MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 4/1976

Modelltheorie

(Produkte, Garben und ihre Anwendungen in der Algebra)

11.1. bis 17.1.1976

Die Modelltheorietagung wurde dieses Jahr von Frau S. Koppelberg, Herrn U. Felgner und Herrn E.-J. Thiele geleitet. Hauptthema der Vorträge waren Garben und ihre Beziehungen zur Modelltheorie. Außerdem wurden einige Themen aus anderen Gebieten der Modelltheorie behandelt.

Teilnehmer

W. Baur, Zürich
M. Becker, Kiel
U. Brehm, Berlin
S. Breitsprecher, Tübingen
G. Broesterhuizen, Nijmegen
K.-H. Diener, Köln
W. Eck, Berlin
U. Felgner, Tübingen
W. Felscher, Tübingen
R. Fittler, Berlin
J. Flum, Freiburg
K. Keimel, Darmstadt
N. Klingen, Köln
Kollreider, Innsbruck
S. Koppelberg, Berlin
W. Lange, Wuppertal
J. Makowsky, Berlin
K.-P. Podewski, Hannover

K. Potthoff, Kiel
A. Prestel, Konstanz
J. Reineke, Hannover
M. Richter, Aachen

M. Schwartz, Kiel
D.S. Scott, Oxford
E.-J. Thiele, Berlin
G. Todt, Kiel
B. Voigt, Hannover
H. Volger, Tübingen
S. Wegener, Konstanz
V. Weispfenning, Heidelberg
H. Werner, Darmstadt
Wierzejewski, Wroclaw
M. Ziegler, Berlin

Vortragsauszüge

S. KOPPELBERG: Einfache Eigenschaften von Garben

Es wurden die Begriffe der Garbe bzw. Garbe von Strukturen definiert und einige wesentliche Eigenschaften angegeben.

U. BREHM: Darstellung von Ringen als Ringe der globalen Schnitte in Garben über Booleschen Räumen

Es wird gezeigt, daß sich jeder kommutative Ring mit 1 bis auf Isomorphie eindeutig als Ring der globalen Schnitte in einer Garbe von unzerlegbaren Ringen mit 1 über einem Booleschen Raum darstellen läßt.
Dabei heißt R unzerlegbar, wenn aus $R \cong R_1 \times R_2$ stets folgt $R_1 \cong 0$ oder $R_2 \cong 0$.
Anschließend werden die Ringe charakterisiert, bei deren Darstellung die Garbe ein T_2-Raum ist bzw. ein T_2-Raum und Garbe von Integritätsbereichen bzw. Garbe von Körpern. Letzteres sind gerade die regulären Ringe.

J. REINEKE: <u>Modellvollständigkeitsbeweise mittels Schnitten</u>

Wir führten den folgenden Satz von A. Macintyre vor:
Sei H eine positiv modellvollständige Theorie. Alle Modelle von H seien Erweiterungen von unzerlegbaren Ringen mit 1. Weiterhin gelte: Wenn $\varphi(\vec{v})$ atomare Formel ohne Vorkommen der 1, dann ist $H \vdash \varphi(\vec{0})$.
Sei Σ die Klasse aller Schnitte $\Gamma(X,S)$ von Garben (S,Π,X) mit den folgenden Eigenschaften
1.) X ist Boolescher Raum ohne isolierte Punkte
2.) $\forall x \in X$ ist $S_x \models H$
Dann ist $Th(\Sigma)$ modellvollständig

K. POTTHOFF: <u>Prim- und Ultrahalme</u>

Es wurde eine modifizierte Fassung der Arbeit "Sheaves of structures and generalized ultraproducts" von D.P. Ellerman vorgetragen.

H. VOLGER: <u>The Feferman-Vaught Theorem revisited</u>

Es wurde die Verallgemeinerung des Satzes von Feferman-Vaught auf boolesch-wertige Strukturen bewiesen. Der Satz besagt, daß für jede Formel $\varphi(\vec{x})$ einer Sprache in L eine Folge von Formeln
$<\Phi(y_1,\dots,y_m);\ \psi_1(\vec{x}),\dots,\psi_m(\vec{x})>$ existiert, wobei die ψ_j aus L ist und Φ eine Formel aus L_{BA}, der Sprache der BA's, ist, derart daß für jede endlich vollständige boolesch-wertige L-Struktur $\mathfrak{A}$ mit Werten in B, die das Maximumprinzip erfüllt, folgendes gilt: (i) $\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a})$ iff (ii) $B \models \Phi([\psi_1(\vec{a})],\dots[\psi_m(\vec{a})])$; dabei ist $[\psi_j(\vec{a})]$ der Wahrheitswert von $\psi_j(\vec{a})$ in B.
Es gilt auch eine relativierte Version für Substrukturen, die durch eine Folge $<\Delta(y_1,\dots,y_m),\ \varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_m(x)>$ ausgesondert werden.
Außerdem wurde gezeigt, daß boolesch-wertige L-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit Werten in B, die endlich vollständig sind, den Garben von L-Strukturen über B*, dem dualen Raum von

B, entsprechen, bei denen die atomaren Relationen offen-abg. sind. Das Maximumprinzip entspricht der Bedingung, daß die Erfüllungsmenge einer jeden Formel offen-abg. ist. - Als Anwendung wurde gezeigt, daß verallgemeinerte Produkte (= endl. vollständige boolesch-wertige Strukturen mit Max.prinzip) und verallgemeinerte Potenzen (= Boolesche Potenzen) elementare Äquivalenz und elementare Einbettungen erhalten. Zum Abschluß wurde der Satz von Feferman-Vaught in seiner relativierten Form auf ein Entscheidungsproblem angewendet. Damit läßt sich die Entscheidbarkeit der Theorie einer residual endlichen Diskriminatorvarietät zeigen.

H. WERNER: <u>Entscheidbarkeit über Hausdorff-Garben über Booleschen Räumen</u>

Für eine Klasse $\underline{K}$ von Algebren definiert man $A \in \Gamma^a \underline{K}$ genau dann wenn es einen Booleschen Raum $X(A)$ und für jedes $x \in X(A)$ eine Algebra $A_x \in \underline{K}$ mit surjektiven Homomorphismen $p_x : A \twoheadrightarrow A_x$ gibt mit

(1) $\{p_x \mid x \in X(A)\}$ ist eine treue subdirekte Darstellung von A

(2) (<u>atomic extension</u>) Für jeden atomaren Ausdruck $\Psi(x_1,\dots,x_n)$ und $a_1,\dots,a_n \in A$ ist die Menge $[\Psi(a_1,\dots,a_n)] := \{x \in X(A) \mid A_x \models (p_x a_1,\dots,p_x a_n)\}$ offen-abgeschlossen in $X(A)$.

(3) (<u>patchwork property</u>) Ist $N \subseteq X(A)$ offen-abgeschlossen und $a,b \in A$, so gibt es ein $c \in A$ mit $p_x(c) = p_x(a)$ für $x \in N$ und $p_x(c) = p_x(b)$ sonst.

Mit anderen Worten $A \in \Gamma^a \underline{K}$ genau dann wenn A isomorph ist zu der Algebra aller globalen stetigen Schnitte einer Hausdorff-Garbe über dem Booleschen Raum $X(A)$.

<u>SATZ</u>: Ist $\underline{K}$ eine endliche Menge endlicher Algebren von endlichem Typ, so ist $Th(\Gamma^a \underline{K})$ entscheidbar. Derselbe Satz gilt auch für allgemeine Strukturen mit endlicher Sprache.

N.KLINGEN: Ultraprodukte und algebraische Zahlentheorie

Es wird berichtet über eine gemeinsame Arbeit mit W. Jehne[1]. Für (nicht notwendig endlich-) algebraische Erweiterungen von Zahlkörpern erweitert man den Raum der endlichen Primstellen mittels Ultrafiltern zu einem kompakten Raum Ω_K und für jedes $v \in \Omega_K$ definiert man eine "v- adische Hülle" K_v von K mittels Ultraprodukten der lokalen Körper zu K. Dann gilt folgender

Satz: a) $K|k$ sei galoissch und $A|k$ die maximal abelsche Erweiterung von k in K. Dann existieren stetige und surjektive Abbildungen $[\underline{K|k}], (\underline{K|k})$ (verallgemeinertes Frobenius- bzw. Artinsymbol) und inv_K, die folgendes Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_K \arrow[r, "{[\underline{K|k}]}"] \arrow[d] & \mathfrak{G}(K|k) \arrow[d, "\mathfrak{X}"] \\
\Omega_k \arrow[r, "{(\underline{K|k})}"] \arrow[d, "\mathrm{inv}_K"] & \mathfrak{X}\mathfrak{G}(K|k) \arrow[d] \\
\overline{C}_k \arrow[r, "{(\ ,A|k)}"] & \mathfrak{G}(A|k)
\end{tikzcd}$$

wobei $(\ ,A|k) : \overline{C}_k \to \mathfrak{G}(A|k)$ der Reziprozitätshomomorphismus ist.

b) Die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}_{K|k}(v) := \{\sigma \in \mathfrak{G}(K|k) \mid \sigma v = v\}$ wird vom verallgemeinerten Frobeniussymbol erzeugt und der Zerlegungskörper $Z_{K|k}(v)$ ist $K|k$.

Die Surjektivität der Abbildungen geht auf den

Čebotorev'schen Richtigkeitssatz zurück. Als unmittelbares Korollar erhält man ein Resultat von Ax[2]) über die Charakterisierung des absolut algebraischen Teils in Ultraprodukten endlicher Körper sowie zusätzliche Information über die Zusammenhänge. Mittels des verallgemeinerten Artinsymbols läßt sich auch ein Kriterium für die Isomorphie von Ultraprodukten der lokalen Körper angeben. Benutzt werden dazu Resultate von Ax[2)] sowie der Isomorphiesatz von Ax- Kochen in der Version von Armbrust[3)].

1) Superprimes and a generalized Frobeniussymbol, erscheint in Acta Arithmetica

2) Elementary theory of finite fields
Ann. Math. 88

3) On the theorem of Ax and Kochen, Archiv Math. 22

J. WIERZEJEWSKI: Products of Superstable Theories.

We find an estimation for Shelah's degree of formulas and types over $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$. As for Morley rank we have in the present case:

Theorem. Let $\mathfrak{A}_0$ and $\mathfrak{A}_1$ be structures in the same language and let $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_0)$, $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1)$ be superstable theories. Assume that p is a type over $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$. Then

$$\mathrm{Deg}(p) \leq \mathrm{l.u.b.}\ \{\mathrm{Deg}(p_0) \oplus \mathrm{Deg}(P_1) \mid p_0, p_1 \text{ are types over } \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1 \text{ respectively, and } p_0 \times p_1 \subseteq p\}.$$

Corollary. If T_0, T_1 are superstable, then

$$\alpha_0\ (T_0 \times T_1) \leq \alpha_0\ (T_0) \oplus \alpha_0(T_1),$$

where $\alpha_0(T) = \min\ \{\xi \mid \text{for every } \mathfrak{A} \models T \text{ and every type } p \text{ over } \mathfrak{A}\ \mathrm{Deg}(p) < \xi\}$.

M. ZIEGLER: Große generische Gruppen

Definition: $S^*\omega$ sei die Gruppe der endlichen Permutationen von ω. $\mathfrak{A}$ sei eine Relationalstruktur, auf der $S^*\omega$ nicht-trivial operiert, d.h. wir haben einen Homomorphismus $\sigma \mapsto \underline{\sigma} \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$ und ein $a \in |\mathfrak{A}|$ derart, daß $\underline{\sigma}(a) \neq a$.

Satz: Wenn jedes Element von $\mathfrak{A}$ von einer endlichen Teilmenge von ω abhängt (d.h. $\forall a \in |\mathfrak{A}|\ \exists b \subset \omega$ $(\bar{\bar{b}} < \omega \wedge \forall \sigma \in S^*\omega\ (\sigma|b = \mathrm{id}\ b \rightarrow \sigma(a) = a))$), dann gibt es zu jeder Kardinalzahl $\kappa > \bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ ein $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{A}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{L}}} = \kappa$.

Folgerung 1): Zu jeder algebraisch - abgeschlossenen Gruppe G und jeder Kardinalzahl $\kappa > \bar{\bar{G}}$ existiert ein $H \equiv_{\infty\omega} G$ mit $\bar{\bar{H}} = \kappa$ (denn es gibt ein $C \equiv_{\infty\omega} G$, $\bar{\bar{C}} < \bar{\bar{G}}$, auf das der Satz anwendbar ist).

Folgerung 2): Es gibt endlich - generische Gruppen von beliebiger Mächtigkeit.

D.S. SCOTT: Advice on Sheaves

Work with sections instead of germs. Look for the internal logic of the structures. Use (complete) Heyting algebras, but try to generalize to sheaves over a site. Employ "free" logic without existence assumptions and look for interesting partial algebras. Take advantage of descriptions and terms. Use higher - order intuitionistic logic. Watch out for lack of $\neg$ -duality (e.g. with apartness, ordering and theory of ideals). Try to develop more of intuitionistic set theory (e.g. does Zorn's Lemma have any use? Is there an order extension theorem?) Find out what it means to change base space (change of topos). Explain the connections with forcing (I - operators and quotients of Heyting algebras). Work more on intuitionistic algebra (when do ideals exist? What is the right notion of algebraic closure? What are the connections with geometry?) Find out what kind of rings come from the schemes of algebraic geometry and what internal properties they have.

V. WEISPFENNING: Elementare Eigenschaften von Verbandsprodukten

Jeder Garbe $\langle S,\Pi,X\rangle$ von L- Strukturen wird eine Struktur 1. Ordnung in einer 2- sortigen Erweiterungssprache L* von L zugeordnet, die vollständigen Verbandsprodukte (VVP's). Für Räume X, die bis auf Homöomorphie durch ihren Verband O(X) der offenen Mengen bestimmt sind (z.B. T_1- Räume), können VVP's durch $L_{\infty\omega}$- Axiome charakterisiert werden, d.h. man hat einen entsprechenden Repräsentationssatz.
Durch ähnliche (einfachere) Konstruktionen werden welken Garben (über T_1-Räumen), und Garben über Booleschen Räumen, bei denen die Erfüllungsmengen atomarer Formeln clopen sind, gewisse L*- Strukturen M zugeordnet (vollständige globale VP's bzw. vollst. Boolesche Produkte), die durch $L_{\infty\omega}$- Axiome bzw. elementare Axiome charakterisiert werden können.
Für VBP's werden Übertragungssätze von der Halmtheorie auf die Schnittheorie gezeigt für die Eigenschaften: Ex. von Quantorenelimination, Ex. und Eindeutigkeit von Primerweiterungen. Es ergeben sich Anwendungen auf kommut. reguläre Ringe, kommut. reguläre f- Ringe, kommut. reguläre Differentialringe der char 0, und verbandsgeordnete abelsche Gruppen.

U. FELGNER: Souslins Problem für geordnete algebraische Strukturen

Souslin hat 1920 das Problem gestellt, ob eine linear geordnete Menge $\langle M,\leq\rangle$, welche die folgenden drei Bedingungen (SI) $\langle M,\leq\rangle$ hat kein erstes und kein letztes Element, (SII) $\langle M,\leq\rangle$ ist in sich dicht und stetig geordnet, (SIII) Jede Familie von paarweise disjunkten offenen Intervallen ist höchstens abzählbar, erfüllt, mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ordnungsisomorph ist.

Da $\mathbb{R}$ algebraische Operationen trägt, stellt sich die Frage, ob etwa ein geordneter Schiefkörper, dessen Ordnung (SI), (SII), (SIII) erfüllt, mit $<\mathbb{R},+,\cdot,\leq>$ als Körper isomorph ist. Nach Hilbert ist die Antwort positiv. Wir bewiesen, daß die Antwort auch für rechts-geordnete Fastkörper positiv ist.

<u>Satz</u>: (In ZF + V = L) Es gibt eine positiv geordnete archimedische Kommutative Halbgruppe, welche die Kürzungsregeln erfüllt und (SI),(SII),(SIII) aber nicht in die reellen Zahlen einbettbar ist.

G. BROESTERHUIZEN: <u>Theories indiscernible in other theories</u>

One can define: $\mathfrak{A}$ indisc. in $\mathfrak{B}$ $\underset{D}{\equiv}$ $A \subseteq B \wedge \forall \vec{a},\vec{b} \in A^n$ [if $\vec{a},\vec{b}$ satisfy the same open type in $\mathfrak{A}$, they satisfy the same type in $\mathfrak{B}$].

$T_1 \multimap T_2 \underset{D}{\equiv} \forall_{\mathfrak{A} \models T_1} \forall_{\mathfrak{B} \models T_2} \exists_{\mathfrak{B}' \succ \mathfrak{B}}$ [$\mathfrak{A}$ indisc. in $\mathfrak{B}'$]

A classification is given of those theories T s.t. for all T': T $\multimap$ T' .

<u>Then</u>: If for all T' : T $\multimap$ T', then T is unstable.

Examples are shown of models $\mathfrak{A}$ s.t.

i) $\forall_{\mathfrak{B}} \exists_{\mathfrak{B}' \succ \mathfrak{B}}$ [$\mathfrak{A}$ indisc. in $\mathfrak{B}'$] and

ii) Th($\mathfrak{A}$). ω- stable, superstable but not ω- stable, stable but not superstable.

An example is given of a model $\mathfrak{A}$ s.t. Th $(\mathfrak{A}) \not\multimap$ Th$(\mathfrak{A})$.

S.Wegener (Konstanz)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft