MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 17/1975

Mathematische Logik

20.4. bis 26.4.1975

Die diesjährige Tagung zur mathematischen Logik stand unter der Leitung von K.Schütte (München) und E.Specker (Zürich). Die Tagung wurde von 41 Teilnehmern besucht, unter denen sich wie in den vergangenen Jahren auch wieder zahlreiche ausländische Gäste befanden. Es wurden 20 Vorträge aus den verschiedensten Gebieten der mathematischen Logik gehalten.

Teilnehmer

K.R. Apt, Nijmegen
J. Bergstra, Utrecht
P. Bernays, Zürich
W. Buchholz, München
H.G. Carstens, Hannover
G,L. Cherlin, Heidelberg
H. Czermak, Salzburg
R. Deissler, Freiburg
J. Diller, Münster
V.H. Dyson, Calgary
U. Felgner, Heidelberg
W. Felscher, Tübingen
H. Hermes, Freiburg
G. Kreisel, Salzburg
H. Läuchli, Zürich
D. Leivant, Amsterdam
H. Luckhardt, Frankfurt
W. Maass, München
K. McAloon, Paris
H. Osswald, München
A. Oberschelp, Kiel
L. Pacholski, Wroclaw
H. Pfeiffer, Hannover
K.-P. Podewski, Hannover
W. Pohlers, München
B. Scarpellini, Basel
W. Schönfeld, Stuttgart
K. Schütte, München
J. Schulte Mönting, Tübingen
W. Schwabhäuser, Stuttgart
H. Schwichtenberg, Heidelberg
D. Scott, Oxford
D. Siefkes, Berlin
E. Specker, Zürich
R. Statman, Cambridge
G. Takeuti, Heidelberg
W. Thomas, Freiburg
A.S. Troelstra, Amsterdam
H. Volger, Tübingen
P. Weingartner, Salzburg
V. Weispfenning, Heidelberg

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

G. TAKEUTI: Boolean valued analysis

This is an application of Scott and Solovay's Boolean valued models of set theory. The complete Boolean algebras we take are complete Boolean algebras of projections in Hilbert spaces. We give interpretation of several concepts in analysis. The following applications to differential equations are given. By considering some differential operators as normal operators and therefore complex numbers in a Boolean valued model, an existential theorem of partial differential equations is obtained from the theory of ordinary differential equations.

K.-P. PODEWSKI: Über der Mengerschen Satz

Sei G ein Graph. Eine Menge L von paarweise disjunkten Wegen $(a_i)_{i<k\leq\omega}$ heisst Verbindung. Anf(L) bezeichne die Menge der Anfangsecken von L und End(L) die Menge der Endecken.

Satz (Steffens, Podewski)

Für jede abzählbare Eckenmenge A gibt es genau dann eine Verbindung L mit Anf(L) = A und End(L) = $\emptyset$, wenn es zu jeder Verbindung K mit Anf(K) = A und zu jedem $e \in$ End(K) eine Verbindung N gibt mit Anf(N) = A und End(N) $\subseteq$ End(K)$\setminus\{e\}$.

Hieraus folgt eine Verallgemeinerung des Mengerschen Satzes für unendliche Graphen.

Korollar (Steffens, Podewski)

Seien A, B abzählbare Eckenmengen. Dann gibt es eine A und B trennende Eckenmenge S und eine Verbindung L mit Anf(L) $\subseteq$ A und End(L) $\subseteq$ B, so dass gilt:

1. Jeder Punkt aus S liegt auf einem Weg aus L.
2. Auf jedem Weg aus L liegt genau ein Punkt aus S.

H.G. CARSTENS: Existentiell abgeschlossene planare Graphen

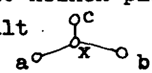
1. Planare Graphen

Die endlichen und nach Dirce und Schuster auch die abzählbaren Graphen sind durch die Kuratowskischen Bedingungen charakterisiert. Wie Wagner gezeigt hat, gilt dies nicht mehr für Graphen mit kontinuum-vielen Ecken. Seine Charakterisierung zeigt, dass die Theorie der planaren Graphen nicht erststufig ist. Wir beschränken uns auf die erste Stufe und verstehen unter einem planaren Graphen eine Struktur (E,K), wobei K eine zweistellige reflexive, symmetrische Relation über E ist, und in der die Kuratowskischen Bedingungen gelten. Dementsprechend ist die zugehörige Theorie axiomatisiert durch die Eigenschaften von K und die Kuratowskischen Bedingungen. Zusammen mit Podewski sind folgende Resultate erzielt worden:

(1) Die Theorie der planaren Graphen ist nicht endlich axiomatisierbar.

(2) Die Theorie der planaren Graphen hat keinen Modellbegleiter.

2. Sternabgeschlossene planare Graphen

Ein planarer Graph G heisse sternabgeschlossen g.d.w. a) G hat mindestens eine Kante b) G hat keinen planaren Obergraphen, der folgenden Teilgraphen enthält 

mit a,b,c $\in |G|$ und x $\notin |G|$.

Ein solcher Teilgraph heisse ein einfacher Stern und alle homöomorphen Graphen Sterne. Die Ecken vom Grade 1 in einem Stern heissen Basisecken. Zwei Ecken haben zwei disjunkte Sterne, falls sie Basisecken von zwei disjunkten Sternen sind. Nun gilt:

(3) Jeder sternabgeschlossene planare Graph ist zweifach zusammenhängend.

(4) Jeder sternabgeschlossene planare Graph kann in dreifach-zusammenhängende Teilgraphen zerlegt werden, die wieder sternabgeschlossen sind.

(5) G planarer sternabgeschlossener Graph oder G 2-fach-zusammenhängender planarer Graph und je drei paarweise verschiedene Ecken haben genau zwei disjunkte Sterne.

Verschiedene Varianten dieser Charakterisierung werden angegeben.

(6) Die Klasse der sternabgeschlossenen planaren Graphen hat die Amalgamierungseigenschaft.

(7) Die Klasse der sternabgeschlossenen planaren Graphen ist die der pregenerischen planaren Graphen.

3. Algebraisch und existentiell abgeschlossene planare Graphen

(8) Jeder algebraisch abgeschlossene planare Graph ist existentiell abgeschlossen.

(9) Ein planarer Graph G ist genau dann existentiell abgeschlossen, falls a) G sternabgeschlossen ist und b) zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind oder in einem planaren Obergraphen (ohne neue Ecken) verbunden sind, sind Ecken in einem isomorphen Bild eines jeden endlichen planaren Graphen.

(10) Einen existentiell abgeschlossenen planaren Graphen kann man wie folgt konstruieren:
Sei D_o, $D_1, \ldots$ eine Folge aller endlichen Dreiecksgraphen. $G_o := D_o$. G_{n+1} entstehe aus G_n indem in jede Fläche von G_n der Graph D_{n+1} "eingesetzt" wird. $G = \bigcup_n G_n$ ist ein existentiell abgeschlossener planarer Graph.

U. FELGNER: <u>$\aleph_o$-kategorische nicht-abelsche Gruppen</u>

Aus dem Satz von Engeler-RyllNardzewski-Svenonius folgt, dass jede Gruppe G mit $\aleph_o$-kategorischer Theorie Th(G) lokal-endlich ist, aber nicht, dass sie auch lokal-normal ist (Def.: G ist lokal-normal $\longleftrightarrow$ jede endliche Teilmenge $T \subset G$ ist in einem endlichen Normalteiler von G enthalten). Um Struktur-Aussagen über Gruppen mit $\aleph_o$-kategorischer Theorie zu gewinnen, wollen wir daher fordern, dass die betrachtete Gruppe eine FC-Gruppe ist. <u>Def.</u> (R.Baer): G ist FC-Gruppe $\longleftrightarrow$ jedes Element $g \in G$ besitzt nur endlich viele Konjugierte. FC-Gruppen mit $\aleph_o$-kategorischer Theorie sind lokal-normale, periodische Gruppen. Es wurde gezeigt, dass der Sockel einer FC-Gruppe G mit $\aleph_o$-kategorischer Theorie fast-abelsch ist. Daraus folgt dann:
<u>HAUPTSATZ:</u> Sei G eine FC-Gruppe mit $\aleph_o$-kategorischer Theorie. Dann existiert eine endliche Normalreihe $\{1\} = H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n = G$ (alle H_i sind definierbare Normalteiler) derart, dass $H_{j+1}/H_j = A_j \oplus F_j$ (alle $1 \leq j < n$) wobei A_j abelsch, F_j endlich. Falls G überdies lokal-nilpotent ist, dann ist G sogar nilpotent, falls G überdies lokal-auflösbar ist, dann ist G auflösbar. Für p-Gruppen G mit $\overline{\overline{Cl_G(g)}} = 1$ oder $\overline{\overline{Cl_G(g)}} = p$ wurden Erzeugende und definierende Relationen gefunden.

V. WEISPFENNING: Modellvollständigkeit und Primmodellerweiterungen für subdirekte Produkte von Strukturen

Jeder gegebenen Sprache L wird eine zweisortige Sprache L^* bestehend aus L, der Sprache B der Booleschen Algebren, und Funktionszeichen für "Wahrheitsfunktionen" von atomaren L-Formeln zugeordnet. In L^* können subdirekte Produkte von L-Strukturen durch ein Axiomensystem P_0 charakterisiert werden. Jeder Theorie K in L werden Theorien K^*UP_0, K^*UP, K^*UP' zugeordnet, deren Modelle grosse Klassen von subdirekten Produkten von Modellen von K bilden. Es wird gezeigt, dass verschiedene modelltheoretische Eigenschaften wie die Einbettungseigenschaft, die Amalgamierungseigenschaft, Modellkonsistenz, Modellvollständigkeit, Quantorenelimination sich von K auf K^*UP_0, K^*UP bzw. K^*UP' übertragen. Als Anwendungen ergeben sich u.a. die Existenz von Modellvervollständigungen T für die Theorie der kommutativen regulären Ringe (Lipschitz-Saracnio), für die Theorie der kommutativen regulären f-Ringe (Verallgemeinerung von Macintyre) und der Theorie der kommutativen regulären Differentialringe der globalen Charakteristik 0, sowie primitiv rekursive Quantoreneliminationsverfahren für die Theorien T.

Sei nun K eine substruktur-vollständige Theorie in L. Es wird das folgende Kriterium für die Existenz von Primmodellerweiterungen für K^*UP' gezeigt.

Satz 1 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Für jedes Modell A von $K_\forall$ sind die Typen vom Rang 0 und Grad 1 dicht in $S_1(A)$.

(ii) Jedes Modell B von $K^*_\forall UP_0$ hat eine Primmodellerweiterung zu einem Modell von K^*UP' .

Wir haben ausserdem das folgende Resultat über Eindeutigkeit und Minimalität von Primmodellerweiterungen:

Satz 2 Seien (i) oder (ii) von Satz 1 erfüllt. Dann gilt:

(i) Je zwei Primmodellerweiterungen eines Modells B von $K^*_\forall UP_0$ sind isomorph über B .

(ii) Ein Modell B von $K^*_\forall UP_0$ hat eine minimale Primerweiterung zu einem Modell von K^*UP' genau dann, wenn die Boolesche Algebra B_B von B atomfrei ist.

L. PACHOLSKI: Saturatedness of limit ultrapowers

Let F be an ultrafilter on I and G a filter over I. We give a characterization of those pairs which have the property that for every relational structure A the limit ultrapower $A^I_F G$ is $^+$-saturated. The notion used to obtain this characterization is a natural extension of Keisler's notion of a -good ultrafilter. We also deal with problems of homogenity and universality of limit ultrapowers.

H. VOLGER: The Feferman-Vaught theorem revisited

The theorem of Feferman and Vaught on generalized products in Fund.Math.47(1959),57-103 can be extended to a certain class of boolean-valued structures, which includes reduced products, limit reduced powers, boolean reduced powers, restricted boolean reduced powers and the structures of sections of Comer. Thus the result covers all the known results of the Feferman-Vaught type. A boolean-valued structure $\langle A,B,E,R\rangle$ is called finitely complete if for every pair of elements a_1,a_2 in A with $E(a_1,a_1)\geqslant b$ and $E(a_2,a_2)\geqslant -b$ there exists a in A with $E(a,a_1)\geqslant b$ and $E(a,a_2)\geqslant -b$. $\langle A,B,E,R\rangle$ satisfies the maximum principle if for every formula $\psi(x,a_1,\dots,a_n)$ there exists a in A with $[\exists x\psi(x,a_1,\dots,a_n)] = [\psi(a,a_1,\dots,a_n)]$. The quotient $\langle A,B,E,R\rangle/D$ with respect to a filter D on B is obtained by identifying a_1 and a_2 in A if $E(a_1,a_2)$ is in D. Now the result can be stated as follows: For every formula φ there exists a finite sequence of formulas $\psi_1,\dots,\psi_m$ and a formula Φ of the language of BA's such that for every boolean-valued structure $\langle A,B,E,R\rangle$ which is finitely complete and satisfies the maximum principle and for every filter D on B the following statements are equivalent: (i) $\langle A,B,E,R\rangle/D \models \varphi(a_1/D,\dots,a_n/D)$, (ii) $B/D \models \Phi([\psi_1(a_1,\dots,a_n)]/D,\dots,[\psi_m(a_1,\dots,a_n)]/D)$.

A.S. TROELSTRA: Completeness of intuitionistic predicate calculus

Completeness here refers to validity for all intuitionistically meaningful domains and relations. A summary and refinement of known results due to Kreisel-Gödel and Dyson-Kreisel shows that we can establish weak completeness

$$\mathrm{Valid}(A) \rightarrow \neg\neg\exists x\, \mathrm{Proof}_{IPC}(x, \ulcorner A \urcorner)$$

(IPC = intuitionistic predicate calculus) provided we take as domain N (N = natural numbers) and relations r.e. in parameters ε , α , ε ranging over lawless sequences in a fan, α ranging over choice sequences satisfying

(1) $\forall\alpha\neg\neg\exists x A(\bar{\alpha}x) \rightarrow \neg\neg\forall\alpha\exists x A(\bar{\alpha}x)$.

(1) together with $\forall\alpha\neg\neg\exists a(\alpha = a)$ (a ranging over lawlike sequences) implies the negation of Church's thesis. Conversely, weak completeness for IPC implies (1) .

Finally, the recursion-theoretic complexity of Beth-models needed for a completeness result is discussed; we certainly get by with Beth-models on a binary tree and Σ^0_2-definable sets of valid atomic formulae in the nodes ; binary recursive trees with Σ^0_1-definable sets of valid atomic formulae are not sufficient, as can be shawn by a counterexample.

D. LEIVANT: Incompleteness of Intuitionistic Predicate Logic for Constructive Models

We intend to improve the exposition in [1] , [2] of Kreisel's proof [3] that the incompleteness of Intuitionistic Predicate Logic $\mathcal{L}_1$ is inconsistent with Church's thesis CT (:= "every function is recursive").

The technical aspects of the revised proof allow

(1) a neater circumscription of the formal setting of the proof;

(2) a simplified recursion theoretic technique.

The method is then slightly refined to yield

(3) a specific schema, unprovable in $\mathcal{L}_1$, but valid under CT ;

(4) a specific schema, unprovable in $\mathcal{L}_1$, but of whose all Σ^0_1 meta-substitutions are provable in Heyting's Arithmetic $\mathcal{A}$.

Item (4) shows that the result of [4] , stating that $\mathcal{L}_1$ is absolute for $\mathcal{A}$ by Π^0_2 meta-substitution , is optimal.

[1] D. van Dalen: Lectures on Intuitionism; in Cambridge Volume (Springer's Lecture Notes vol. 337, 1972) ; sec. 4 .

[2] D. Leivant: On completeness properties of Intuitionistic Logic; report of the Mathematisch Centrum, Amsterdam (1972); sec.4 .

[3] G. Kreisel: Church's thesis , in Buffalo Volume (Noord Holland, 1970) .

[4] D. Leivant: Absoluteness properties of Intuitionistic Logic ; forthcoming .

J. DILLER: Realisation und Normalisation der Heyting-Arithmetik endlicher Typen

Wir betrachten ein mit natürlichen Herleitungen formuliertes System HA_ω der intuitionistischen Zahlentheorie endlicher Typen. Nach dem Normalisationssatz für HA_ω ist jeder Herleitung $\Pi \vdash A$ eine normale Herleitung $\Pi^N \vdash A$ zugeordnet, die denselben inhaltlichen Beweis darstellt wie Π . Entsprechend ist nach dem mr-Realisationssatz jeder Herleitung $\Pi \vdash A$ ein Termtupel a und eine Herleitung $mr\Pi \vdash a\, mr\, A$ zugeordnet. Bei einer geringfügigen und vertretbaren Erweiterung des Normalisationsprozesses gilt:

Theorem: $(mr\Pi)^N = mr(\Pi^N)$.

Als Korollar ergibt sich ein Ergebnis von Mints 1973, nach dem die aus $\Pi \vdash \exists uB$ (geschlossen) durch Normalisation und durch mr-Realisation gewonnenen Terme bis auf β-Konversionen übereinstimmen.

R. STATMAN: A Proof-theoretic Refinement of the (equational) Completeness Problem

It is the aim of the theory of proofs to make differenses between sets of axioms and rules "previously judged only by aesthetic criteria of elegance or convience" principal objects of study. In particular, results about the relative complexity of proofs provide criteria of choice between various logically equivalent sets of axioms and rules. We present a refinement of the (equational) completeness problem in terms of the relative complexity of proofs. This problem is called the "maximum efficiency problem". We also provide a positive solution for the maximum efficiency problem for the (satisfiable) finite p-sound calculi of Kreisel and Tait.

H. SCHWICHTENBERG: Infinite Terms and Recursion in Higher Types

Feferman has considered a system T_0 of infinite terms which define functionals of finite type. The terms are inductively generated from variables in all finite types and constants for the ordinary primitive recursive functions by application, abstraction and autonomous enumeration: if for each n, f(n) codes a term $t_n \in T_0$ and f is itself defined by a term of T_0 then the term $\langle t_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ is in T_0. We also consider two other versions of autonomous enumeration: In the first one the enumeration function is replaced by an enumeration functional of arbitrary pure type (giving "long sequences" $\langle t_F \rangle_{F\in\mathfrak{M}_\tau}$), and in the second one the t_F in $\langle t_F \rangle_{F\in\mathfrak{M}_\tau}$ may contain F as a constant. Let T_1, T_2 be the resulting systems of terms. The systems $T_i(\mathcal{F})$ are obtained by relativizing this definition to an arbitrary functional $\mathcal{F}$.

Theorem 1 : F^{n+1} is definable in $T_0(\mathcal{F}^{n+2})$ iff F is primitive recursive in $F_a^{\mathcal{F}}$ for some $a \in O^{\mathcal{F}}$ (this is a generalization of the Kleene hierarchy H_a^{n+1}, $a \in O^{n+1}$, where ${}^{n+2}E$ is replaced by the arbitrary $\mathcal{F}$; see Wainer, JSL 1974).

Corollary (Feferman) : f^1 is definable in $T_0(\mathcal{F}^2)$ iff f is recursive in $\mathcal{F}$.

Corollary : There is an F^2 recursive in ${}^3E$ which is not definable in $T_0({}^3E)$.

Theorem 2 : F^2 is definable in $T_0({}^3E)$ iff F^2 is definable in $T_1({}^3E)$.

Theorem 3 : A functional is definable in T_2 iff it is Kleene recursive.

(The work reported here was done jointly with Stan Wainer, Leeds.)

J. BERGSTRA: On pseudocontinous functionals

We define the notions of a continuous-type structure and of a pseudocontinuous system of functionals (PSF) .

To any ${}^3T$ we associate a function α^T uniformly recursive in the jump of the graph of T on the primitive recursive functionals, such that α^T is an associate of T whenever T is continuous (countable).

Theorem $[T,\alpha^T]$ is a PSF iff ${}^2E \not\leq T \cup \alpha^T$ iff $1\text{-sc}(T \cup \alpha^T)$ is not closed under jump. As corollary we find that $1\text{-sc}({}^3T)$ cannot be the set of arithmetic functions.

Theorem (using GCH). There exists a pseudocontinuous system V of pairwise incomparable functionals such that for all n $V\,\overline{\overline{Tp(n)}} = \overline{\overline{Tp(n)}}$.

W. FELSCHER: Interpolation mit Funktionen

Es wird ein Interpolationssatz für Sequenzenkalküle LK_α , LJ_α und LM_α bewiesen (klassisch, intuitionistisch, minimal mit Konjunktionen und Disjunktionen über Folgen einer Länge unterhalb von α) derart, dass die Interpolationsformel sowohl Prädikatensymbole (und diese sogleich in angebrachter positiver respektive negativer Lozierung) als auch Funktionssymbole interpoliert; dabei ist wesentlich, dass kein Gleichheitssymbol und keine Gleichheitsaxiome benötigt werden. Der Beweis geschieht rein syntaktisch durch Induktion über die Komplexität von Beweisen; zum Zwecke, einer Induktion zugänglich zu sein, muss dabei eine etwas kompliziertere Behauptung als diejenige des Interpolationssatzes selbst betrachtet werden.

J. SCHULTE MÖNTING: Syntaktische Methoden bei der Lösung von Wortproblemen

Für einige Klassen von Verbänden kann man Kalküle vom Gentzentyp aufstellen, die die Menge der gültigen Ordnungsbeziehungen (und damit auch der Gleichungen) beschreiben und die mit der Methode der Schnittelimination als entscheidbar zu erkennen sind. Fügt man der Sprache nun noch die Subjunktionsoperation $\supset$ hinzu (die in diesen Verbänden eigentlich gar nicht oder nur auf Umwegen interpretierbar ist) und gestattet die eingeschränkte Verwendung von sog. Vorbehaltstermen der Form $a \supset b$ (a,b ohne $\supset$) als Parameter oder als Hauptterm links, so gewinnt man neue Kalküle, deren beweisbare Formeln gerade den ableitbaren Regeln der früheren Kalküle entsprechen. Da die Entscheidbarkeit durch diese Erweiterung nicht gestört wird, erhält man so eine Lösung des allgemeinen Wortproblems für die betrachteten Klassen.

W. BUCHHOLZ: Beweisbarkeit der transfiniten Induktion in den Systemen ID_ν und $ID_{\prec*}$ –

Durch Untersuchung der verwendeten Beweismittel lassen sich aus dem Wohlordnungsbeweis für das Ordinalzahlenbezeichnungs-system $\bar{\theta}(\{g\})$ (Buchholz, Normalfunktionen und konstruktive Systeme von Ordinalzahlen, Kiel-Proceedings 1974) folgende Ergebnisse über die Beweisbarkeit der transfiniten Induktion in ID_ν und $ID_{\prec*}$ ableiten:

(1) ID_ν (intuit.) $\vdash$ $TI[\alpha]$, für jedes $\alpha < \theta\varepsilon_{(\Omega_\nu+1)}0$

(2) $ID_{\prec*}$(intuit.) $\vdash$ $TI[\alpha]$, für jedes $\alpha < \theta\varepsilon_{(\Omega_{\Omega_1}+1)}0$.

ID_ν enthält Axiome für die transfinite Induktion über eine gegebene prim. rek. Wohlordnungsrelation $\prec$ vom Ordnungstyp ν und für die ν-fache Iteration von verallg. induktiven Definitionen entlang der Wohlordnung $\prec$. $ID_{\prec*}$ dagegen enthält die definierenden Axiome (ID_1) für den erreichbaren Teil $\prec*$ einer gegebenen prim. rek. Relation $\prec$ und für die Iteration von verallg. induktiven Definitionen entlang des erreichbaren Teils $\prec*$. (Vergleiche: Feferman, Formal Theories for transfinite Iterations ...,Buffalo-Proceedings 1968 .)

Zwischen (1) und (2) besteht folgender Zusammenhang: Setzt man $\nu_0 := \omega$ und $\nu_{n+1} := \theta\varepsilon_{(\Omega_{\nu_n}+1)}0$, so gilt:

(3) $\sup_{n<\omega} \nu_n = \theta\Omega_{\Omega_1}0 < \theta\varepsilon_{(\Omega_{\Omega_1}+1)}0$.

W. POHLERS: Obere Schranken für die Herleitbarkeit der transfiniten Induktion in Teilsystemen der Analysis

Zum Nachweis der Unbeweisbarkeit der transfiniten Induktion bis zu einer Ordinalzahl ξ in einem formalen System T bieten sich im wesentlichen zwei Methoden an:

(i) Man zeigt $T + TI[\xi] \vdash Cons(T)$ und folgert mit dem 2-ten GÖDEL'schen Satz, dass $T \nvdash TI[\xi]$.

(ii) Man misst die Komplexität einer Herleitung in T durch Ordinalzahlen, zeigt dass zu jeder Herleitung eine normale Herleitung einer Komplexität $<\xi$ existiert und beweist schliesslich, dass eine normale Herleitung von $TI[\xi]$ eine Komplexität $\geq\xi$ besitzt. Am elegantesten geschieht dies, indem man

T in ein System T^* mit ω-Regel einbettet, da die Komplexität einer Herleitung in T^* in kanonischer Weise durch die 'Tiefe' des Herleitungsbaumes gegeben ist.

1. Anwendung von (i)

Wir betten die Theorie ID_N in kanonischer Weise in eine Theorie $(\Pi^1_1 - CA)^-_N$ ein. $(\Pi^1_1 - CA)^-_N$ ist eine Theorie 2-ter Stufe mit N-fach geschachtelter Π^1_1-Komprehension. Mit Methoden von TAKEUTI gelingt es durch transfinite Induktion bis $\theta\varepsilon_{\Omega_N+1}0$ Schnitte in Herleitungen von $(\Pi^1_1-CA)^-_N$ zu eliminieren. Man erhält also

Proposition 1. $ID_N \vdash Prov_{ID_N}(\ulcorner F \urcorner) \rightarrow Prov_{(\Pi^1_1-CA)^-_N}(\ulcorner F^* \urcorner)$

und damit

Proposition 2. $ID_N + TI[\ulcorner \theta\varepsilon_{\Omega_N+1}0 \urcorner] \vdash Cons(ID_N)$.

Nach (i) folgt dann, dass in ID_N $TI[\ulcorner \theta\varepsilon_{\Omega_N+1}0 \urcorner]$ nicht beweisist. Da umgekehrt $TI[\ulcorner \xi \urcorner]$ für $\xi < \theta\varepsilon_{\Omega_N+1}0$ in ID_N beweisbar ist, folgt

Satz 1 $\|ID_N\| = \|(\Pi^1_1 - CA)^-_N\| = \theta\varepsilon_{\Omega_N+1}0$.

Korollar $\|(\Pi^1_1-CA)^-\| = \lim\limits_{N<\omega} \|(\Pi^1_1-CA)^-_N\| = \theta\Omega_\omega 0$.

2. Anwendungen von (ii)

Wir betrachten ein System Π^* mit ω-Regel und bezeichnen mit $\vdash^{\alpha}_{m,n} F$, dass eine Herleitung von F vorliegt, deren Tiefe $\leq\alpha$ ist und deren Schnittformeln alle kürzer als n sind und in einer Hierarchie, aufbauend auf dem 'Hyperjump', unterhalb der Schicht m+1 vorkommen. Mit IR bezeichnen wir das Schema der vollständigen Induktion, mit IA das Axiom. Dann gilt:

Proposition 3. $(\Pi^1_1-CA) + IA \ \vdash^{\alpha}_{m,n} F \Rightarrow \ \vdash^{\omega[m,\alpha]}_{0,n} F$, wobei $\omega[m,\alpha]$ die m-te Iteration von $\lambda\xi\,\omega^{\xi}$ ist.

Proposition 4. $(\Pi^1_1-CA)^- + IR \ \vdash^{\alpha}_{m,n} F \Rightarrow$ Es gibt $n_0<\omega$ mit $\vdash^{\omega[m,\alpha]}_{0,n_0} F$.

(wobei $(\quad)^-$ andeutet, dass keine freien Mengenvariablen in den Komprehensionstermen auftreten dürfen.)

Proposition 5. $(\Pi^1_1-CA) + IR \ \vdash^{\alpha}_{m,n} F \Rightarrow \ \vdash^{\omega[m,\alpha]}_{0,\omega} F$.

Wieder mit den Methoden von Takeuti folgt:

Proposition 6. $\vdash^{\alpha}_{0,n} F \Rightarrow \ \vdash^{\theta(\theta\omega(\Omega_n+\alpha))0}_{0} F$.

Da α in Prop. 4 und 5 immer $< \varepsilon_0$ gewählt werden kann, folgt

Satz:

(1) $\|(\Pi_1^1\text{-CA})^- + \text{IR}\| = \|(\Pi_1^1\text{-CA})^- + \text{IR} + \text{BI}^-\| = \|(\Pi_1^1\text{-CA}) + \text{IA}\| = \theta\Omega_\omega 0$

(2) $\|(\Pi_1^1\text{-CA}) + \text{IR}\| \leqslant \theta(\theta\omega(\Omega_\omega + \varepsilon_0))0$.

Ähnlich erhält man auch

(3) $\|(\Pi_1^1\text{-CA}) + \text{IR} + \text{BI}\| \leqslant \theta(\theta\omega^2(\Omega_\omega + \varepsilon_0))0$.

Ob die Schranken für (2) und (3) scharf sind, ist offen.
Bekannt ist bisher:

$$\theta(\theta 0(\Omega_\omega + \varepsilon_0))0 \leqslant \|(\Pi_1^1\text{-CA}) + \text{IR}\|$$
$$\theta\varepsilon_{\Omega_\omega + 1}0 \leqslant \|(\Pi_1^1\text{-CA}) + \text{IR} + \text{BI}\| .$$

K. McALOON: The Completeness Theorem and the 2nd Incompleteness Combined

Gödel's 2nd Incompleteness Theorem and the Hilbert-Bernays Completeness Theorem are applied to arbitrary consistent extensions $\mathfrak{A}$ of Peano arithmetic $\mathfrak{P}$. We say $\mathfrak{A}$ is represented in a model $\mathfrak{M}$ of $\mathfrak{A}$ iff there is $b \in |\mathfrak{M}|$ such that for all Gödel numbers n

$$n \in \mathfrak{A} \iff \mathfrak{M} \models E(n,b)$$

where $E(x,y)$ is a bounded quantifier formula expressing "x belongs to the finite set y". (If $\mathfrak{A}$ is represented by $b \in |\mathfrak{M}|$, let $\mathfrak{A}_x$ be the term $\bigwedge\{\varphi: \varphi \leqslant x \wedge E(\varphi,b)\}$ and let $\text{Cons}(\mathfrak{A}_x)$ be the Π_1^0-formula which asserts the consistency of $\mathfrak{A}_x$ in LPC. We note that, for all standard m, $\mathfrak{A} \vdash \text{Cons}(\mathfrak{A}_m)$.

Theorem. Let $\mathfrak{M}$ be a non-standard model of $\mathfrak{A}$ in which $\mathfrak{A}$ is represented and let k be a non-standard integer such that $\mathfrak{M} \models \text{Cons}(\mathfrak{A}_k)$. Then $\mathfrak{M}$ has an end extension $\mathfrak{N}$ which satisfies $\mathfrak{A}$ and $\neg\text{Cons}(\mathfrak{A}_k)$.

For the following notation, c.f. Feferman, F.M. 1960.

Corollary. Let $\mathfrak{A}$ be recursively axiomatizable. There is a model $\mathfrak{M}$ of $\mathfrak{A}$ such that, for all RE-enumerations α of $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M} \models \neg\text{Cons}_\alpha$.

G.L. CHERLIN: Undecidable Rings of Continuous Functions

Der Ring aller stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist unentscheidbar. Wir fragen im allgemeinen:

Sei X ein topologischer Raum, K lokalkompakter Körper. Wann ist $C(X;K)$ (als Ring) entscheidbar?

W. THOMAS: Unentscheidbare Erweiterungen der Nachfolger-Arithmetik

Es werden Strukturen der Form $\langle\omega,S,Q\rangle$ ($\langle\omega,<,Q\rangle$) betrachtet, wobei ω die Menge der natürlichen Zahlen, S die Nachfolgerfunktion über ω , $<$ die Kleiner-Beziehung über ω und Q eine Teilmenge von ω ist. Für jedes rekursive $Q \subset \omega$ ist die elementare Theorie von $\langle\omega,S,Q\rangle$ ($\langle\omega,<,Q\rangle$) tt-reduzierbar nach $\emptyset'$ ($\emptyset''$). Es wird gezeigt, dass diese Abschätzung "optimal" ist, d.h. dass es ein rekursives $Q \subset \omega$ gibt, so dass die elementare Theorie von $\langle\omega,S,Q\rangle$ ($\langle\omega,<,Q\rangle$) nicht btt-reduzierbar nach $\emptyset'$ ($\emptyset''$) ist.

W. Buchholz (München)