MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 5/1976

Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen

18.1. bis 24.1.1976

Die Tagung stand unter der Leitung von H. Amann (Bochum), N. Bazley (Köln) und K. Kirchgässner (Stuttgart). Sie wurde von 45 Teilnehmern besucht, von denen 25 Vorträge hielten.

Die nichtlineare Funktionalanalysis ist ein junges Teilgebiet der Mathematik, welches sich in seiner Entwicklung weitgehend an konkreten Problemstellungen der Anwendungen orientiert. So besteht ein besonders enger Zusammenhang zwischen der Theorie der nichtlinearen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und der nichtlinearen Funktionalanalysis, wobei besonders hervorzuheben ist, daß der erste Themenkreis in vielen Fällen direkt mit den übrigen Naturwissenschaften, insbesondere mit der Physik in Verbindung steht.

Diese Tatsache spiegelt sich auch in den Themenstellungen der gehaltenen Vorträge wider. So wurden Methoden der nichtlinearen Funktionalanalysis (wie. z.B. Variationsmethoden, die Theorie der monotonen Operatoren, die Abbildungsgradtheorie, tiefliegende Sätze über implizite Funktionen usw.) herangezogen, um Probleme zu behandeln, die aus so verschiedenen Gebieten stammen, wie z.B. der Kernphysik, der Strömungsmechanik, der Himmelsmechanik, der statistischen Mechanik usw.. Daneben waren einige Vorträge den Grundlagen der Theorie der monotonen Operatoren und der abstrakten Fixpunkttheorie gewidmet. Eine Reihe von Vorträgen gruppierte sich um das Problem der Hopf-Bifurkation, und bei anderen Vorträgen standen Fragen der Lösbarkeit nichtlinearer partieller Differentialgleichungen im Vordergrund.

Das Vortragsprogramm wurde ergänzt durch anregende Diskussionen und persönliche Gespräche. Zum harmonischen Verlauf der Tagung hat nicht zuletzt das Mathematische Forschungsinstitut mit seiner angenehmen Atmosphäre und der vorbildlichen Organisation entscheidend beigetragen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

H. Amann (Bochum)
M. Backwinkel-Schillings (Bochum)
C. Bandle (Basel)
C. Bardos (Nice)
N.W. Bazley (Köln)
R. Böhme (Erlangen)
D.K. Bose (Bochum)
H. Brezis (Paris)
H. Brill (Bochum)
N. Chafee (Atlanta)
C.V. Coffman (Pittsburgh)
E.N. Dancer (Armidale)
K. Deimling (Kiel)
J. Deuel (Zürich)
Chr. Fenske (Gießen)
C. Gerhardt (Heidelberg)
J.-P. Gossez (Brüssel)
H.-P. Heinz (Mainz)
P. Hess (Zürich)
E. Hölder (Mainz)
G. Iooss (Nice)
H. Kielhöfer (Stuttgart)
K. Kirchgässner (Stuttgart)
R. Lozi (Nice)
R.J. Magnus (Genf)
J. Mawhin (Louvain)
H.W. Melzer (Köln)
G.J. Minty (Bloomington)
R.D. Nussbaum (New Brunswick)
H. Pachale (Berlin)
H.-O. Peitgen (Bonn)
M. Reeken (Bochum)
G. Rupprecht (Stuttgart)
B. Scarpellini (Basel)
J. Scheurle (Stuttgart)
J. Schröder (Köln)
C.G. Simader (München)
U. Staude (Mainz)
H. Steinlein (München)
R.E.L. Turner (Madison)
W. von Wahl (Bochum)
J. Weyer (Köln)
E. Zehnder (Erlangen)
B. Zwahlen (Lausanne)

Vortragsauszüge

Without hesitation or queries
I expanded again in a series.
My great revelation
Was Hopf bifurcation
In totally linear theories. (N. Bazley, Köln)

Bardos, C.: Hölder estimates and time regularity for the Euler equation

Lagrangian coordinates and a priori estimates in Hölder space are used to prove that during a finite time T^* (depending on the curl of the initial data) the Euler equation has a unique solution. Furthermore up to this time T^* there is no loss of regularity. It is shown that T^* depends only on the $C^{0,\alpha}$ norm of the curl of the initial data. This should be related to the physical intuition (the regularity should depend only on local quantities) and to the classical result for the one dimensional Burgers equation. Finally Hölder estimates allow to consider the case of a fluid in an infinite domain with infinite total energy. This corresponds to the case of the homogeneous turbulence where the fluid has a finite energy by volume unit but a total infinite energy.

Böhme, R.: Ein Variationsproblem mit vielen Lösungen

Wir betrachten das klassische Variationsproblem für Flächen, deren Mittlere Krümmung verschwindet, wobei der Rand der Fläche vorgeschrieben ist, im euklidischen $\mathbb{R}^3$. Wir geben Bedingungen an, wann solche Flächen "stabil gegen Störung der Randkurve" sind, und benutzen diese, um Randkurven zu finden, die beliebig (endlich) viele solcher Flächen beranden.

Bose, D.K.: Solitary Waves In Some Nonlinear Dispersive Systems

We show that for certain nonlinear parabolic equations modelling long waves in dispersive media, solitary wave solutions exist.
Essentially the problem is to show that a Hammerstein integral equation defined over an unbounded domain, has a third solution. The method used shows that periodic waves exist and as the period tends to infinity they converge, uniformly on compact subsets, to a solitary wave solution.

(This work was done in conjunction with J.L.Bona and T.B.Benjamin)

Brêzis, H.: Thomas-Fermi equation and generalizations

In a joint work with Ph. Benilan we consider the following problem:

$$\operatorname*{Min}_{\rho \in K} E(\rho)$$

where $E(\rho) = \int_{\mathbb{R}^N} [j(\rho(x)) + V(x)\rho(x)]\,dx + \iint \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \rho(x)\rho(y)dxdy$

$(N \geq 3)$, $j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is convex, $j(o) = j'(o) = o$ and V is given,

$$K = \{\rho \in L^1 ; \rho \geq o , \int\rho = M\} .$$

Under some assumptions on V , we prove that there exists $M_0 > 0$ s.t. for

$M > M_0$: No solution exists

$M \leq M_0$: $\exists$ a unique solution

$M < M_0$: the solution ρ has compact support.

This extends a work by Lieb and Simon.

Chafee, N.: Hopf Bifurcation and Arbitrary Perturbations of a Differential Equation

We consider an "unperturbed" differential equation $\dot{x}(t) = F_0(x(t))$ where $x(t) \in R^n$, $n > 1$. We assume that $F_0(o) = o$ and that the Jacobian matrix $F_0'(o)$ has two simple eigenvalues $\pm i$. We also assume that any other eigenvalue λ of $F_0'(o)$ is not an integer multiple of i . The object of our investigation is to classify all functions F near F_0 with respect to whether or not the corresponding "perturbed" equation $\dot{x}(t) = F(x(t))$ has a periodic orbit γ near the origin with period T close to 2π .

Coffman, C.V.: The non-homogeneous classical elastica

The non-homogeneous classical elastica

$$(\rho(s)\phi')' + \lambda \sin \phi = o , \quad \phi'(o) = \phi'(L) = o ,$$

as well as a generalized version thereof is considered. A new variational principle, analogous to the Courant-Weyl minimax principle, is formulated. Stability of solutions is analyzed in detail. Finally it is shown that, in contrast to the case of the homogeneous elastica $(\rho(s) = \text{constant})$ secondary bifurcation of higher buckled states can occur and locally stable higher buckled states can exist.

Dancer, E.N.: Bifurcation from infinity

We discuss a number of results (and only outline their proofs). We improve the results of Rabinowitz and Toland on bifurcation from infinity in a number of cases. We illustrate some of the improved results by applying them to boundary value problems for ordinary differential equations. We also discuss the structure of the "large" solutions. Our results on this problem improve those of Toland and the author. Some of them are used to improve some results of Amann on bifurcation from infinity for strictly convex non-linear elliptic partial differential equations.

Deimling, K.: Ordinary Differential Equations in Banach Spaces

We are concerned with existence of C^1-solutions for Cauchy's problem

$$x' = f(t,x) \ , \ x(o) = x_0 \in D \subset X \ ,$$

where X is a B-space with $\dim X = \infty$ and $f : [o,a] \times D \to X$. We give a nonlinear version of Ovcyannikov's theorem in case x_0 is an inner point of D. This is followed by some remarks on existence in cases where the interior of D may be empty.

Fenske, C.C.: Fixed points of zero index in asymptotic fixed point theory

This is a report on joint work done with H.-O. Peitgen. If X is a topological space $f : X \to X$ a map, then $A \subset X$ is an attractor for f, if $\{f^n x \mid n \in \mathbb{N}\} \cap A \neq \emptyset$ for all $x \in X$. f is of compact attraction, if f is locally compact and has a compact attractor. A compact attractor A is stable, if A has arbitrarily small neighbourhoods U such that $\overline{f(U)}$ is a compact subset of U. In the following let X be a metric ANR and $f : X \to X$ a map of compact attraction. If U is open in X and $fx \neq x$ for all $x \in \partial U$, choose an invariant open $Y \subset X$, such that Y absorbs compact sets in X and $\overline{f(Y)}$ is a compact subset of Y. Define $\mathrm{ind}(X,f,U) := \mathrm{ind}(Y,f,Y \cap U)$. ind has all the properties of a fixed point index. If F is open and closed in Fix(f) and $f(X \setminus F) \subset X \setminus F$ and if $f|X \setminus F$ is of compact attraction, then $\mathrm{ind}(X,f,W) = \Lambda(f) - \Lambda(f|X \setminus F)$ for any neighbourhood W of F with $\overline{W} \cap (\mathrm{Fix}(f) \setminus F) = \emptyset$. ($\Lambda$ is the generalized Lefschetz number.) Under the same hypotheses choose a stable compact attractor A for $f|X \setminus F$. If there is a neighbourhood U of F such that $\overline{U} \cap A = \emptyset$ and $H_*(X, X \setminus U) = o$, then $\mathrm{ind}(X,f,W) = o$. Hence $\Lambda(f) \neq o$ implies the existence of a fixed point outside F. This immediately gives results on the existence of non-repulsive and non-ejective fixed points. In addition one shows that the index of an ejective stationary point x of a semi-flow $(\phi_t)_{t \geq o}$ on X is given by the difference of the Euler characteristics of X and $X \setminus \{x\}$, if each ϕ_t is of compact attraction for $t > o$.

Fučík, S.: Open Problems in the Solvability of Nonlinear Problems

Let A be a second order, formally self-adjoint uniformly elliptic differential operator and let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Consider nonlinear boundary value problems (BVP) of the form

$$(1) \qquad Au + g(u) = h \quad \text{in } \Omega \ , \quad u = o \quad \text{on } \partial\Omega \ ,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with smooth boundary. We are interested in the solvability of equation (1) in $H^1_0(\Omega)$ for a given $h \in L_2(\Omega)$. Suppose that the limits $\mu := \lim_{\xi \to \infty} g(\xi)/\xi$ and $\nu := \lim_{\xi \to -\infty} g(\xi)/\xi$ exist in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Then one can distinguish the following cases: (I) $\mu = \nu \in \mathbb{R}$ ("vanishing" nonlinearity), (II) $\mu \neq \nu$ ("jumping" nonlinearity) and $\nu = \mu = \infty$ ("strong" nonlinearity). In each of these cases there are many open problems, nine of which are formulated in this paper. In the cases (I) and (II) the problems concern mainly the situation where zero is an eigenvalue of A, usually not the first one.

(this paper was read by H. Amann (Bochum))

Gerhardt, C.: Variationsungleichungen mit einer Gradientenschranke als Nebenbedingung

Wir untersuchten Regularitätsfragen und die Existenz eines Lagrangeschen Multiplikators für Lösungen von Variationsungleichungen der Art

$$u \in K : \langle Au - \mu \ , v - u \rangle \geq o \qquad \forall v \in K \ ,$$

$$K = \{v \in H^{1,\infty}(\Omega) : |Dv| \leq 1 \ , v|_{\Gamma_k} = c_k \ , k = o \ ,\ldots, N\} \quad .$$

Ω ist eine beschränkte, offene, mehrfach zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, deren Rand sich aus den Komponenten $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_N$ zusammensetzt. A ist ein quasilinearer, elliptischer Differentialoperator, $A = -D^i(a_i(p))$; und $\mu, c_0,\ldots,c_N$ vorgegebene Konstanten. Solche Variationsungleichungen ergeben sich bei der elastisch-plastischen Torsion eines zylindrischen Stabes.

Gossez, J.-P.: Extension to the Bidual of a Maximal Monotone Operator

Let X be a real Banach space with dual X^* and let $T : X \to 2^{X^*}$ be a maximal monotone operator. Looking at T as an operator from X^{**} to 2^{X^*}, we can, by Zorn's lemma, extend it into a maximal monotone operator from X^{**} to 2^{X^*}. We study here the question whether this extension is unique.

This is so in a number of cases, for instance when T is the subdifferential of a convex function, or the monotone operator associated with a saddle function, or more generally, when T is of dense type (i.e. the closure of T in $X^{**} \times X^*$ for some suitable topology is maximal monotone). We give an example of a maximal monotone operator which is not of dense type but which has a unique maximal monotone extension to the bidual. We also construct a maximal monotone operator which admits several (actually infinitely many) maximal monotone extensions to the bidual.

Iooss, G.: Conjectures on the Dynamo Problem for the Geomagnetic Field

The idea is to show that the existence of the geomagnetic field results from the bifurcation of a steady convective flow between two uniformly rotating concentric spheres (at the interior of the earth). The chosen model is a flow between two horizontal plates, heated from below, these plates rotating uniformly. The equations are the Navier-Stokes ones with the Boussinesq approximation and the Maxwell equations with usual assumptions. If we linearize the problem around the steady convective first bifurcated flow, it is shown in [1] that 0 is always an eigenvalue of the linear operator and that a double eigenvalue near 0 splits into two simple non real conjugated eigenvalues when the Rayleigh number increases. Our conjecture is that these eigenvalues cross the imaginary axis before other eigenvalues. This leads to some bifurcated periodic solutions. The stable ones can then be observed and explain the periodicity (2×10^5 years) now admitted for this self-oscillating magnetic field. This work gives a new view point on the works of S. Childress and F. Busse (for instance).

[1] G. Durand Thèse de 3^0 cycle. Orsay (1975)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Kielhöfer, H.: Verzweigung periodischer Lösungen

Im Jahre 1942 bewies E. Hopf für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

(1) $$\frac{du}{dt} + Au + \lambda B_1 u + \lambda^2 B_2 u = F(u) + \lambda F_1(u) + \dots$$

folgenden Satz: Ist $i\mu_0, \mu_0 > o$, (algebraisch) einfacher Eigenwert von A und gilt für die Eigenwerte $\mu(\lambda)$ von $A + B(\lambda)$ $(B(\lambda) = \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \dots)$ die Bedingung $Re\,\mu'(\lambda) \neq o$, so ist $\lambda = o$ Verzweigungspunkt periodischer Lösungen. Dieses Ergebnis kann in folgender Weise verallgemeinert werden:

1) (1) ist eine Evolutionsgleichung im Hilbertraum

2) Unter einer Zusatzvoraussetzung an F ist $Re\,\mu'(o) = \dots = Re\,\mu^{(m-1)}(o) = o$, $Re\,\mu^{(m)}(o) \neq o$

hinreichend, für eine gewisse Klasse von B_j auch notwendig für Verzweigung.

3) Für die algebraische Vielfachheit r von $i\mu_0$ kann auch $r \geq 1$ gelten. Es wird gezeigt, daß vier Fälle zu unterscheiden sind, in denen man hofft, das Theorem über implizite Funktionen anwenden zu können. Dies wurde an einer Modellgleichung

$$u_t - \Delta u + B(\lambda)u = F(\lambda,u)$$

erfolgreich getestet.

Lozi, R.: A computing method for bifurcation boughs of nonlinear eigenvalue problems

We give a numerical method to compute the "regular parts" (that means the parts where we can apply the implicit function theorem) of bifurcation branches of the equation $f(x,y) = 0$ as solutions of a Cauchy problem in which the real bifurcation parameter y is the variable.

Magnus, R.J.: The odd multiplicity criterion of bifurcation theory

Let X,Y be Banach spaces, L(X,Y) the bounded linear mappings from X to Y, and $A : \mathbb{R} \to L(X,Y)$ a C^∞ mapping such that $A(\lambda)$ is a Fredholm operator of index 0 for each λ. Then there is defined the multiplicity of A at λ, in short $\mu[A;\lambda]$, which is a non-negative integer or ∞. If $X = Y$ and $A(\lambda) = Id - \lambda T$ where $T \in L(X,X)$ then $\mu[A;\lambda]$ is the conventional multiplicity of λ as a characteristic value of T, zero if λ is regular. If $F : \mathbb{R} \times X \to Y$ is a C^1 mapping such that $F(\lambda,0) = 0$, then setting $A(\lambda) = D_x F(\lambda,0)$, bifurcation occurs at λ_0 whenever $\mu[A;\lambda_0]$ is odd. Applications are given to ordinary differential equations of arbitrary order, depending non-linearly on a parameter.

Mawhin, J.: Nonlinear functional analysis and periodic solutions of some evolution equations

A simple model for the problems considered here is the nonlinear hyperbolic PDE

(1) $$au_t + u_{tt} - u_{xx} + cu = f(t,x,u)$$

where $f : I^2 \times R \to R$ is continuous, $I = [0,2\pi]$, and $|f(t,x,u)| \leq A + B|u|^d$. One looks for generalized L^2 solutions with periodic boundary conditions in t and x.

1. If $a \neq 0$, $c = -n^2$ $(n \in N)$, coincidence degree techniques are used to prove the existence of at least one solution of (1) with $c = 0$ (resp. $c = -n^2 \neq 0$) if $0 \leq d < 1$ (resp. $0 \leq d < 1/2$) and sign $u \, . \, f(t,x,u)$ has a constant sign (resp. remains bounded away from zero) for all $(t,x) \in I^2$ and $|u|$ sufficiently large. Extensions are possible for systems of equations and for the parabolic case $u_t - u_{xx} + cu = f(t,x,u)$.
2. If $a = 0$, the contraction mapping theorem implies the existence of a unique solution if $c + p \leq (u - v)^{-1}(f(t,x,u) - f(t,x,v)) \leq c + q$ for all $(t,x) \in I^2$ and $u \neq v$ where $p \leq q$ are strictly contained between two consecutive elements of the set $(2\mathbb{Z} + 1) \cup 4\mathbb{Z}$. Extensions to systems lead to the following question: if H is a Hilbert space, $L : \mathrm{dom}\, L \subset H \to H$ is self-adjoint, $N : H \to H$ is continuous, $\mu,\nu \in \sigma(L)$ with $]\mu,\nu[\subset \rho(L)$, and $p|x - y|^2 \leq (Nx - Ny, x - y) \leq q|x - y|^2$ with $\mu < p \leq q < \nu$, is $L - N$ onto? The answer is yes if N is moreover supposed differentiable with a symmetric derivative. The answer is no in general as follows from the example $H = \mathbb{R}^2$, $Lx = (-x_1,x_2)$, $Nx = (x_2,-x_1)$ for which the assumptions hold with $\mu = -1$, $\nu = 1$, $p = q = 0$ but which is such that $\det(L - N) = 0$.

Minty, G.J.: Perturbations of Monotone Operators

Let X,Y be linear spaces over $\mathbb{R}$; $x_1,\ldots,x_n$ vectors in X, K the convex hull of $\{x_i\}$; Y provided with a suitable topology so "minus" is continuous; $\langle \, , \, \rangle$ a bilinear form on $X \times Y$ into $\mathbb{R}$ so its restriction to $K \times Y$ is lower semi-continuous. Let $y_1(x),\ldots,y_n(x),y(x)$ be continuous functions mapping K into Y, and assume

$$\langle x_i - x_j, y_i(x) - y_j(x)\rangle \geq 0 \quad \text{(all } i,j,x) .$$

Observe that for $\lambda_i \geq 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$ we have

$$\sum_i \lambda_i \langle x_i - \sum_j \lambda_j x_j, f_i(x) - f(x)\rangle \leq \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \langle x_i - x_j, f_i(x) - f_j(x)\rangle$$

(we can understand x to be $\Sigma_j \lambda_j x_j$). Apply the Knaster-Kuratowski-Marzinkiewicz Lemma (consequence of Sperner's Lemma) to the $\vec{\lambda}$-simplex to

$$\exists_{\vec{\lambda}} \, \forall_i \quad \langle x_i - x, f_i(x) - f(x)\rangle \geq 0 \quad (x = \sum_j \lambda_j x_j) .$$

From this theorem on "solving finitely many inequalities" (a relation of the

Debrummer -Flor-Lemma) we obtain an attack on Variational Inequalities for nonlinear elliptic P. D .E's:

$$\exists_x \forall_{x'} \langle x' - x, f(x', x)\rangle \geq 0$$

and $$\exists_x \forall_{x'} \langle x' - x, f(x, x)\rangle \geq 0 ,$$

where the first argument represents monotone dependence (in the sense of "monotone operator theory") on highest-order derivatives, and the second represents "completely continuous" dependence on lower-order derivatives.

Nussbaum, R.: A Hopf Global Bifurcation Theorem for Retarded Functional Differential Equations

Our work is motivated by a recent paper of J. Yorke and J. Alexander ("Global bifurcation of periodic orbits") and by an important simplification of the Alexander-Yorke proof due to Jorge Ize. We are also motivated by relatively simple examples of functional differential equations like $x'(t) = [-\alpha x(t-1) - \beta x(t-2)]\cdot[1-x^2(t)]$ for which problems of existence and bifurcation of periodic solutions have still not been completely solved.
Specifically, consider the F.D.E.

(1) $x'(t) = f(\lambda, x_t)$ for $t \geq o$, $x|[-r,o] = \phi$

Here notation is as in Hale's book on functional differential equations; if $X = C([-r,o];\mathbb{R}^n)$, we are assuming $\phi \in X^2$ and $f : \Lambda \times X \to \mathbb{R}^n$ for some open interval Λ. For each $(\phi,\lambda,t) \in X \times \Lambda \times [o,\infty)$, define $F(\phi,\lambda,t) \in X$ by $F(\phi,\lambda,t) = x_t$, where $x(t)$ is the corresponding solution of (1). Define $S = \{(\phi,\lambda,t) \in X \times \Lambda \times [o,\infty) : F(\phi,\lambda,t) = \phi$ and the corresponding solution $x(\ )$ of equation (1) is not a constant function$\}$ and define $\mathcal{S}$ = closure(S). We omit statements of our hypotheses (for reasons of length) except to say that they are exactly analogous to those of Yorke and Alexander; in particular there are real numbers λ_0 and β_0 defined in terms of the hypotheses.

Theorem. Define $\mathcal{S}_0$ to be the closed connected component of $\mathcal{S}$ which contains the point $(o,\lambda_0, \frac{2\pi}{\beta_0})$. Then either $\mathcal{S}_0$ is noncompact or $\mathcal{S}_0$ contains (ϕ_1,λ_1,t_1) such that the solution of (1) corresponding to $\lambda = \lambda_1$, and $\phi < \phi_1$ is a constant.

Peitgen, H.-O.: Asymptotic Fixed Point Theorems and Operators Leaving Invariant a Cone

In a paper which appeared in 1973 in the J.Diff.Eq.14,360-394, R.D.Nussbaum studying the existence of periodic solutions of some nonlinear functional differential equations proved an asymptotic version of what has come to be known as the "expansion" and "compression" principle for operators leaving invariant a cone due to M.A.Krasnosel'skii. The proof there uses as an essential tool the rather involved (mod p)-theorem for the fixed point index. Motivated by Nussbaum's fundamental applications and his theorem we have under essentially weaker assumptions an asymptotic fixed point theorem which yields the existence of a non-trivial fixed point. Various examples indicate that our result seems to be sharp. The proof uses techniques at first developed for the purpose of generalizing the Lefschetz fixed point theory in the sense of J. Leray and it turns out that a (mod p)-argument fails to be applicable. The results are part of a joint work with G. Fournier (Warwick).

Scarpellini, B.: Nichtradialsymmetrische Lösungen der Gelfand-Gleichung

Es wird das nichtlineare Gleichungssystem betrachtet:

(E) $\Delta u + \lambda e^{u} = o$, auf der n-dimensionalen Vollkugel $S_n \subset R_n$, mit der Randbedingung $u = o$ auf ∂S_n . Gesucht werden Lösungspaare (λ,u) , $\lambda \geq o$; u wird dann automatisch $\geq o$.

Definition 1) Ein Lösungspaar (λ_c,u_c) von (E) heißt radialsymmetrisch, wenn u_c radialsymmetrisch ist, nichtradialsymmetrisch andernfalls.

2) $\mathcal{S}_r$ bezeichnet das Kontinuum der radialsymmetrischen Lösungen von (E), das den Punkt (o,o) enthält.

3) Ein Punkt $(\lambda_c,u_c) \in \mathcal{S}_r$ heißt nichtradialsymmetrischer Verzweigungspunkt von (E) wenn in beliebiger Nähe von (λ_c,u_c) nichtradialsymmetrische Lösungen von (E) vorkommen.

Bewiesen wird unter anderem:

Satz 1: a) Im Falle der Dimensionen $n = 3,\ldots,9$ besitzt $\mathcal{S}_r$ unendlich viele nichtradialsymmetrische Verzweigungspunkte.

b) Im Falle der Dimensionen 2,10,11,... besitzt $\mathcal{S}_r$ keine nichtradialsymmetrischen Verzweigungspunkte.

Zum Beweis: Teil a) folgt einerseits aus einer Arbeit von Josef & Lundgreen (Arch. Rat.Mech.) und andererseits aus einem allgemeinen Satz, der hinreichende Bedingungen für das Auftreten von unendlich vielen nichtradialsymmetrischen Verzweigungspunkten enthält; aus Platzgründen können wir auf die Formulierung dieses Satzes nicht eingehen. Teil b) ist trivial für Dimensionen 1o,11,... auf Grund der Arbeit von Josef-Lundgreen: es muß dann $\mathfrak{f}_r$ notwendigerweise mit dem Kontinuum der Minimallösungen zusammenfallen. Für n = 2 hingegen ist der Beweis überraschend kompliziert.

Simader, C.G.: Das Dirichlet-Problem im schwachen Sinne für sehr streng nichtlineare elliptische Gleichungen (ohne monotone Operatoren)

Es wird die Frage der Existenz schwacher Lösungen des Dirichlet-Problems mit homogenen Randdaten für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen der Ordnung $2m$ ($m \in \mathbb{N}$) in Divergenzform zu beschränkten und unbeschränkten Grundgebieten behandelt. Gegenüber der vorhandenen Literatur wird die Klasse der zugelassenen Nichtlinearitäten merklich erweitert. Die Beweismethode besteht darin, sich durch geeignete Abschneidungen eine Folge nichtlinearer Gleichungen zu konstruieren, die je leicht mittels des Schauderschen Fixpunktsatzes lösbar sind, und von den Lösungen die Konvergenz gegen eine Lösung der ursprünglichen Gleichung nachzuweisen. Die Theorie der monotonen Operatoren wird bei diesem Zugang völlig vermieden und erscheint bei der Behandlung der von uns betrachteten Gleichungen auch überflüssig.

Steinlein, H.: Mappings with Compact Iterates

The following problem in asymptotic fixed point theory is considered: E a Banach space, $M_0 \subset E$ nonempty, closed, convex, $f_0 : M_0 \to M_0$ continuous with $f_0^k(M_0)$ being compact. Does there exist a fixed point x of f_0?
Let $\mathcal{F}[g]$ denote the fixed point set of a map g and consider the
Definition. S a topological Hausdorff space, $f : D(f) \subset S \to S$ continuous, $\mathcal{F}[f] = \emptyset$, p a prime number, $M \subset D(f^p)$, and $\check{\mathcal{F}}[f^p|_M] = f(\check{\mathcal{F}}[f^p|_M])$ being a compact set. Then

$$\check{\mathcal{C}}(f,p,M) := \{G \subset \mathcal{F}[f^p|_M] \mid \exists\, G_0,\dots,G_{p-1} \text{ disjoint and closed such that } \bigcup_{i=0}^{p-1} G_i = G,\ f^i(G_0) = G_i \text{ for } i = 1,\dots,p-1\},$$

$$U(f,p,M) := \{\mathcal{G} \subset \mathcal{C}(f,p,M) \mid \mathcal{G} \text{ finite}, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = \mathcal{F}[f^p|_M]\},$$

$$s(f,p,M) := \min\{\operatorname{card} \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \in U(f,p,M)\}.$$

$s(f,p,M)$ can be regarded as a "minimal dimension" of the fixed point set $\mathcal{F}[f^p|_M]$.
To solve the above problem, one might proceed as follows:
Assume $\mathcal{F}[f_0] = \emptyset$ and try to get estimates $a(p) \leq s(f_0,p,M_0) \leq b(p)$ for all prime numbers p such that $a(p) > b(p)$ for at least one p. Up to now one only knows that one can choose $a(p) \approx \frac{2}{k}p$ and $b(p) \approx cp$ for some $c > 0$. There might be a chance to improve the upper estimate.

Turner, R.E.L.: Positive Solutions of Some Nonlinear Elliptic Equations

We consider a nonlinear eigenvalue problem of the type

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda g(x,u,\nabla u), \quad x \in \Omega \\ u &= o \qquad\qquad\quad , \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \qquad (1)$$

where Ω is a bounded smooth domain in $\mathbb{R}^n$.
We treat the existence of "positive" solutions (λ,u) of (1) i.e., with $u > 0$ in Ω, under various hypotheses on the growth of g in the variable u. The principal result is the following. (We restrict Ω to be a ball if $n \geq 4$). Suppose that $1 < \beta < \frac{n+1}{n-1}$ and that for $(x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, $0 < A \leq u^{-\beta} g(x,u,p) \leq \beta < \infty$, where A,B are constants. Then we show there is a closed, connected set of positive solutions of (1) running from $\lambda = 0$, "$u = +\infty$" to "$\lambda = +\infty$", $u = 0$, and obtain bounds on solutions. Other results assert the existence of branches of solutions for large positive λ assuming conditions on g only near $u = 0$. The main work in obtaining the results goes into proving a priori bounds for a particular class of equations related to (1).

Wahl von, W.: Regularitätssätze für Differentialgleichungen mit monotoner Nichtlinearität

Wir betrachten die semilinearen Gleichungen

(1) $u_t + A(t)u + f(u) = o$, parabolischer Fall,

(2) $Au + f(u) = o$, elliptischer Fall,

(3) $u_{tt} + A(t)u + f(u) = o$, hyperbolischer Fall.

Zu (1) und (3) wird das Anfangs-Randwertproblem betrachtet. Bei (1) kann man die Existenz starker Lösungen nachweisen, wenn f monoton wachsend ist und höchstens polynomartiges Wachstum besitzt. $\{A(t)\}$ ist eine Schar positiver formal selbstadjungierter elliptischer Operatoren der Ordnung 2m. Unter der Wachstumsbedingung $|f(u)| \leq c|u|^{\frac{n+2m}{n-2m}} + c$ läßt sich sogar die Regularität der Lösung nachweisen. Ähnliches gilt im elliptischen Fall. Bei hyperbolischen Gleichungen erfordert die Existenz starker Lösungen stärkere Wachstumsbedingungen, bei klassischen Lösungen sind im hyperbolischen Fall noch Dimensionseinschränkungen erforderlich.

Zehnder, E.: Unstabile Phänomene in der Nähe von Gleichgewichtspunkten Hamilton'scher Vektorfelder

Formuliert wird ein generischer Existenzsatz folgenden Inhalts: "Im allgemeinen ist ein linear stabiler Gleichgewichtspunkt eines Hamiltonschen Vektorfeldes ein Häufungspunkt hyperbolischer invarianter Tori."

Zwahlen, B.: Über eine nicht-lineare Differentialgleichung aus der statistischen Mechanik

Es wird folgende Differentialgleichung diskutiert:

$$v''(x) = 2\left(1 - \frac{e^{-\lambda v(x + \frac{1}{2})}}{\int_0^1 e^{-\lambda v(y)}dy}\right), \quad \lambda > 0 .$$

Es werden Rand- und Symmetriebedingungen eingeführt, die gewisse Lösungen ausschließen. Dadurch darf man sich auf das x-Intervall $[0,1]$ beschränken. Elementare Umformungen führen zu einer Integralgleichung. In geeigneten Banachräumen gelangt man zur Gleichung

$$u = \lambda F(u) , \quad \text{Lösung } (\lambda,u) .$$

Die Verzweigung im Ursprung $(\lambda,0)$ wird mit Hilfe der Liapunoff-Schmidtschen Methode vollständig behandelt. Die erhaltenen lokalen Zweige werden in globale Lösungskontinua eingebettet. Schließlich wird das asymptotische Verhalten $(\lambda \to \infty)$ des ersten Lösungskontinuums diskutiert. Dabei werden Methoden der geordneten Banachräume angewandt.
Die physikalische Herleitung der Gleichung stammt von Ph. Choquard, die mathematische Diskussion des Problems von I. Emmerth (beide EPF Lausanne).

H. Amann (Bochum)