-1} die Höhe 1, und somit ist zu φ_{h-1} eine Pfisterform über K_{h-1} assoziiert, die wir als die Leitform von φ bezeichnen. Die Betrachtung der Dimensionen der Leitformen führt auf ein Problem von zentraler Bedeutung für die algebraische Theorie der quadratischen Formen.

J.ARASON: Cohomologische Invarianten quadratischer Formen.

Ausgehend von den Invarianten Dimensionsindex, Diskriminante und Cliffordalgebrenklasse quadratischer Formen, die als Homomorphismen von $W(K)$, $I(K)$ bzw. $I^2(K)$ in die Galois-Cohomologiegruppen $H^0(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ bzw. $H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ verstanden werden können - wobei $W(K)$ den Wittring des Körpers K, char $K \neq 2$, und $I(K)$ das maximale Ideal gerade dimensionaler Formen in $W(K)$ bezeichnen - werden die funktoriellen Eigenschaften von $W(K)$, des graduierten Wittringes $Wq_r(K) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n(K)/I^{n+1}(K)$ und des Cohomologieringes $H^*(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ studiert und verglichen. Es wird dann eine neue Invariante $I^3(K) \to H^3(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ definiert; weiter werden einige Resultate über Kern und Bild der Cliffordalgebrenklasse vorgetragen.

L.J.GERSTEIN: Classes of hermitian forms.

The integral classification problem for hermitian forms over algebraic number fields will be considered, with particular attention to class numbers of definite forms over quadratic fields. Every definite lattice has a unique splitting (possibly trivial) into indecomposables. With this observation and local representation theory as the main tools, an association is given between classes in the genus of a definite n - ary lattice and partitions of roughly $\lceil n/8 \rceil$, and this yields a lower bound for the class number. The heart of the matter lies in the construction of indecomposable definite even unimodular lattices. It will be seen that these exist over $Q(\sqrt{m})$ (when $m < 0$, m squarefree, $m \not\equiv 1 \ (4)$) in each dimension $n \equiv 0 \pmod 4$, and examples will be provided. Connections with quadratic forms will be mentioned.

C.R.RIEHM: Sesquilinear forms over fields.

Let F be a field and I an automorphism of F of finite order s. The problem considered is the equivalence $f \simeq g$ of two non-degenerate I-sesquilinear forms.

The symmetry of f is the unique I^{-2}-linear automorphism α of the space V of f, satisfying $f(u,v) = f(v,\alpha u)^I$ for all u and v. If $F[X]$ is the twisted polynomial ring satisfying $Xa = a^{I^{-2}} X$ for all a in F, V becomes an $F[X]$-module via $X \cdot v = \alpha(v)$. There is a structure theory for such modules analogous to the ordinary case $Xa = aX$, namely one gets a primary decomposition $V = \coprod_p V_p$ where $p \in \operatorname{cen} F[X]$. Let f_p be the restriction of f to $V_p \times V_p$. Then if W is the space of g,

Theorem. $f \simeq g$ iff V and W are isomorphic as $F[X]$-modules and $f_p \simeq g_p$ for all self-dual p.

Here self-dual means that $p = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_o$ is a constant multiple of $a_o^I X^n + a^I{}_1 X^{n-1} + \ldots + a_n^I$.

Now let $\pi = \alpha^{-\deg p}\, p(\alpha)$ and consider the sesquilinear form $f(\pi^{i-1}u,v)$ on $V(i) = \ker p^i, i \geqslant 1$. It induces a non-degenerate sesquilinear form on $V(i)/pV(i)$. The latter is a module over the simple ring $F[\xi] = F[X]/(p)$ which has an involution $K_p : \Sigma a_i \xi^i \mapsto \Sigma \xi^{-i} a_i^I$. This sesquilinear form is $= \tau_* f_{p,i}$ where $\tau : F[\xi] \to F$ is a suitable F-trace and $f_{p,i}$ is a non-degenerate Hermitian form over $F[\xi]$.

Call K_p non-defective if every "symmetric" element a of $F[\xi]$ $(\xi a^{K_p} = a)$ is a "trace", i.e. is of the form $b + \xi b^{K_p}$. Then

<u>Theorem.</u> If K_p is non-defective, $f_p \simeq g_p$ iff $f_{p,i} \simeq g_{p,i}$ for all i.

(The case of defective K_p occurs only in char 2.)

A.NOBS: <u>Weilsche Darstellungen der Gruppen $SL(2,\mathbb{Z}/p^\lambda\mathbb{Z})$.</u>

Jede Darstellung der $SL(2,\mathbb{Z}_p)$ läßt sich über $SL(2,\mathbb{Z}/p^\lambda\mathbb{Z})$ für passendes λ faktorisieren. Die Gruppen $SL(2,\mathbb{Z}/p^\lambda\mathbb{Z})$ werden durch drei Familien von erzeugenden Elementen und 6 Relationen präsentiert. Die Methode von A.Weil besteht darin, daß man, ausgehend von quadratischen Formen auf $\mathbb{Z}/p^\lambda\mathbb{Z}$-Moduln, Darstellungsmatrizen für die Erzeugenden der Gruppen $SL(2,\mathbb{Z}/p^\lambda\mathbb{Z})$ definiert und die Verträglichkeit mit den 6 Relationen nachweist. Äquivalente bzw. inäquivalente quadratische Formen ergeben dabei äquivalente bzw. inäquivalente Darstellungen. Die quadratischen Formen auf endlichen $\mathbb{Z}/p^\lambda\mathbb{Z}$ -Moduln werden vollständig klassifiziert.

J. WOLFART: Automorphismengruppen quadratischer Moduln und die irreduziblen Darstellungen von $SL_2(\mathbb{Z}_2)$.

Für die Weilschen Darstellungen R_λ der Gruppen $SL_2(\mathbb{Z}/2^\lambda\mathbb{Z})$, welche mit Hilfe binärer quadratischer Formen auf einem $\mathbb{Z}/2^\lambda\mathbb{Z}$ -Modul M konstruiert werden, wird folgende Zerlegungsmethode angegeben:

Die Automorphismengruppe der zugrundeliegenden quadratischen Form ist Diedererweiterung einer endlichen abelschen Gruppe ("Drehgruppe") D oder selbst abelsch. Jedem Charakter χ von D läßt sich nach Kloosterman eine Unterdarstellung $R_\lambda(\chi)$ von R_λ zuordnen: Der zugrundeliegende invariante Unterraum besteht aus allen $f \in \mathbb{C}^M$, welche

$$g(\varepsilon x) = \chi(\varepsilon)\cdot f(x) \qquad \forall\, x \in M,\ \varepsilon \in D$$

erfüllen. R_λ ist direkte Summe der $R_\lambda(\chi)$.

Unter den so konstruierten $R_\lambda(\chi)$ treten fast alle irreduziblen Darstellungen der Gruppen $SL_2(\mathbb{Z}/2^\lambda\mathbb{Z})$ auf. Durch Tensorieren (bzw. durch Verwendung quaternärer quadratischer Formen) gewinnt man aus ihnen auch noch die übrigen.

Damit erhält man gleichzeitig alle stetigen unitären irreduziblen Darstellungen von $SL_2(\mathbb{Z}_2)$ für den Ring $\mathbb{Z}_2$ der 2-adischen ganzen Zahlen.

W.D.GEYER: Symmetrische lineare Abbildungen.

Untersucht werden Bedingungen dafür, wann ein Polynom $f \in k[X]$ vom Grad n über einem Körper k das charakteristische Polynom einer symmetrischen $n \times n$ - Matrix ist, bzw. allgemeiner, welche Matrizen konjugiert zu symmetrischen sind. Hat k die Stufe 1, sind dies alle; hat k die Stufe n, $1 < n < \infty$, so gibt es n-reihige Matrizen, die nicht konjugiert zu symmetrischen Matrizen sind, während alle 2n-reihigen Matrizen symmetrisierbar sind. Notwendige und hinreichende Bedingungen für Symmetrisierbarkeit werden angegeben für endliche und p-adische Körper ($p \neq 2$), im letzteren Falle müssen gewisse Faktoren des Minimalpolynoms einen ungeraden Verzweigungsindex besitzen. Hieraus folgt eine Konstruktion von positiv definiten symmetrischen Matrizen $A \in M_n(\mathbb{Z})$, deren charakteristisches Polynom die Galoisgruppe $\mathfrak{S}_n$ hat.

M.KAROUBI: Lokalisierung quadratischer Formen.

A sei (nicht notwendig kommutativer) Ring mit Involution, $\frac{1}{2} \in A$. L(A) sei die Grothendieckgruppe der hermiteschen Moduln. Die "Wittgruppe" W(A) sei der Kokern, die "Co-Witt-

W'(A)

gruppe" der Kern des Morphismus $H: K(A) \to L(A)$ mit $H(N) = N \oplus {}^tN$, ${}^tN = \{f \in \mathrm{Hom}_A(N,A) \mid f(x\lambda) = \bar{\lambda} f(x),\ \lambda \in A\}$. Für diese Gruppen gilt z.B.: $W(A[X]) = W(A)$

$A = \mathbb{Z}[\pi]$: $W'(A) = L_o^h(\pi)$ (Surgery-Gruppe).

Es lassen sich höhere Witt- und Co-Wittgruppen definieren

$W_n(A) = \mathrm{coker}\,(K_n(A) \to L_n(A))$

$W_n'(A) = \ker\,(K_n(A) \to L_n(A'))$

Dabei ist $L_n(A) = \pi_n(B^t_{o(A)})$.

Modulo 2-Torsion gilt: $W_n(A) \cong W_n(A[X])$, $W_n(A) \cong W_{n+4}(A)$.

Für ein Diagramm von Ringen

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "\alpha"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] & D \end{tikzcd}$$

, wo α oder β surjektiv sind, gilt eine exakte Sequenz

$$\ldots \to W_{n+1}(B) \oplus W_{n+1}(C) \to W_{n+1}(D) \to W_n(A) \to W_n(B) \oplus W_n(C) \to .$$

mod 2-Torsion.

A.BAK: K_1 <u>of quadratic modules over commutative orders.</u>

Let B be a commutative finite semisimple $\mathbb{Q}$-algebra with involution and A an involution invariant order on B. We shall assume that B is real, namely that $\{b \in B \mid b = \bar{b}\}$ is a product of fields each of which has at least one real archimedian completion. In addition let us assume that the composite $A \to \mathfrak{O} \to \mathfrak{O}_i$ is surjective where $\mathfrak{O}$ is the unique maximal order on B and $\mathfrak{O}_i$ is the ring of integers in F_i ($B = F_1 \times \ldots \times F_r$ product of fields).

Example: $\mathbb{O}\pi$ wirh π a finite abelian group.

<u>Theorem 1.</u> Let Λ be a form parameter for A and let $KQ_1(A,\Lambda)$ be K_1 of the category of nonsingular Λ-quadratic modules. Let $SKQ_1(A,\Lambda)$ be the kernel of the determinant map $KQ_1(A,\Lambda) \to A^*$. Let $\hat{A}$ and $\hat{B}$ denote respectively the adèle rings of A and B. Then we have a canonical exact sequence:

$$0 \to SKQ_1(A,\Lambda) \to SKQ_1(\hat{A},\hat{\Lambda}) \oplus SKQ_1(B,\Lambda \otimes \mathbb{Q}) \to SKQ_1(\hat{B},\mathbb{Q} \hat{\otimes} \Lambda)$$

<u>Theorem 2.</u> The image of the hyperbolic map

$$\mathbb{H} : SK_1(A) \to SKQ_1(A,\Lambda)$$

is trivial.

<u>Corollary.</u> If π is a finite abelian group then there are exact sequences

$$1 \to SKQ_1^1(\mathbb{Z}\pi) \to KQ_1^1(\mathbb{Z}\pi,\Lambda) \xrightarrow{\det} \pm\pi^2 \to 1$$

$$1 \to SKQ_1^{-1}(\mathbb{Z}\pi,\min) \to KQ_1^{-1}(\mathbb{Z}\pi,\min) \xrightarrow{\det} \pi^2 \to 1$$

$$1 \to SKQ_1^{-1}(\mathbb{Z}\pi,\max) \to KQ_1^{-1}(\mathbb{Z}\pi,\max) \xrightarrow{\det} \pi^2 \to 1$$

These exact sequences can be used for the computation of the surgery groups L_n^s and L_n^h of C.T.C.Wall.

C.T.C.WALL: <u>Calculations of surgery obstruction groups.</u>

The usual method for classifying quadratic or hermitian forms over orders can be extended as follows.

Let R be an order in a semisimple algebra S, finite over $\mathbb{Q}$; $\hat{R}_p$ its p-adic completion, $\hat{R} = \Pi\, \hat{R}_p$, $\hat{S} = \hat{R} \otimes \mathbb{Q}$, $T = S \otimes \mathbb{R}$. With the intermediate L-groups defined in the talk with Bak and taking $X = \operatorname{Ker} K_1(R) \to K_1(\hat{S})$ etc., there is an exact sequence

$$\ldots\ L_n^X(R) \to L_n^X(\hat{R}) \oplus L_n^X(S) \to L_n^X(\hat{S}) \to L_{n-1}^X(R)\ \ldots$$

The Hasse principle yields injectivity of $L_n(S) \to L_n(\hat{S}) \oplus$ $\oplus\, L_n(T)$; the cokernel can be computed. One calculates $L_n^X(\hat{R}_p)$ by reduction modulo the radical; in the case $p = 2$ the details are more complicated and one needs also information about the group $K_1'(\hat{R}_2)$ of reduced norms of units of $\hat{R}_2$.

In the case when $R = \mathbb{Z}\pi$ is a group ring, induction theorems of Andreas Dress allow one to reduce the calculation to the case, π 2-hyperelementary; and these groups can be split as direct sums according to representations of the Hall 2'-subgroup. For π a 2-group there is substantial simplification, using the result that the real subfield of the field of 2^n th roots of unity has strict class group of odd order.

A.A.RANICKI: <u>Quadratic forms on chain complexes.</u>

Abstract Poincaré - Lefschetz duality defines a cobordism equivalence relation on A-Module chain complexes with abstract n-dimension quadratic Poincaré duality, for any ring with involution A. The cobordism classes are the Wall surgery obstruction groups $L_n(A)$ ($\equiv L_n(\pi)$ if $A = \mathbb{Z}[\pi]$, π a group). The quadratic theory proceeds by analogy with the symmetric theory, which was developed by Miščenko (Izv.Akad. Nauk SSSR, 1971).

D.G.JAMES: The structure of integral orthogonal groups.

Let R be the ring of integers in a field F complete with respect to a discrete valuation. Assume the characteristic of the residue class field is not two. Let V be a nonsingular finite dimensional quadratic space over F and M a lattice on V with Jordan decomposition

$$M = M_1 \perp \dots \perp M_h$$

where each M_i is a modular lattice. Both the orthogonal groups O(V) and O(M) are topological groups inheriting a p-adic topology from the topology on F. The (open) normal subgroups in O(M) are studied. The approach uses the Clifford algebra of V and includes, in particular, results of L.Bröcker, B.Pollak and C.Riehm obtained by other methods.

H.-J.BARTELS: Klassifikation und Invarianten bei hermiteschen Formen über Schiefkörpern.

D sei zentraler Schiefkörper endlicher Dimension über dem Grundkörper K mit einer Involution δ erster Art über K. Ist etwa δ vom alternierenden Typ und $[K:Q] < \infty$, so benötigt man für die Klassifikation δ-schiefhermitescher Formen neben der

Dimension und der Diskriminante weitere Invarianten. Nach Ideen von M.Kneser kann man bei beliebigem Grundkörper K ein kohomologisches Analogon der Hasse - Witt - Invariante konstruieren und diese Invariante für die Klassifikation schiefhermitescher Formen im Falle $[K:\mathbb{Q}] < \infty$ verwenden.

K.SZYMICZEK: Some properties of the Grothendieck ring of quadratic forms over a field.

The talk is concerned with group structure of the Grothendieck ring G(F) of a field F. First the torsion elements are characterized by their behaviour under localization and then it is proved that the torsion subgroup $G_t(F)$ of G(F) coincides with the intersection of all direct summands of G(F) complementary to the one generated by the identity element of the ring G(F).

An explicit form of the Springer's theorem for G(F) is stated and proved. Some estimates for the rank of the group G(F) are given and also examples showing the bounds to the best possible.

S.J.PATTERSON: Die analytische Theorie ternärer quadratischer Formen.

Q(x) sei eine indefinite quadratische Form mit positiver Diskriminante. B(x,y) sei die symmetrische bilineare Form, so daß

$$Q(x) = B(x,x)$$

gilt. d sei eine positive ganze Zahl, und y sei ein ganzzahliger Vektor. Wir untersuchen die Anzahl von Lösungen von

$$Q(\underline{x}) = d$$

$$|B(x,y)| \leq X$$

wo $\underline{x}$ ein ganzzahliger Vektor ist. Die Methode basiert auf Selbergs Spurformel.

M.PETERS: Representations by ternary quadratic forms.

Let E be a 3-dimensional $\mathbb{Z}$-lattice in a quadratic space with a quadratic form $f:E \to \mathbb{Z}$. Let $\overline{f}(E) :=$

$$\{a \in \mathbb{Z} | a \in f(E_p) \text{ for all primes } p \cup \{\infty\}\}.$$

Assume the general Riemann hypothesis; then we have a theorem:

$\overline{f}(E) \setminus f(E)$ consists of finitely many square classes in $\mathbb{Z}$.

This can be proved using the strong approximation theorem and the methods of Linnik-Malyshev for ternary forms.

A.Heuser (Regensburg)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft