MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 19/1975

Gruppen und Geometrien

4.5. - 10.5.1975

Die Tagung wurde von Prof. Dr. D. Higman (Ann Arbor, z.Zt. Gießen) und Prof. Dr. H. Salzmann (Tübingen) geleitet; es nahmen 43 Mathematiker aus Australien, Belgien, Deutschland, Großbritannien, Kanada, den Niederlanden, der Schweiz und den Vereinigten Staaten teil.

Die 26 Vorträge handelten fast ausnahmslos über Themen aus dem beziehungsreichen Feld zwischen geometrisch-kombinatorischen und gruppentheoretischen Sachverhalten und Methoden. Geometrie bestand schon immer (wenn auch manchmal nur implizit) aus dem Bezug von Inzidenzstrukturen und ihren Automorphismengruppen; dies wurde in einer Reihe von Vorträgen augenfällig, in denen bestimmte ausgezeichnete Typen von Geometrien aus ihrer Gruppe heraus charakterisiert wurden.

Umgekehrt hat sich neuerdings die Anwendung kombinatorisch-geometrischer Methoden in der Gruppentheorie geradezu stürmisch entfaltet. Angeregt durch Arbeiten von H. Wielandt hat die Schule um D. Higman in den letzten Jahren hier ein völlig neuartiges Instrumentarium zu entwickeln begonnen, das den schon lange gepflegten darstellungstheoretischen Methoden an Gewicht gleichkommt und sie bedeutsam ergänzt, ja sogar vielfach schon an ihre Stelle treten kann. Die Entwicklung wird mitgetragen von Gruppentheoretikern und Geometern aus Großbritannien, den Beneluxländern und Deutschland. Die Wirksamkeit dieser Methoden in Theorie und Klassifikation der endlichen Permutationsgruppen sowie bei der systematischen Suche nach neuen endlichen Gruppen mit besonderen Eigenschaften wurde in vielen Vorträgen demonstriert. Die Methodendiskussion in- und außerhalb der Vorträge wies fruchtbare Ansätze zu weiteren Untersuchungen auf und zeigte, daß diese Neuentwicklungen eine große Zukunft haben.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Tagungen wie diese haben viel zum Erreichten beigetragen; sie sind auch weiterhin unentbehrlich, um den Kontakt der beteiligten Forscher und insbesondere auch zwischen den beiden im Tagungsthema genannten Disziplinen weiter zu pflegen, aus dem sich diese Entwicklung nährt. Dementsprechend kamen in einer Reihe von Vorträgen auch neue Ergebnisse in den Grundlagen der beiden Gebiete zur Sprache.

Teilnehmer

M.D. Atkinson, Cardiff
R. Baer, Zürich
D. Betten, Tübingen
F. Buekenhout, Brüssel
P.J. Cameron, London
Judita Cofman, Mainz
P. Delsarte, Brüssel
J. Doyen, Brüssel
B. Fischer, Bielefeld
J.M. Goethals, Brüssel
H. Hähl, Tübingen
J. Hall, Eindhoven
Ch. Hering, Tübingen
A. Herzer, Mainz
M.D. Hestenes, Eindhoven
D. Higman, Ann Arbor, z.Zt. Gießen
D.F. Holt, Tübingen
Gisèle Hubaut, Brüssel
X. Hubaut, Brüssel
D. Hughes, London
D.C. Hunt, Bielefeld
W. Jonsson, Montreal
O.H. Kegel, London
W. Knapp, Tübingen
P.W.H. Lemmens, Utrecht
Christiane Lefevre, Brüssel
R. Lingenberg, Karlsruhe
D. Livingstone, Birmingham
H. Lüneburg, Kaiserslautern
H. Mäurer, Darmstadt
J. Mc Kay, Montreal
U. Ott, Gießen
H. Salzmann, Tübingen
J. Saxl, Oxford
P. Scherk, Toronto
M.L. Scott, Ann Arbor
J.J. Seidel, Eindhoven
Margaret Smith, Cambridge
K. Strambach, Erlangen
L. Teirlinck, Brüssel
A. Wagner, London
M. Walker, Tübingen
H. Wielandt, Tübingen

Vortragsauszüge

M.D. ATKINSON: Rank 3 permutation groups having $\lambda = 0$

If G is a rank 3 permutation group with a suborbit Δ then, following D.G. HIGMAN, define $k = |\Delta(a)|$, $\lambda = |\Delta(a) \cap \Delta(b)|$ for $b \in \Delta(a)$, $\mu = |\Delta(a) \cap \Delta(b)|$ for $b \notin \Delta(a)$. Among the known primitive groups having $\lambda = 0$ are M_{22} (degree 77) and HS (degree 100). The connection between $\lambda = 0$ and $G_a^{\Delta(a)}$ 2-transitive is studied and it is shown that $\lambda = 0$ and $\mu | 2k$ together imply $G_a^{\Delta(a)}$ 2-transitive. The groups with $\lambda = 0$ and degree at most 1000 are also studied.

D. BETTEN: Geometrische Permutationsgruppen

Die Wirkung der Gruppe G auf einer Menge X heiße geometrisch, falls auf X ein System $\mathcal{L}$ von Teilmengen existiert so, daß G die volle Automorphismengruppe der Geometrie $(X, \mathcal{L})$ ist. Es wurden Beispiele von geometrischen und nicht-geometrischen Permutationsgruppen erörtert, ferner einige Lemmata bewiesen, die zur Charakterisierung der geometrischen Permutationsgruppen beitragen.

F. BUEKENHOUT: Transitive groups with a rank 3 suborbit of unitary, orthogonal or symplectic type.

This is a report on joint work with X. HUBAUT. Let G be a transitive group on a set S, Δ an orbital of G under which S is connected and assume that for each $p \in S$, G_p induces on $\Delta(p)$ a rank 3 group of unitary, orthogonal or symplectic type. On $\Delta(p)$, G_p has two nontrivial suborbits $\perp$ and $\perp'$ corresponding to orthogonality and non-orthogonality of isotropic vectors. There are 4 cases to be distinguished.

Case I. $\perp \subseteq \Delta, \perp' \not\subseteq \Delta$. A complete classification is obtained. There are 7 infinite classes over $GF(2)$ and a few isolated cases including the FISCHER group F_{22} and McLAUGHLIN's group in their natural action.

Case II. $\perp \subseteq \Delta$, $\perp' \subseteq \Delta$. A complete classification is obtained. There are 3 infinite classes: the two doubly transitive representations of $Sp_{2n}(2)$ and the holomorph of the latter group.

Case III. $\perp \nsubseteq \Delta$, $\perp' \subseteq \Delta$. Few examples are known. Over $GF(q)$, $q \geqslant 3$, G must be a rank 3 group.

Case IV. $\perp \nsubseteq \Delta$, $\perp' \nsubseteq \Delta$. Examples were produced in great number by P.CAMERON during the lecture. We have no general method to attack this case.

P.J. CAMERON: The parallelogramm property and the triangle property

Under what conditions on a colouring of the pairs of points of a set X can we embed X in an affine space over $GF(2)$ so that pairs have the same colour if and only if they are parallel? Necessary conditions are that a point lies in at most one pair of each colour (edge colouring) and that $\{a,b\} \sim \{c,d\} \Rightarrow \{a,c\} \sim \{b,d\}$ (parallelogram property); these are not sufficient. Several sufficient conditions are given, one of these depending on the classification of graphs having the triangle property by SHULT and SEIDEL. A consequence of embeddability for edge-colourings with doubly-transitive groups is given.

Ph. DELSARTE: A generalization of association schemes and regular two-graphs

Let X be a finite set, K^0 a finite Abelian group with zero, and $M = \{M_0, M_1, \ldots, M_s\}$ a collection of nonzero mappings $M_i : X^2 \to K^0$, with Hadamard product $M_i \cdot M_j = 0$ for all $i \neq j$. Define $M_\infty : X^2 \to \{0,1\}$ by $M_\infty(x,y) = 1 - \sum_{i=0}^{s} |M_i(x,y)|$. Then (X,M) is called a regular K-scheme if it enjoys the following three properties : (i) $M_0 = a_0 \cdot I$ for some $a_0 \in K$. (ii) There is a pairing $j \mapsto j'$ on $[0,s]$ such that $\widetilde{M}_j = b_j \cdot M_{j'}$, with given $b_j \in K$. (iii) For $i,j \in [0,s]$, $k \in [0,s] \cup \{\infty\}$, $a \in K$, and points $x, y \in X$ with $M_k(x,y) \neq 0$, the number of $z \in X$ such that $M_i(x,z)\, M_j(z,y) = a \cdot M_k(x,y)$ is a constant $r_a(i,j,k)$, with $r_a(i,j,\infty)$ not depending on a.

Regular K-schemes are in 1-1 correspondence with well-defined families of subalgebras of $Mat_{\mathbb{C}}(X)$. They are often afforded by transitive permutation groups associated to switching functions. Examples are provided by certain extremal codes, and systems of lines in real Euclidean space.

J.DOYEN: Ranks of incidence matrices of Steiner systems

Let $Rk_p\ S(t,k,v)$ denote the rank modulo p of the incidence matrix of a given Steiner system $S(t,k,v)$. We prove that

(i) $Rk_2\ S(2,3,v) = v - (d_p+1)$ where d_p is the projective dimension of the triple system $S(2,3,v)$

(ii) $Rk_3\ S(2,3,v) = v - (d_A+1)$ where d_A is the affine dimension of $S(2,3,v)$

(iii) $Rk_p\ S(2,3,v) = v$ for any prime $p \neq 2,3$

(iv) $Rk_2\ S(t,t+1,v) = v$ or $v-1$ according as t is even or odd.

B. FISCHER: Das Eindeutigkeitsproblem für das "Baby Monster"

Die Operationen von $M(22)$ auf den natürlichen Involutionen des "baby monster" (einer hypothetischen Gruppe der Ordnung $2^{41}.3^{13}.5^2.7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 31\cdot 47$) wurden diskutiert:

Sei D eine Klasse konjugierter $\{3,4\}$ - Transpositionen einer einfachen Gruppe G der angegebenen Ordnung; seien $x,d \in D$ mit $o(xd) = 3$ und $\mathbb{C}_G(\{d,x\}) = S \cong M(22)\cdot 2$. Dann hat S mindestens 34 und höchstens 37 Bahnen auf D und die Operation von x auf 31 dieser Bahnen ist eindeutig bestimmt. Für die restlichen Bahnen ist diese Frage noch offen.

J.M. GOETHALS: Bounds for sets of lines

Let X be a set of lines through the origin in $\mathbb{R}^d$, and let $A(X) = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$ be the set of the squares of the cosines of the angles between lines of X. Then, let the annihilator polynomial of X be defined by

$$F_X(z) = \prod_{\alpha_i \in A(X)} \frac{z-\alpha_i}{1-\alpha_i}$$

and let $P_k(z)$ denote the polynomial defined by

$$P_k(x^2) = a_k\, C_{2k}^{(\frac{d}{2}-1)}(x)$$

where $C_1^{(\gamma)}$ is the Gegenbauer polynomial of degree 1, and where a_k is a constant chosen so as to have

$$P_k(1) = \binom{d-1+2k}{2k} - \binom{d-1+2k-2}{2k-2} .$$

<u>Theorem</u>: For a set X of lines let $f_0, f_1, \dots, f_s$ denote the coefficients of the expansion $F_X(z) = \sum f_k P_k(z)$ of its annihilator polynomial.
Then,

$$|X| \leq 1/f_s$$

holds.
<u>Example 1:</u> For $A(X) = \{\alpha\}$, we have $|X| \leq \frac{d(1-\alpha)}{1-d\alpha}$.
In case of equality, the set X yields a regular two-graph.
<u>Example 2:</u> For $A(X) = \{0,\alpha\}$, we have

$$|X| \leq \frac{d(d+2)(1-\alpha)}{3-(d+2)\alpha} , \quad \text{for } d+2 < 3/\alpha .$$

For $A(X) = \{0,1/4\}$, this bound is met with equality for $d = 6,7,8$ by the root systems E_6, E_7, E_8, respectively.

Similar results hold in complex spaces. In particular for a set X of lines in $\mathbb{C}^d$ having $A(X) = \{0,\alpha\}$ as set of $\cos^2\varphi$ for the angles φ between its lines the following inequality holds:

$$|X| \leq \frac{d(d+1)(1-\alpha)}{2-(d+1)\alpha} , \quad \text{for } d+1 < 2/\alpha .$$

For $A(X) = \{0,1/16\}$, $d = 28$, a system of lines exists which meets this bound with equality and has Rudvalis' group as full automorphism group.

(vgl. auch den Vortrag von J.J. SEIDEL S. 12)

H. HÄHL: Homogene achtdimensionale Translationsebenen

Die Standgruppe der Kollineationsgruppe einer achtdimensionalen lokalkompakten topologischen Translationsebene auf zwei nichtparallelen affinen Geraden enthält einen kompakten Normalteiler K der Kodimension höchstens 3, der auf der zur 4-Sphäre homöomorphen uneigentlichen Geraden L_∞ fast effektiv wirkt. Die möglichen Wirkungen von K auf L_∞ sind bekannt. Ausgehend von diesem Sachverhalt wurden die Fälle $K \cong SO(4)$, $Spin(3) \times Spin(3)$, $SO(3)$ und $SO(2) \times SO(2)$ andeutungsweise diskutiert und es wurden Prinzipien zur Konstruktion von Translationsebenen mit solchen Gruppen K angegeben (die übrigens nicht nur im topologischen Fall, also über $\mathbb{R}$, sondern über beliebigen 4-stufigen kommutativen Körpern zu achtdimensionalen Translationsebenen führen). Diese Prinzipien gestatten eine vollständige Beschreibung aller achtdimensionalen lokalkompakten topologischen Translationsebenen mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe; die Klassifikation umfaßt die Klassifikation aller vierdimensionalen lokalkompakten topologischen Fastkörper (bekannt nach KALSCHEUER und TITS) sowie die Isotopieklassifikation aller vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren mit großen Nuklei (von REES) und ordnet sie in einen breiteren geometrischen Kontext ein.

A. HERZER: Translationstransitive postaffine Räume

Ein postaffiner Raum $\mathcal{T} = (V, \|)$ ist die Inzidenzstruktur der Punkte und Geraden des im K-Vektorraum V definierten affinen Raumes $\mathfrak{A}$, versehen mit einem Parallelismus $\|$.

$f: V \times V \longrightarrow V$ heißt alternierende K-Bilinearfunktion von Klasse 2, falls gilt:

(1) $f(v,w) = -f(w,v)$; (2) $f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w)$;

(3) $f(kv,w) = kf(v,w)$; (4) $f(f(u,v),w) = 0$ für alle $u,v,w \in V$, $k \in K$.

Mit der Verknüpfung $(v,w) \longmapsto vw = v+w+f(v,w)$ wird V zu einer Gruppe $\mathcal{G}(v,f)$.

Ist nun K ein endlicher Körper der Charakteristik $p \neq 2$ und V von endlicher Dimension über K, so gilt:

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

1. Genau dann ist $\mathfrak{G}$ eine rechtsseitige linear gefaserte affine Inzidenzgruppe auf $\mathfrak{A}$, wenn eine alternierende K-Bilinearfunktion der Klasse 2 auf V existiert, so daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(K,f)$ ist und dann ist $\mathfrak{G}$ eine zweiseitige Inzidenzgruppe auf $\mathfrak{A}$ vom Exponenten p und von Klasse ≤ 2 . Ist $\mathfrak{G}$ abelsch, so ist $\mathfrak{G} = (V,+)$.

2. Genau dann wird $\mathfrak{A}$ durch die Relation $\|$ auf der Menge der Geraden von $\mathfrak{A}$ zu einem translationstransitiven postaffinen Raum $\mathfrak{T} = (V, \|)$, wenn $\|$ durch eine alternierende K-Bilinearfunktion f der Klasse 2 auf V vermöge $Kv+w \| Kv'+w' \Longleftrightarrow K(v-f(v,w)) = K(v'-f(v',w'))$ erklärt ist.

D.G. HIGMAN: <u>Monomial characters</u>

By determining the characters of the centralizer algebra we show that the degrees of the irreducible constituents of the monomial characters of FISCHER's baby monster (see FISCHER's talk, p. 5) induced by the alternating character of $2 \cdot {}^2E_6(2) \cdot 2$ are 4371, 63 532 485 and 13 508 418 144 . These degrees have been obtained also by J.LEM by a totally different method.

D. HOLT: <u>Doubly transitive groups with solvable stabilizer</u>

The following theorem is stated, and the proof briefly discussed:

<u>Theorem:</u> Let G be a finite doubly-transitive permutation group of even degree, in which the stabilizer of a point is solvable. Then G has a normal subgroup N such that either

a) N is regular and elementary abelian, in which case G is solvable, or

b) N is 2-transitive, $G \leq Aut(N)$ and either

i) $N = PSL(2,q)$ (q odd prime power)

ii) $N = PSU(3,q)$ (q " " ") or

iii) N is of Ree type.

X. HUBAUT: <u>Extensions of graphs</u>

A graph G is said to be an <u>extension</u> of a graph G_o if the graph induced on the neighborhood of any vertex of G is isomorphic

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

to G_o . The following results on extensions were discussed:

1) Any chain of length different from 2 is extendable
2) Cycles of length 6 or 8 have infinitely many extensions
3) If $G_o = L_2(n)$, if $Aut(G)$ is transitive and if $Aut(G)_o|G_o$ is isomorphic to $Sym(n) \times Sym(n)$ then

$$|G| = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ or } \frac{(2n)!}{2(n!)^2}.$$

If $G_o = T(n)$ for n even and $Aut(G)_o|G_o$ is isomorphic to $Sym(n)$ then $|G| = 2^{n-1}$ or 2^{n-2} .

D. HUGHES: A new, less elementary, and harder proof of BLOCK's Lemma

If A is a vxb matrix with a tactical decomposition into v_1 row classes and b_1 column classes, and if the rank of A is $\varrho(A)$, then BLOCK's Lemma says that $b - \varrho(A) \geq b_1 - v_1 \geq \varrho(A) - v$, and BLOCK's original proof was extremely elementary. Using simple commutative diagram arguments, we give an alternate proof, which has the advantage of giving the basic tactical decomposition matrix equation of DEMBOWSKI and the generalized incidence matrix equation of the speaker as immediate corollaries.

W. KNAPP: Primitive permutation groups having a dihedral subconstituent of odd degree

Let (G,Ω) be a primitive permutation group with an orbital Δ of length $d > 1$, and $0 := (\alpha,\beta,\gamma)^G$ for (α,β), $(\gamma,\delta) \in \Delta$. Then a sequence $(\alpha_i)_{0\leq i\leq s}$ of points of Ω is called an 0-arc of length s iff $(\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}) \in 0$ for $1 \leq i \leq s - 1$. The orbital graph (Ω,Δ) is called SIMS-connected (with respect to 0) iff $\forall(\alpha,\beta)\in\Omega^2$ $\exists$ 0-arc $(\alpha_i)_{0\leq i\leq s}$ with $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_s = \beta$.

Theorem 1: (Ω,Δ) is SIMS-connected with respect to 0 iff $G = \langle G_{\alpha\beta}, x\rangle$ with x such that $(\alpha,\beta)^x = (\beta,\gamma)$.

This Theorem is used in proving

Theorem 2: Assume $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ is dihedral and $d > 3$, d odd.

Then one of the following holds:

(i) $G_\alpha \cong D_{2d}$ (ii) $G_\alpha \cong D_{4d}$ or
(iii) 3 divides d and $G_\alpha \cong [[V_4] Z_d] Z_2$.

In case (ii) G is known by a result of WONG. In case (i) G is an automorphism group of a partial plane, and there are infinitely many examples. It is unknown whether (iii) can occur.

H. LÜNEBURG: <u>Charakterisierungen der endlichen HUGHES-Ebenen</u>

<u>Satz.</u> Ist E eine endliche projektive Ebene, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) E ist desarguessch quadratischer Ordnung oder eine verallgemeinerte HUGHES-Ebene.

b) E besitzt eine BAER-Unterebene F mit $|T(F,g)| = o(F)^2$ für alle Geraden g von F. Dabei ist $T(F,g)$ die Gruppe aller Elationen mit der Achse g , die F invariant lassen.

c) E besitzt eine echte Unterebene F , so daß $\mathrm{Koll}(E)_F$ auf $E \setminus F$ fahnentransitiv ist.

d) E besitzt eine BAER-Unterebene F , so daß $\mathrm{Koll}(E)_F$ auf F zweifach transitiv operiert.

H. MÄURER: <u>Eine Kennzeichnung miquelscher Laguerre-Ebenen</u>

Es wurde über folgenden Satz berichtet:

Es sei L eine Laguerre-Ebene (im engeren Sinn) mit folgenden Eigenschaften:

(1) Zu jedem Zykel z existiert ein involutorischer Automorphismus mit z als Fixpunktmenge.

(2) Zu jedem zu einem festen Punkt ∞ nicht parallelen Punkt X existiert ein involutorischer Automorphismus mit $\{\infty, X\}$ als Fixpunktmenge.

Dann ist L eine miquelsche Laguerre-Ebene über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$.

J. McKAY: Computational determination of non-local subgroups of finite simple groups

Results obtained in collaboration with K.C. YOUNG were discussed. For simple G, $|G| \leq 10^5$, $G \ncong L_2(q)$, a 'complete' set of presentations has been determined such that if $G = \langle x,y \mid x^2 = y^m = 1,\ r_1(x,y) = 1 \rangle$ where m is minimal with respect to x^G then (x,y^k) will satisfy a listed presentation for some integer k . Non-local subgroups of simple groups have been found using presentations:

$PSL(2,17)$, $PSL(2,19) \subseteq J_3$,
$PSL(2,5^2)$, $PSL(3,3) \subseteq$ Suzuki sporadic, Tits' $({}^2F_4{}'(2))$,
$PSL(2,13) \subseteq G_2(4)$,
$PSL(2,29)$, $PSU(3,5) \subseteq Ru$,
as well as $PSL(3,4) \nsubseteq Ru$.

U. OTT: Endliche zyklische Ebenen

Eine Kollineationsgruppe einer endlichen projektiven Ebene heißt eine Singergruppe der Ebene, wenn sie auf der Punktmenge der Ebene scharf transitiv operiert. Eine endliche zyklische Ebene ist definiert als eine endliche projektive Ebene, welche eine zyklische Singergruppe als Kollineationsgruppe hat. Es ist nicht bekannt, ob endliche zyklische Ebenen desarguessch sind. Im Rahmen dieses Problems wird folgendes Theorem bewiesen:

Theorem: Enthält die Kollineationsgruppe einer endlichen zyklischen Ebene nicht nur eine zyklische Singergruppe, dann ist die Ebene desarguessch.

J. SAXL: Permutation groups of degree $2p = q+1$, where p and q are prime numbers

This is a report on joint work with T.M.NEUMANN. The problem studied is to classify all primitive groups of degree n which are not 4-transitive, under suitable arithmetical restrictions on n in terms of two primes. One special case:

Theorem. Let G be a primitive group of degree $n = 2p = q+1$, with p and q prime. Then either G is 4-transitive or G is $PSL(2,q)$ or $PGL(2,q)$.

Corollary. If also $n = r+3$ or $n = 5r+3$ for a prime r, then G is one of $PSL(2,q)$, $PGL(2,q)$, A_n or S_n.

An outline of the modular character theory used in the proof is given, as well as a sketch of the proof in one special case.

L.L. SCOTT: Character products

Theorem 1. Let χ be a character of a finite group G and u,v elements of G such that $\chi(uv) \neq \chi(u'v)$ for some conjugate u' of u. Then $\chi\bar{\chi}$ contains an irreducible character $\xi \neq 1$ such that $(\xi,1)_{C_G(u)} \neq 0$ and $(\xi,1)_{C_G(v)} \neq 0$ simultaneously.

The result is derived from a more general theorem on permutation characters. Also we obtain centralizer-ring-theoretic sufficient conditions for an irreducible constituent of a permutation character to be contained in the product of two given constituents. This has the following consequences for a primitive rank 3 group G of even order with permutation character $1 + \chi + \xi$:

Corollary 1. $\xi \subseteq \mathrm{Sym}^2\chi$. In particular $\xi(1) < \frac{1}{2}\chi(1)(\chi(1)+1)$.

Corollary 2. (Conjectured by Margaret SMITH) $(\chi,\xi)_{G_\alpha} > 1$.

J.J. SEIDEL: Sets of lines admitting few angles

Let Φ be a subset of $]-1,1[$ such that $(\alpha\in\Phi)\Rightarrow(-\alpha\in\Phi)$, $|\Phi| = g$. Let X be a set of lines through the origin in R^d, which take angles arc cos Φ .

Theorem. $$|X| \leq \binom{d+g-1}{g}$$

(the right hand side is the dimension of the space of the polynomials in $x_1,\dots,x_d$, homogeneous of degree g).

Similar results hold in the complex space $\mathbb{C}^d$. In particular, for $|\cos\varphi| \in \{0,\alpha\}$ we have

$$|X| \leq d\cdot\binom{d+1}{2} .$$

<u>Examples</u>. From the Leech lattice:

$\mathbb{R}^{24}$: $\binom{28}{5}$ lines at $\cos\varphi \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$,

$\mathbb{R}^{23}$: $\binom{25}{3}$ lines at $\cos\varphi \in \{0, \frac{1}{3}\}$, $\binom{24}{2}$ lines at $\cos\varphi = \frac{1}{5}$.

From the Gosset lattice (E_8):

$\mathbb{R}^{8}$: $\binom{10}{3}$ lines at $\cos\varphi \in \{0, \frac{1}{2}\}$; $\mathbb{R}^7$: 63 ; $\mathbb{R}^6$: 36 .

Furthermore $\mathbb{C}^6$: 126 lines at $|\cos\varphi| \in \{0, \frac{1}{2}\}$.

<u>Lit.:</u> P. DELSARTE - J.M. GOETHALS - J.J. SEIDEL, Bounds for systems of lines, and Jacobi polynomials, Philips Research Reports, to appear (1975)

(vgl. auch den Vortrag von J.M.GOETHALS, S.5+6).

Margaret S. SMITH: <u>A characterization of the symmetric groups</u>

Rank 3 groups in which the stabilizer of a point has rank 3 on one suborbit and on the other suborbit it acts imprimitively with blocks of size 2 and 2-transitively on the blocks were studied. Under special assumptions about the adjacency matrix of the imprimitive suborbit it was shown that G was either a 4-fold transitive subgroup of the symmetric group Σ_m acting on $\frac{m(m-1)}{2}$ unordered pairs, the wreath product $\Sigma_3 \wr \Sigma_2$ of degree 9, or PSU(4,2) or Aut(PSU(4,2)) of degree 27.

K. STRAMBACH: <u>Liesche Hjelmslevgruppen</u>

Eine Liesche Hjelmslevgruppe ist ein Paar (G,S) bestehend aus einer Liegruppe und einer G erzeugenden zusammenhängenden unter G invarianten Teilmenge S von Involutionen, so daß gilt:

(1) Zu einer Involution $A \in S \cdot S$ und einem Element $b \in S$ gibt es ein $c \in S$, so daß c sowohl mit A als auch mit b kommutiert.

(2) Ist A eine Involution aus $S \cdot S$ und $b \in S$ mit $b \neq A$, so existiert in S höchstens ein Element, das sowohl mit b als auch mit A kommutiert.

(3) Sind $a,b,c \in S$, so daß jedes dieser drei Elemente mit einer Involution aus S bzw. $S \cdot S$ vertauschbar ist, so gilt

$abc \in S$ (Dreispiegelungssatz).

Es wurden alle Lieschen Hjelmslevgruppen bestimmt.

L. TEIRLINCK: Zur Geometrie von Tripelsystemen

Eine neue Charakterisierung der projektiven Räume wurde vorgestellt und es wurde gezeigt, wie man auf natürliche Weise jedem Tripelsystem einen projektiven Raum der Ordnung 2 und jedem Quadrupelsystem einen affinen Raum der Ordnung 2 assoziieren kann. Alle Steinerräume (d.h. Tripelsysteme, die nicht von einem Dreieck erzeugt werden) mit höchstens 39 Punkten wurden bestimmt.

H. WIELANDT: Topological concepts in the theory of permutation groups

In an arbitrary set Ω we may select

(I) a set $\mathcal{C}$ of ("connected") subsets of Ω such that

(a) $\Omega \in \mathcal{C}$

(b) $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{C}$ and $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ imply $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \in \mathcal{C}$,

(c) for any chain $\{\Gamma_i\} \subseteq \mathcal{C}$ we have $\bigcup \Gamma_i \in \mathcal{C}$

(II) a set $\mathcal{K}$ of ("compact") nonempty subsets of Ω such that

(a) $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{K}$ and $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ imply $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \in \mathcal{K}$

(b) for any chain $\{\Gamma_i\} \subseteq \mathcal{K}$ we have $\bigcap \Gamma_i \in \mathcal{K}$.

These concepts may serve to formulate and prove theorems on permutation groups with or without topology (e.g. JORDAN's criterion for 2-transitivity, and generalisations of SYLOW's theorem). Topologists are invited to search for a simple unified proof of SYLOW's theorem and the MALCEV-IWASAWA theorem on connected locally compact groups.

H. Hähl (Tübingen)