MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 18/1975

Methoden und Verfahren der mathematischen Physik

27.4. bis 3.5.1975

In diesem Jahr stand die Tagung über "Methoden und Verfahren der mathematischen Physik" wie zuletzt vor zwei Jahren unter der Leitung von B. Brosowski (Frankfurt a.M.) und E. Martensen (Karlsruhe). Die Zielsetzung der Tagung wurde in einem Begleitschreiben zum Ausdruck gebracht, das den Teilnehmern bereits mit der Einladung zugesandt wurde und folgenden Inhalt hatte: "Die Vortragsthemen dieser Tagung sollten sich nach Möglichkeit auf konkrete Probleme der mathematischen Physik beziehen oder doch zumindest durch solche Probleme motiviert sein. Sowohl auf die behandelten natur- und ingenieurwissenschaftlichen Probleme selbst als auch auf die zugehörige mathematische Modellentwicklung sollte kurz eingegangen werden. Das Hauptgewicht der Vorträge soll auf den verwendeten Methoden bis hin zur verfahrensmäßigen Gewinnung in der Praxis tatsächlich interessierenden Lösung liegen. Dabei ist es im Sinne der Zielsetzung der Tagung, wenn in den verschiedenen Vorträgen ein möglichst breites Methodenspektrum angesprochen wird."

Sowohl bei der Auswahl ihrer Themen als auch in der Darstellung haben die Vortragenden dieser Bitte weitgehend entsprochen und damit zum Erfolg der Tagung wesentlich beigetragen. Von den behandelten Gebieten seien die Maxwellsche Theorie, die Elastizitätstheorie, die Strömungslehre, die Streuphysik sowie mathematische Probleme der Geodäsie und Biologie genannt. Bei den Methoden standen Hilbertraummethoden stark im Vordergrund; außerdem spielten konstruktive Methoden wie Integralgleichungsmethoden und numerische Methoden eine wichtige Rolle, und auch Methoden der mathematischen Statistik fanden Verwendung. Die Frage der mathematischen Modellbildung wurde besonders im Rahmen der Biomathematik angesprochen.

Bei insgesamt 29 Vorträgen wurde die zur Verfügung stehende Zeit voll ausgenutzt und Anlaß zu fruchtbarem Gedankenaustausch gegeben. Besonders erfreulich war die aktive Mitwirkung jüngerer Mathematiker und ausländischer Gäste.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

Alber, H.-D., Darmstadt
Amman, H., Bochum
Bartenwerfer, D., Göttingen
Brosowski, B., Frankfurt a.M.
Burg, K., Karlsruhe
Colton, D., z.Z. Konstanz
Drehmann, J., Stuttgart
Dreseler, B., Siegen
Ebersoldt, F., Düsseldorf
Gentzsch, W., Darmstadt
Glassey, R., München
Grafarend, E.W., Bonn
Hadeler, K.P., Tübingen
Haf, H., Kassel
Hejtmanek, J., Wien
Hermann, P., Aachen
Kielhöfer, H., Stuttgart
Kinnebrock, W., Göttingen
Kreß, R., Göttingen
Leis, R., Bonn
Louhivaara, I.S., Jyväskylä
Luthey, Z., Göttingen
Lvov, V.A., z.Z. München
Martensen, E., Karlsruhe
Meister, E., Darmstadt
Mohr, R., Stuttgart
Mülthei, H.N., Mainz
Neunzert, H., Kaiserslautern
Niggemann, M., Stuttgart
Picard, R., Bonn
Piskorek, A., Warschau
Rautmann, R., Paderborn
Roach, G.F., Glasgow
Schempp, W., Siegen
Scheurle, J., Stuttgart
Schneider, M., München
Schröder, J., Köln
Simader, C.G., München
Stüben, K., Köln
Törnig, W., Darmstadt
Velte, W., Würzburg
Wacker, H., Linz
Wegmann, R., München
Wendland, W., Darmstadt
Wenisch, G., Karlsruhe
Werner, P., Stuttgart
Wick, J., Jülich
Witsch, K.J., Bonn
Wuytack, L., Wilrijk

Vortragsauszüge

Alber, H.-D. : Die Greensche Funktion für ein periodisches Problem aus der Beugungstheorie

Ich möchte zunächst ein periodisches Randwertproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung beschreiben und die Eigenschaften angeben, die eine zur Lösung dieses Problems geeignete Greensche Funktion haben müßte.

Daraufhin möchte ich kurz auf die Lösungsmethode mit Hilfe einer solchen Greenschen Funktion eingehen und schließlich die Existenz und Eindeutigkeit dieser Funktion beweisen.

Colton, D. : Constructive Methods for Solving the Helmholtz Equation in a Medium with a Spherically Symmetric Index of Refraction

We consider the problem of constructing the solution to the exterior Neumann problem for the equation

$$\Delta_3 u + (\lambda^2 + B(r))u = 0$$

defined in the exterior of a bounded, starlike domain, where $B(r)$ has compact support and $u(\underset{\sim}{x})$ satisfies the Sommerfeld radiation condition. Through the use of integral operators we reduce the problem to a Fredholm integral equation and show that this integral equation is uniquely solvable. For λ sufficiently small the solution can be obtained by the method of successive approximations. This work is in collaboration with Professor W. Wendland.

Dreseler, B. und Schempp, W. : Über die Deformationsmethode in der mathematischen Physik

Die Methode der Deformation (oder Kontraktion) einer Lie-Gruppe in eine andere, die schon in Arbeiten von E.P. Wigner über gruppentheoretische Methoden in der Physik implizit enthalten ist und von I.A. Segal formal befriedigend definiert wurde, wird an zwei konkreten Anwendungsbeispielen aus der mathematischen Physik erläutert. Das erste Beispiel behandelt das Problem, daß die klassische Mechanik (Galilei-invariante Theorie) eine "Grenztheorie" der relativistischen Mechanik (Lorentz-invariante Theorie) sein muß. Die Deformationsmethode ermöglicht die mathematische Beschreibung, in welchem Sinn die inhomogene Galilei-Gruppe und ihre Darstellungen als Limes der inhomogenen Lorentz-Gruppe und ihrer Darstellungen aufgefaßt werden kann. Im zweiten Beispiel wird ein bei einigen Speziellen Funktionen der mathematischen Physik bekanntes Konfluenzphänomen mit Hilfe der Deformation geometrisch gedeutet. Diese Deutung, die im Fall der Legendre- und Jacobi-Polynome und ihrer Konfluenz gegen Besselfunktionen erläutert wird, führt mit der Theorie symmetrischer Räume beliebigen Ranges 1 zum Beweis einer analogen Konfluenzformel für eine große Klasse Spezieller Funktionen in 1 Veränderlichen.

Ebersoldt, F. : Methoden bei stationären Transport-Gleichungen

Betrachtet werden partielle Integro-Differential-Gleichungen der Form

$$(A-B)f = \lambda Cf \;,\; f \in \mathfrak{A} \subset L_1(G) \;, \quad \text{wobei}$$

$$[Af](x,w,E) = \langle w, \nabla_x f \rangle + a(x,w,E)f(x,w,E) \,,\quad f \in \mathfrak{A} \,,\quad B \in [L_1(G)]$$

$$[Cf](x,w,E) = \int_G{}' c(x',x,w',w,E',E)f(x',w',E')dx'dw'dE' \,, f \in L_1(G).$$

$\mathfrak{A}$ ist hierin ein geeigneter Teilraum des $L_1(G)$, der insbesondere Randbedingungen einschließt.
Es werden Bedingungen angegeben, unter denen genau eine nicht-negative Eigenlösung f_o existiert. Der zugehörige positive Eigenwert λ_o unterschreitet betraglich alle anderen Eigenwerte. $\mu_o = \frac{1}{\lambda_o}$ ist einfacher Pol der Resolvente $R(\mu,T)$ des Operators $T := (A-B)^{-1}C$. $T \in [L_1(G)]$.
Die hergeleiteten Eigenschaften des "Transportoperators" T gestatten die Anwendung eines iterativen Verfahrens zur Bestimmung von f_o und λ_o .

Gentzsch, W. : Numerische Behandlung quasilinearer elliptischer Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie

Diskretisiert werden Variationsprobleme der Form

$$J[u] = \iint_G f(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})\, dx\, dy \overset{!}{=} \text{Min}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), u_\nu(x,y) = \psi(x,y) \text{ auf } \dot{G} \,.$$

Existenz und Eindeutigkeit einer Minimallösung des diskreten Funktionals und Konvergenz dieser Lösung gegen die Lösung des kontinuierlichen Ausgangsproblems werden bewiesen, wenn die Gitterkonstante h gegen Null strebt.
Diese Ergebnisse werden angewendet auf zwei quasilineare elliptische Differentialgleichungen 4. Ordnung, die aus den nichtlinearen Spannungs-Dehnungsgleichungen von Kauderer resultieren, und auf das System der beiden quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen 4. Ordnung der nichtlinearen Schalentheorie.

Glassey, R. : Some Recent Results on the Maxwell-Dirac and Klein-Gordon-Dirac Equations

The problem of global existence of solutions to the Cauchy problem for the Maxwell-Dirac and Klein-Gordon-Dirac equations will be discussed. Certain global solutions of the three (space) dimensional K-G-D equations will be shown to exist, and their asymptotic behavior characterized. The M-D equations, in the absence of a magnetic field (curl A=O), are shown to uncouple, which allows the existence question to be settled in two space dimensions.

Grafarend, E. : Zur Eindeutigkeit und Stabilität des unsachgemäß gestellten Dirichlet-Außenraumproblems

Wird die Dirichlet-Außenraumaufgabe nach der üblichen Methode über den Ansatz einer singulären Doppelschicht gelöst und auf eine Integralgleichung transformiert, so verbleibt ein unsachgemäß gestelltes Problem der Potentialtheorie. Stabilität und Eindeutigkeit sind innerhalb der charakteristischen Integralgleichung verletzt. Eindeutigkeit kann durch einen regularisierenden Term nach R. Leis (Math. Z. 85 (1964) 141-153) und H. Brakhage/P. Werner (Archiv der Mathematik 16 (1965) 325-329) erzwungen werden. Hier wird ein Verfahren vorgeschlagen, welches nach einem Tykhonov-Regularisierungsverfahren gestattet, den instabilen, vollstetigen Integraloperator in einen stabilen Operator umzuwandeln und zu invertieren. Es wird die Lösung eines charakteristischen Variationsproblems im Sobolev-Raum diskutiert. Computerlösungen für das diskrete, vollständig regularisierte Dirichlet-Außenraumproblem werden angegeben.

Hadeler, K.P. und Rothe, F. : Wellen bei parabolischen Gleichungen

Das System $\dot{u} = f(u,v,c), \dot{v} = g(u,v,c)$, c ein reeller Parameter, besitze in einem Gebiet des $\mathbb{R}^2$ als stationäre Punkte einen Sattel s_1 und einen weiteren Punkt s_2, der für $c < c^*$ stabiler Vortex, für $c > c^*$ stabiler Knoten ist. Eine Trajektorie, die s_1 mit der instabilen Mannigfaltigkeit verläßt und mit bestimmter Richtung s_2 erreicht, heißt Front oder Welle mit Geschwindigkeit c. Es werden hinreichende Bedingungen für die Existenz solcher Fronten gegeben. Unter geeigneten Monotonievoraussetzungen folgt, daß die möglichen Geschwindigkeiten ein Intervall $[c_0, \infty)$ erfüllen. Mit den benutzten Methoden läßt sich die Frage der laufenden Wellen bei der Diffusionsgleichung $u_t = u_{ss} + F(u)$, $F(0) = F(1) = 0$, $F(u) > 0$ in $(0,1)$, $F'(0) > 0$, klären. In diesem Falle wird die Minimalgeschwindigkeit c_0 durch ein Variationsprinzip charakterisiert.

Hejtmanek, J. : Halbgruppen und Gruppen als Lösungen des Cauchy Problems in der mathematischen Physik

Zunächst wird bei den bekannten Beispielen der mathematischen Physik, wie Schrödingergleichung, Diracgleichung, Wellengleichung, Diffusionsgleichung und Neutronentransportgleichung mit Randbedingung untersucht, ob die Hille-Yosida Bedingung für positive oder für positive und negative Zeiten erfüllt ist.
Bei der Neutronentransportgleichung ohne Randbedingung erhält man als Lösung eine Gruppe, die für alle Zeiten realitätsbewahrend, aber nur für positive Zeiten positivitätsbewahrend ist. Diese Eigenschaft hat ihre Ursache in der statistischen Natur der Boltzmanngleichung.

Hermann, P. : Zur Theorie der harmonischen Vektorfelder

Für das Differentialgleichungssystem rot $v = j$, div $v = \lambda$ wird ein Verfahren zur Gewinnung einer partikulären Lösung angegeben, welches insofern elementar ist, als es auf explizit angebbaren Differentiations- und Integrationsprozessen beruht. Insbesondere brauchen keine Integralgleichungen gelöst zu werden. Allerdings sind nur Definitionsbereiche von bestimmter topologischer Gestalt zugelassen, die jedoch noch so allgemein sind, daß für die Anwendungen wichtige Geometrien erfaßt werden, wie insbesondere mit der Durchrechnung zweier typischer Beispiele belegt wird.

Kreß, R. : Über die Behandlung eines gemischten Randwertproblems der Potentialtheorie nach der Integralgleichungsmethode

Sei $B \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet mit stetig gekrümmtem Rand ∂B, der in die Anteile $\partial B = S_D \cup S_N$ zerfalle. Das gemischte Randwertproblem $\Delta u = 0$ in B, $u = f$ auf S_D, $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ auf S_N haben Hayes und Kellner (SIAM J. Appl. Math, 1972) auf ein System aus einer Integralgleichung erster Art und einer Integralgleichung zweiter Art zurückgeführt. Ein

System aus zwei Integralgleichungen zweiter Art wäre jedoch wegen der Anwendbarkeit der Riesz-Schauder-Fredholm Theorie sowohl im Hinblick auf Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen als auch auf die numerische Behandlung günstiger. Es wird daher über einen gemeinsam mit Gonzales durchgeführten Ansatz berichtet, welcher auf ein System zweiter Art führt, für welches Existenz und Eindeutigkeit bewiesen wird. Der Spektralradius des zugrundeliegenden Integraloperators ist Eins, daher können zur praktischen Behandlung Iterationsverfahren benutzt werden. Als eine Besonderheit gegenüber den Grenzfällen $S_D = \emptyset$, bzw. $S_N = \emptyset$ treten komplexe Eigenwerte auf.

Erwähnt wird ferner die Betrachtung eines entsprechenden Problems bei harmonischen Vektorfeldern (Kreß, Arch. Rat. Mech. Anal. 1971).

Leis, R. : Außenraumaufgaben zur Plattengleichung

Ausstrahlungsprobleme wurden bisher für eine Reihe von Differentialgleichungen und Systemen behandelt. Die Plattengleichung als Produkt einer Schwingungsgleichung mit einer gedämpften unterscheidet sich von den betrachteten; da sie außerdem in den Anwendungen auftritt, schien mir eine systematische Behandlung von Interesse. Im Vortrag wurden zunächst Randwertaufgaben für die isotrope inhomogene Platte formuliert, und es wurde angedeutet, wie sie sich mit Hilfe von Hilbertraummethoden (Dirichletsches Prinzip) lösen lassen. Sodann wurde eine Ausstrahlungsbedingung angegeben und gezeigt, daß alle $d > 0$ Eigenwerte sein können, und für Außenraumaufgaben die Fredholmsche Alternative bewiesen. Zum Abschluß wurde kurz auf Transmissionsaufgaben eingegangen.

Lvov, V. : Randwertaufgaben der mathematischen Physik bei Gebieten mit kompliziertem Rand

Verschiedene Prozesse, die in Medien stattfinden, in denen eine große Anzahl von Fremdkörpern eingeschlossen ist, werden mit Hilfe von Lösungen von Randwertaufgaben in Gebieten mit komplizierter Struktur beschrieben, deren Grenzen z.B. aus vielen kleinen disjukten Komponenten bestehen. Die komplizierte Gebietsstruktur stellt keine zusätzlichen Schwierigkeiten beim Beweis des Existenzsatzes und des Eindeutigkeitssatzes dar. Jedoch entstehen, wenn die Anzahl der eingeschlossenen Fremdkörper groß ist, bei der tatsächlichen Lösung dieser Aufgaben durch genaue, als auch approximierende Methoden, unüberwindbare Schwierigkeiten. Daher ist es von großer Wichtigkeit, wie und unter welchen Bedingungen Aufgaben dieser Art zu bedeutend einfacheren Aufgaben für homogene Medien reduziert werden können, und wie man die entsprechenden Differentialgleichungen findet. Dies geschieht folgendermaßen: Einerseits ersetzt man die Lösung des Ausgangsproblems mit Randbedingungen auf dem vorgegebenen komplizierten Rand durch die Lösung modifizierter Differentialgleichungen, die man jetzt im ganzen Raum betrachtet.

In anderen Fällen ersetzt man die komplizierten Grenzen in der Ausgangsaufgabe durch eine einfache Fläche, auf der gewisse Mittelrandbedingungen definiert werden.

Es ist viel einfacher, die Lösung der modifizierten Aufgaben als die der Ausgangsprobleme zu finden, da sie entweder im ganzen Raum oder in einfachen Gebieten betrachtet werden, und die Hauptschwierigkeit - die komplizierte Grenze - fehlt.

Luthey, Z.A. : Piecewise Analytical Solutions Method for the Multi-Dimensional Radial Schrödinger Equation

A numerical algorithm, PASM, for solving coupled radial Schrödinger equations by means of piecewise polynomial approximations to the coefficient or potential functions is presented.

PASM is a stabilized shooting method in which the complementary solutions are expressed locally in a basis of analytical solutions to the approximating equations. We introduce a class of polynomial approximations studied by Pruess and extend the algorithm to piecewise quadratic polynomial approximations to achieve greater accuracy. To generalize the algorithm to local quadratic approximations to the potential functions, we develop a computational method to evaluate the required basis functions, the Weber parabolic cylinder functions $U(a,x)$, $V(a,x)$, $W(a,\pm x)$ over the two dimensional space (x,a). We conclude with an analysis of the instabilities arising in PASM from the shooting formalism.

Neunzert, H. : Nichtlineare Kontinuitätsgleichungen

Betrachtet wird die Kontinuitätsgleichung in maßtheoretischer Formulierung: Gesucht ist eine Schar μ_t von Borelmaßen des $\mathbb{R}^k$ mit

$$\mu_t \circ T_{t,o} = \mu_o ,$$

wobei $T_{t,o}$ ein Phasenstrom und μ_o eine gegebene Anfangsverteilung ist. Die Geschwindigkeit $\frac{d}{dt}(T_{t,o}x)$ der Strömung hänge dabei in integraler Weise von μ_t ab:

$\frac{d}{dt}(T_{t,o}x) = K[\mu_t](t,x) = \int_{\mathbb{R}^k} G(x,y)\, d\mu_t$. Dadurch entsteht ein nichtlineares Problem, das mittels Banachschen Fixpunktsatzes (Batt, Rautmann) und Schauder (Chaljub-Simon) behandelt wurde. Es wird ein Existenzbeweis angegeben, der in Analogie zum klassischen Peanoschen Satz approximative Lösungen verwendet, die hier als diskrete Maße konstruiert werden. Ein Kompaktheitskriterium in Maßräumen (Prohorov) sichert dabei die Existenz. Unter schärferer Voraussetzung wird damit ein Analogon zu den Euler-Cauchy-Verfahren konstruiert und Konvergenz gezeigt (Simulationsverfahren).

Picard, R. : Ein Randwertproblem in der Theorie kraftfreier Magnetfelder

Es wird mit Hilbertraummethoden das (hier klassisch formulierte) Randwertproblem in $G \subset \mathbb{R}^3$, G beschränktes Gebiet,

$$\operatorname{rot} H + \varkappa H = f$$
$$n \cdot H/_{\partial G} = 0$$
$$\operatorname{rot} H \perp \mathcal{H}_D := \{E/\operatorname{rot} E = 0 \text{ , } \operatorname{div} E = 0 \text{ , } n \cdot E/_{\partial G} = 0\}$$

für gewisse skalare Funktionen $\varkappa$ bei nicht notwendig glattem Rand behandelt. Die Differentialgleichung charakterisiert für $f \equiv 0$ kraftfreie Magnetfelder ($\operatorname{rot} H \times H = 0$), wie sie in der Nähe großer Sterne oder bei terrestrischen Experimenten mit hohen Feldstärken auftreten. Das angegebene Problem wird auf eine Eigenwertaufgabe zu den zeitunabhängigen Maxwellgleichungen mit der Randbedingung der Totalreflexion zurückgeführt, deren Lösungstheorie bekannt ist.

Piskorek, A. : Über ein Approximationsverfahren zur Lösung der Volterraschen Integralgleichung auf kompakten Mannigfaltigkeiten

Gegeben sei eine kompakte Mannigfaltigkeit M ohne Rand. Betrachtet wird der Volterrasche Integraloperator N mit polaren Kern im Raum stetiger Funktionen auf $M \times [0,T]$ $T > 0$. Ausgehend von den Eigenschaften des Operators N und der Zerlegung der Einheit auf $M \times [0,T]$ wird ein Approximationsverfahren vorgeschlagen.

Rautmann, R. : Zur Navier-Stokesschen Anfangswertaufgabe

a) Für das Cauchyproblem der Navier-Stokes-Gleichungen (in seiner klassischen Form) wird mit Hilfe der Grundlösungen der Wärmeleitungsgleichung und der Potentialgleichung im $\mathbb{R}^n$, $n \geqq 2$, ein lokal im Zeitparameter konvergentes Iterationsverfahren beschrieben. Im Falle der stabilisierten Navier-Stokesschen Gleichung (in der die substantielle Ableitung in Richtung einer Mittelfunktion des gesuchten Geschwindigkeitsfeldes gebildet wird) konvergiert das Verfahren im Großen gegen die eindeutig bestimmte C_∞-Lösung.

b) Die schwache Form der Anfangsrandwertaufgabe dieser stabilisierten Gleichung auf einer offenen Menge des $\mathbb{R}^n$ (mit der Haftbedingung am Rande) ist in der Klasse der Hopfschen Lösungen sachgemäß gestellt. Die Galerkinmethode, mit der E. Hopf die Existenz globaler schwacher Lösungen erstmals bewiesen hat, wird daher zu einem konstruktiven Lösungsverfahren für die stabilisierte Anfangsrandwertaufgabe. Allerdings erfordert dies solenoidale Approximationen, die sich praktisch (z.B. bei Verwendung finiter Elemente) nur schwer realisieren lassen.
c) Für das Cauchyproblem der stabilisierten Navier-Stokesschen Gleichung wurde deshalb ein Galerkinverfahren entwickelt, das mit nichtsolenoidalen Approximationen arbeitet. Seine globale Konvergenz folgt aufgrund der Eindeutigkeit unter Heranziehung der Lösung aus a).

Roach, G.F. : Fredholm theorems for multiparameter problems

It is known that multiparameter problems can arise when the method of separation of variables is applied to certain boundary value problems and, in this connection, they have been studied to a certain extent. However such problems can also arise in certain areas of approximation theory and perturbation theory and in this setting have hardly attracted their due share of attention. In this lecture the question of solvability of multiparameter problems is examined and an indication given of the availability for such problems of theorems of Fredholm type.

Scheurle, J. : Selektive Iterationsverfahren bei Verzweigungsproblemen

Wir betrachten das Iterationsverfahren $F^n(x)$ in einem Banachraum X. Eine hinreichende Bedingung für die lokale Konvergenz dieses Verfahrens gegen einen Fixpunkt z des Operators F ist bekanntlich die Stabilität von z, d.h. der Spektralradius der Ableitung $F'(z)$ ist kleiner als 1. Für die Selektionseigenschaft des Verfahrens benötigt man jedoch auch notwendige Bedingungen. Ist z instabil, d.h. spr $F'(z) < 1$, so ist unter gewissen Voraussetzungen die Menge $M = \{x \in X \;/\; \| F^n(x) - z \| \leq r \text{ für alle } n\}$ für ein $r > 0$ nirgends dicht und die Menge $N = \{ x \in X \;/\; \lim_{n \to \infty} F^n(x) = z \}$ von 1. Kategorie.

Hängt F_λ von einem Parameter λ ab und ist $F_\lambda(0) = 0$, so liefert das Verfahren $F^n_\lambda(x)$ mit hinreichend kleinem $\| x \|$ in einer Umgebung gewisser, durch einfache Eigenwerte erzeugter Verzweigungspunkte, stets einen stabilen Fixpunkt von F_λ, selbst wenn 0 instabil ist. Ebenso erhält man Näherungen von Punkten gewisser, durch ein Paar einfacher konjugiert komplexer Eigenwerte erzeugter, invarianter Tori.

Schneider, M. : <u>Das allgemeine Bahnbestimmungsproblem der Satellitengeodäsie als Randwertaufgabe</u>

Das allgemeine Bahnbestimmungsproblem der Satellitengeodäsie läßt sich als selbstadjungierte Randwertaufgabe zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung formulieren mit STURMschen Randbedingungen.
Die Lösung der Randwertaufgabe läßt sich als eine Reihe nach den (orthonormierten) Eigenfunktionen des Kerns der der Randwertaufgabe äquivalenten Integralgleichung vom HAMMERSTEINschen Typ ansetzen. Trägt man diesen Ansatz in die Integralgleichung ein und benutzt noch die Bilineardarstellung des Kerns, so ergibt sich ein System von unendlich vielen Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten des Lösungsansatzes. Diese Bedingungsgleichungen lassen sich in vielfältiger Weise für die in der Satellitengeodäsie zu lösenden Bahnbestimmungsprobleme nutzen.

Simader, C.G. : <u>Semilineare Störungen von Schrödinger-Operatoren</u>

Ist $q \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $(N \geqq 2)$ mit $q(x) \geqq \gamma > 0$, so ist der Schrödinger-Operator $Lu := -\Delta u + q\,u$, $u \in D(L) := C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ wesentlich selbstadjungiert (B. Simon (1973), T. Kato (1972) und Simader (1974)). Wir betrachten semilineare Störungen von L, z.B. Gleichungsprobleme der Gestalt

$$\text{a) } L\,u + u^3 = f \quad \text{oder} \quad \text{b) } L\,u + (e^u - 1) = f$$

mit vorgegebenem $f \in L^2$ für $u \in D(\tilde{L})$, $(\tilde{L} = L^{**})$.
Da $0 \in \varrho(\tilde{L})$ ist L stetig invertierbar und a) ist äquivalent
$(*)$ $u = \tilde{L}^{-1}(f - u^3)$. Zur Lösung des Problems konstruieren wir eine

Schar approximierender Fixpunktgleichungen, lösen sie mittels des Schauderschen Satzes und weisen die Konvergenz der erhaltenen Fixpunktfolge gegen die Lösung etwa von a) nach. Mit gleicher Methode läßt sich eine Reihe allgemeinerer Fälle behandeln. Es bleiben aber zwei Fragen offen: 1) Wir geben hier nur Existenzaussagen an, jedoch keine Methode zur numerischen Berechnung. 2) Die angebotenen Beweise sind sehr elementar und erscheinen dem Problem angemessen. Es sollten aus dem vorliegenden Sachverhalt abstrakte Störungsaussagen gezogen werden.

Stüben, K. : <u>Näherungsweise Berechnung der ebenen kompressiblen Unterschallströmung um ein Kreisprofil und anschließende Fehlerabschätzung</u>

Es wird ein Verfahren zur numerischen Ermittlung einer kontinuierlichen Näherungslösung zu dem gasdynamischen Problem der Umströmung eines Kreisprofils im Unterschallbereich angegeben: Auf das zugrundeliegende elliptische Randwertproblem für das Geschwindigkeitspotential der Strömung wird ein Newton-Verfahren angewendet. Die Lösung der in jedem Iterationsschritt auftretenden linearen Randwertaufgabe für die jeweilige Änderung der Iterierten wird durch Funktionen aus einem gewissen, endlich dimensionalen Funktionenraum approximiert. Iterativ erhält man auf diese Weise eine Näherung des Ausgangsproblems. Schließlich werden mit Hilfe eines Monotonieprinzips für elliptische Differentialgleichungen kontinuierliche Schrankenfunktionen für die Differenz von Lösung und Näherungslösung angegeben.
Es hat sich gezeigt, daß dieses Verfahren bei relativ geringem Aufwand sehr genaue Ergebnisse liefert.

Wegmann, R. : <u>Die asymptotische Eigenwertverteilung für eine gewisse Klasse von zufälligen Matrizen</u>

Die asymptotischen Eigenwertverteilungen zufälliger Matrizen werden seit Wigner dazu benützt, um die Energiespektren komplizierter quantenmechanischer Systeme zu erklären. Für eine n x n hermitesche Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ wird die Eigenwertverteilung beschrieben durch die Funktion $G(x,A) := \frac{1}{n} \cdot \text{Anzahl} \{ \lambda_i \leq x \}$. Es sei $M(A) = \sum t_i P_i(A)$ eine endliche Summe von Produkten P_i von Faktoren

A und A^* (mit komplexen t_i), die jeder Matrix A eine hermitesche Matrix M(A) zuordnet. Wenn A_n eine Folge von nichtsymmetrischen zufälligen n x n Matrizen mit unabhängigen identisch verteilten Elementen ist, dann konvergiert die Eigenwertverteilung der Matrizen $M(A_n/\sqrt{n})$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen eine feste Grenzverteilung G_o. Man kann G_o explizit berechnen. Der Satz ist analog zu Wigners Halbkreissatz für symmetrische zufällige Matrizen. Er liefert die Möglichkeit, asymptotische Eigenwertverteilungen zu erhalten, die besser auf experimentell bestimmte Energiespektren passen als Wigners Halbkreisverteilung.

Wendland, W. : Über Neumanns Methode für das äußere Neumann Problem der Helmholtz Gleichung

Im Zusammenhang mit numerischen Berechnungen des Rückstreuquerschnitts für verschiedene Wellenzahlen, die R. Kleinman mit L. Jones (University of Delaware) durchführte, haben R. Kleinman und der Vortragende die Konvergenz des Neumannschen Iterationsverfahrens der Integralgleichungsmethode für kleine Wellenzahlen untersucht. Bei konvexen Streukörpern kann eine explizite Schranke für Wellenzahlen gefunden werden und in einer geeigneten Norm wird der auftretende Operator kontrahierend. Bei nichtkonvexen Streukörpern kann der Spektralradius mit dem Satz von Plemelj aus der Potentialtheorie abgeschätzt werden. Die Gültigkeit der Integralgleichungsmethode für die in der Potentialtheorie charakterisierten allgemeinen Gebiete nach Burago, Mazjla, Zapožnikova kann gezeigt werden. Schließlich kann auch für die diskretisierten Gleichungen mit Anselones Theorie der kollektiv kompakten Operatoren die Konvergenz des Iterationsverfahrens gezeigt werden.

Werner, P. : Zur Spektraltheorie des vektoriellen Laplace-Operators in Außenräumen

Es sei G ein Außengebiet mit dem Rand F. Wir gehen von Vektorfeldern A aus, die im Unendlichen genügend stark abklingen und auf F entweder die elektrischen Randbedingungen $n \times A = 0$, $\operatorname{div} A = 0$ oder die magnetischen Randbedingungen $n \times \operatorname{rot} A = 0$, $n \cdot A = 0$ erfüllen. Der Laplace-Operator erweist sich in beiden Fällen als symmetrisch. Es werden selbstadjungierte Erweiterungen angegeben und deren Spektraleigenschaften diskutiert. Das Spektrum besteht aus einem kontinuierlichen Teil und dem Eigenwert 0, der den elektrostatischen und magnetostatischen Feldern entspricht. Die Spektralschar läßt sich durch die Ausstrahlungslösungen des Außenraumproblems für die zeitunabhängigen Maxwellschen Gleichungen ausdrücken. Mit Hilfe des Funktionalkalküls ergeben sich Anwendungen auf die zeitabhängigen Maxwellschen Gleichungen. Insbesondere läßt sich der Gültigkeitsbereich des Prinzips der Grenzamplitude diskutieren.

Wick, J. : Ein Verfahren zur Lösung von Erhaltungsgleichungen

Bei der Untersuchung hydrodynamischer Probleme tritt die Schwierigkeit auf, daß bereits die einfache Erhaltungsgleichung

$$(1) \qquad u_t + (h(u))_x = 0 , \qquad u(x,0) = f(x) ,$$

i.a. keine globale klassische Lösung besitzt, was man z.B. daran sieht, daß sich die charakteristischen Grundkurven schneiden. Andererseits führt die Betrachtung verallgemeinerter Lösungen zu der Tatsache, daß das Anfangswertproblem nicht mehr eindeutig bestimmt ist.

Deshalb ist man bisher zur Lösung von (1) von eindeutig lösbaren Näherungsgleichungen ausgegangen. Aus den Untersuchungen der Grenzlösungen hat man dabei auch Zusatzbedingungen zur eindeutigen Lösbarkeit von (1) gefunden.

Dagegen ist die Bahngleichung des Problems (1), welche den Übergang von Eulerschen zu Lagrangeschen Koordinaten vermittelt, ebenfalls nicht eindeutig bestimmt. Doch besitzt die Bahngleichung eine mittels Charakteristikenverfahren konstruierbare globale Lösung, die zu einer, den Zusatzbedingungen für die Eindeutigkeit genügenden Lösung von (1) führt. Dieser Sachverhalt ergibt zum einen schärfere Existenz- und Stabilitätsaussagen zu (1), zum anderen läßt sich direkt ein numerisches Verfahren zur Lösung von (1) ableiten.

Witsch, K.J. : Approximation gewisser Lösungen schiefer Außenraumaufgaben zur Potentialgleichung

In der Geodäsie treten schiefe Außenraumprobleme zur Potentialgleichung auf, von denen man weiß, daß sie Eigenlösungen besitzen. Man ist interessiert an Lösungen, welche für $|x| \rightarrow \infty$ von besserer Ordnung gegen 0 streben als die Eigenlösungen.

Sei also ein schiefes Randwertproblem der Art

(1) $\quad \Delta u = f \quad \text{in} \quad D \subset \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{R}u := \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial \tau} + \sigma u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial D$

gegeben (n Normale, τ tangentiales Vektorfeld an ∂D, σ Funktion).

Unter gewissen Voraussetzungen wird gezeigt, daß für genügend großes ρ die Probleme

(2) $\quad \Delta u_\rho = f$ in $D_\rho := D \cap \{x : |x| < \rho\}; \mathcal{R}u = 0$ auf ∂D, $u = 0$ auf $\partial D_\rho - \partial D$

eindeutig lösbar sind und daß jede Lösung von (1), die für $|x| \rightarrow \infty$ "schneller" fällt als alle Eigenlösungen, sich durch die Lösungen von (2) approximieren läßt.

Wuytack, L. : Anwendungen der Methode von Padé bei der numerischen Quadratur

Das Problem der numerischen Berechnung von $I = \int_a^b f(t)dt$ wird betrachtet. Zuerst werden einige Methoden angegeben, die Gebrauch machen von der Padéschen Annäherungsmethode zur Berechnung von I. Nachher wird eine Methode besprochen, wobei die Methode von Padé benutzt wird zur Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x)$ mit $y(a) = 0$. Um $I = y(b)$ zu finden, bekommt man ein nicht-lineares Einschrittverfahren.

Einige Eigenschaften, wie z.B. die Ordnung, die Konvergenz und die Stabilität dieser Methode werden gezeigt. Es wird auch gezeigt, daß diese Methode benutzt werden kann zur Ableitung nichtlinearer Runge-Kutta Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.

G. Wenisch (Karlsruhe)