MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 6/1976

Didaktik der Mathematik

25.01. bis 31.01.1976

Die Tagung stand unter der Leitung von H. KUNLE (Karlsruhe) und H.-J. VOLLRATH (Würzburg).

Die Vorträge überstrichen ein breites Spektrum didaktischer Probleme. Neben Vorschlägen zur Anreicherung bzw. Organisation des traditionell bewährten Stoffkanons wurde über empirische Untersuchungen des Lernprozesses im Mathematikunterricht, sowie über Schulversuche in Luxemburg, Österreich und Ungarn berichtet. In sehr ausgedehnten Diskussionen, die mehrmals am Abend fortgesetzt wurden, wurden wichtige Beiträge zu grundlegenden didaktischen Fragen gegeben.

In weitgespanntem Bogen fügte A. KIRSCH zu bekannten Unterrichtsprinzipien das Prinzip des Vereinfachens hinzu, indem er dessen wichtigste Aspekte an zahlreichen Beispielen herauspräparierte. Bedeutsame bildungstheoretische Aspekte des Lernens mathematischer Inhalte rückte H.-G. BIGALKE in den Mittelpunkt des Interesses, indem er nach der gesellschaftlichen Relevanz der Mathematik fragte und damit verbundene Wirkungsfelder des Mathematikunterrichts umriß.

Die anderen Themen waren enger abgesteckt:

Erste vorläufige Unterrichtsbeobachtungen und Tests in der Primarstufe ließen P. KIRSCHE vermuten, daß bei der Behandlung geometrischer Abbildungen die Faltmethode - verglichen mit der Wendemethode - die Bildung des Begriffs "Achsenspiegelung" auf der untersten Stufe erleichtert. Die in der deutschen Mathematikdidaktik bisher unberücksichtigt gebliebenen Beziehungen zwischen den Leistungen von Mädchen im Mathematikunterricht und Persönlichkeitsvariablen wurden von Frau SCHILDKAMP-KÜNDIGER angesprochen.

An den Berichten über Schulversuche in Österreich von K.J. PARISOT und in Ungarn von E. DÈAK fielen den deutschen Hörern die sorgfältigen und langfristigen Planungen auf, die insbesonders sehr lange Übergangsphasen vorsehen und ausgedehnte Begleituntersuchungen einschließen. Ähnliche Berichte sind u.a. in Karlsruhe auf dem 3. Internationalen Kongreß über Mathematikunterricht zu erwarten, über dessen Themenkreise und Organisationsform H.G. STEINER - als Vorsitzender des internationalen Programmausschusses - aus erster Hand berichtete.
E. COHORS - FRESENBORG skizzierte formale Übungen mit Wortbausteinen für die Primar-und Orientierungsstufe, um das Erlernen der Syntax der mathematischen Fachsprache zu erleichtern und dadurch gängige Schülerfehler zu vermeiden.

Die Beiträge zur Sekundarstufe I unterstrichen den gegenwärtigen Trend zu einer praxisorientierten, umweltbezogenen Mathematik und zur Wiederbelebung der Geometrie. G. SCHEU berichtete über numerische Verfahren zur Nullstellenbestimmung, die bequeme Fehlerintervalle angeben und auch für Taschenrechner zugänglich sind. Weitergehend ordnete G. HOLLAND den elektronischen Taschenrechner in die methodischen Hilfsmittel ein, indem er u.a. auf neue mathematische Inhalte, geeignete Interationsverfahren und auf neue Zugänge zu den positiven rationalen Zahlen in der 5. Klasse und zu den positiven reellen Zahlen in der 6. Klasse hinwies.

Übersichtliche Ordnungsdiagramme der Gruppen der Ähnlichkeiten und der Affinitäten in der Ebene - gewonnen mittels semidirekter Produkte - wurden von B. ARTMANN mit dem Ziel vorgeführt, nicht nur die Fachausbildung der Lehrer, sondern auch den Mittelstufenunterricht zu bereichern. Diesbezügliche Unterrichtserfahrungen liegen vor.
Für die S II wurden sowohl Vertiefungen der vorhandenen Themen als auch neue Inhalte vorgeschlagen:
Um im Unterricht den Begriff der reellen Zahl möglichst exakt zu bilden, plädierte E. DÈAK für eine genetische Einführung, gemäß seines Prinzips der "Verlängerung des Weges".

Dieses Prinzip soll entsprechende Begriffsbildungen in der Differentialrechnung bestimmen, selbst wenn als Folge weniger Lehrstoff behandelt werden kann. Hierzu laufen Erprobungen. Auch R. FISCHER beschrieb exemplarische Stufen, auf denen sich Begriffe der Differentialrechnung bilden, wobei er die intuitive Erfassung einschlägiger Begriffe auf der ersten Stufe als besonders wichtig betonte.

L. KIEFFER berichtete über einen Schulversuch in Luxemburg, bei dem landesspezifische Probleme dazu führten, Themen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie sehr anwendungsbezogen zu unterrichten. Räumliche Vorstellungen zu pflegen und die Macht des Kalküls der Linearen Algebra bei der Verallgemeinerung des Begriffs "Höhe" zu zeigen, war das Anliegen von R. FRITSCH. In Kontrast zu diesem anschaulichen Aspekt der Geometrie illustrierte A.M. FRAEDRICH einige Stufen heuristischer Verfahren, indem sie ihre Entdeckung eines Satzes über spezielle Inzidenzstrukturen vorführte.
Ebenfalls um Einblicke in typische mathematische Denkweisen ging es G. TÖRNER, der den Einsatz eines in der Unterhaltungsmathematik wohlbekannten Geduldspiels bei der Ausbildung von S II - Lehrern beschrieb.
U. BECK zeigte am Beispiel der theoretischen Bestimmung chemischer Summenformeln, wie in der Sekundarstufe II Mathematik - und Chemielehrer fächerübergreifend zusammenarbeiten können.
Ein Novum für die Didaktiktagungen bildeten die von W. FRAUNHOLZ vorgestellten Kurzfilme, die unter seiner Leitung in Zusammenarbeit mit dem Südwestfunk entstanden. Sie stellen einen ersten Versuch dar, um einerseits Schülern der Hauptschule das Lösen von Sachaufgaben zu erleichtern und um andererseits Material zur Lehrerfortbildung zu schaffen, das im Fernsehen gesendet werden kann.

Teilnehmer

B. Artmann, Darmstadt
E. Baumgartner, Düsseldorf
U. Beck, Dortmund
H.-G. Bigalke, Hannover
E. Cohors-Fresenborg, Osnabrück
E. Déak, Budapest
R. Fischer, Klagenfurt
A.M. Fraedrich, Clausthal-Zellerfeld
W. Fraunholz, Koblenz
R. Fritsch, Konstanz
W. Früchte, Freiburg
H. Glaser, Würzburg
H. Griesel, Kassel
R. Güting, Frankfurt
G. Heink, Berlin
H. Hischer, Braunschweig
G. Holland, Gießen
L. Kieffer, Luxemburg
A. Kirsch, Kassel
P. Kirsche, Augsburg
J. Kühl, Kiel
H. Kunle, Karlsruhe

H. Meißner, Münster
E. Mellin, Hannover
G.J. Oberholzer, Südafrika z.Zt. Bielefeld
K.J. Parisot, Salzburg
H. Prade, Freiburg
H.D. Rinkens, Paderborn
G. Scheu, Karlsruhe
E. Schildkamp-Kündiger, Saarbrücken
A. Schlette, Landau
H. Schupp, Saarbrücken
S. Seyfferth, Kassel
H. Spiegel, Worms
E. Stampe, Berlin
G. Stein, Darmstadt
H.G. Steiner, Bielefeld
G. Törner, Darmstadt
U. Viet, Osnabrück
N. Vormoor, Göttingen
H.-J. Vollrath, Würzburg
H. Wäsche, Karlsruhe
H. Wellstein, Würzburg

Vortragsauszüge

A. ARTMANN: Ähnlichkeitsgruppe und affine Gruppe der Ebene

Einige der im Mittelstufenunterricht gängigen Untergruppen der Ähnlichkeitsgruppe werden in einem Ordnungsdiagramm zusammengefaßt. An Hand dieses Diagramms wird die gruppentheoretische Struktur der Ähnlichkeitsgruppe diskutiert. Entsprechend wird für die affine Gruppe verfahren, wobei an Stelle der Schulbücher einige fachdidaktische Publikationen treten.

U. BECK: Computer-und graphentheoretisch orientiertes Verfahren zur Bestimmung von Summenformeln

Auf der Grundlage einer qualitativen Analyse, einer Massenanteilbestimmung eines Elements und einer Molmassenbestimmung wird ein lineares Ungleichungssystem erstellt. Die Lösungen des Systems repräsentieren mögliche chemische Summenformeln für die vorgegebene Substanz. Dem Ungleichungssystem kann eine lineare Gleichung beigefügt werden, was i.A. eine beträchtliche Einschränkung der möglichen Summenformeln bedeutet. Die Gleichung wird bei baumförmigen Molekülen aus $k=e-1$ gewonnen und bei Molekülen mit Mehrfachbindungen und Ringen aus der Eulerschen Formel. Es ergibt sich die Möglichkeit die experimentell schwer nachzuweisenden Ringe zu prognostizieren. Die Auswertung des linearen Systems erfolgt mit dem Computer.

H.-G. BIGALKE: Zur "gesellschaftlichen Relevanz" der Mathematik im Schulunterricht - Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts

Der Mathematikunterricht an den allgemeinbildenden Schulen wird heute in zunehmendem Maße angegriffen. Von gewissen Seiten wird die besondere Bedeutung der Mathematik für unsere Gesellschaft überhaupt bezweifelt und versucht, die Stellung des Mathematikunterrichts im Bildungswesen abzuwerten. Eine Analyse des in diesem Zusammenhang oft benutzten Schlagwortes "gesellschaftliche Relevanz" zeigt, daß man gegenüber der Verwendung dieser Vokabel sehr mißtrauisch sein sollte, da sich zur Zeit hinter ihr nur normative Ideologien verbergen.

Im weiteren wird versucht, Forderungen der Gesellschaft an das Bildungswesen und damit auch an den Mathematikunterricht zu formulieren. Schließlich werden in Verbindung mit den beschriebenen allgemeinen Erziehungszielen Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts in acht Bereichen angegeben.

E. COHORS-FRESENBORG: Wortbaukästen - eine Propädeutik für Termumformungen und vollständige Induktion

Hauptfehler der Schüler bei Termumformungen ergeben sich durch Mißverständnisse der Bedeutung der Zeichen und unkorrekte Verwendung der Klammern. Diese Schwierigkeiten beim konkreten Umgehen mit der formalen Sprache der Mathematik legen es nahe, auch im Mathematikunterricht einige Zeit auf den Umgang mit Sprachsystemen zu verwenden. Diese Propädeutik für Termumformungen sollte schon in der Grundschule auf der konkreten Stufe vorgenommen werden. Es eignen sich dazu Wortbaukästen, bei denen eine Menge von Zeichen - zunächst in konkreter Form als Bausteine gegeben - nach Spielregeln zusammengesetzt und "Worte" über dem "Alphabet" des Baukastens nach Regeln umgeformt werden. Es schließt sich in natürlicher Weise der Übergang auf die formale Ebene der Kalküle an. Durch Vergleich der Leistungsfähigkeit verschiedener Wortbaukästen (Kalküle) ergibt sich schon in der Grundschule und Orientierungsstufe eine natürliche Hinführung zu Vorformen des induktiven Definierens und Beweisens.

E. DÉAK: Wege im Unterricht der Analysis

Es werden behandelt:
- das Problem der Gymnasialschüler, die in einigen Jahren aus (einheitlichen, achtjährigen) Grundschulen kommen werden, in denen sie in der Mathematik nach den neuen Methoden von T. VARGA unterrichtet werden. Dieses Varga'sche System umfaßt - laut Regierungsprogramm - allmählich alle Grundschulen Ungarns, während die entsprechende Fortsetzung in den Gymnasien noch nicht genügend ausgearbeitet ist.

- die Art und Weise, wie die Ungarische Akademie der Wissenschaften - in gut organisierter Form - dem Unterrichtsministerium beisteht, diese und ähnliche überaus schwierige Aufgaben zu lösen, entsprechende Experimente durchzuführen und die nötige Fortbildung der Lehrer des ganzen Landes zu organisieren.
- allgemeindidaktische Prinzipien, wie z.B. das der "Verlängerung" des Weges zu inhaltsreichen Begriffen, wie etwa den Grundbegriffen der Analysis; Analyse der hierzu erforderlichen Mittel.
- der Aufbau der Differentialrechnung im Gymnasium und die Herausbildung des Begriffs der reellen Zahl.
- Hinweise auf den experimentellen Hintergrund zu den vorstehenden Punkten.

R. FISCHER: <u>Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen</u>

Vom Standpunkt eines problem-, anwendungs-und strukturorientierten Mathematikunterrichts wird ein Grobkatalog von fundamentalen Ideen, Begriffen und Tatsachen der Theorie der reellen Funktionen mit besonderer Berücksichtigung der Differentialrechnung vorgestellt. Dabei liegt ein Konzept zugrunde, welches Mathematik eher als dynamischen Prozeß als festes System versteht. Zu den einzelnen Punkten werden sich aus ihnen ergebende Implikationen für den Schulunterricht angedeutet. Einige generelle Bemerkungen betreffen das Problem der Elementarisierung der Analysis in der gegenwärtigen didaktischen Literatur.

A.M. FRAEDRICH: <u>Entstehungsgeschichte und nachfolgende Überlegungen zu einem Sätzchen der endlichen Geometrie - Ein Beispiel zur Erläuterung heuristischer Verfahren</u>

Es wird über die wichtigsten Stationen berichtet, über die man mittels des induktiven Verfahrens zu folgendem Satz kommen kann:

Wenn es $m,n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gibt sowie $r_m, k_n \in \mathbb{N}$ mit $r_m \geqslant n$ oder $k_n \geqslant m$, so daß die Inzidenzstruktur $(\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$ mit $|\mathfrak{P}| \geqslant m$, $|\mathfrak{B}| \geqslant n$ und $I \neq \mathfrak{P} \times \mathfrak{B}$ folgende Eigenschaften (P_m) und (B_n) besitzt:

(P_m) Je m Punkte inzidieren mit genau r_m Blöcken,
(B_n) Je n Blöcke inzidieren mit genau k_n Punkten,

dann ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$ ein symmetrischer Blockplan, in dem auch die Bedingungen $(P_1),\ldots,(P_{m-1})$ und $(B_1),\ldots,(B_{n-1})$ erfüllt sind.
An der Entstehungsgeschichte dieses Satzes und seines Beweises soll verdeutlicht werden, wie verschiedene heuristische Aktivitäten beim induktiven Verfahren ineinandergreifen.

R. FRITSCH: Höhen in höheren Dimensionen

Geometrische Überlegungen im dreidimensionalen Raum sind in den heutigen Lehrplänen fast gar nicht zu finden. Dafür wird in der Oberstufe Lineare Algebra betrieben. Man sollte den dabei vermittelten Kalkül einsetzen, um doch noch etwas räumliche Vorstellungen zu pflegen. Das ist zum Beispiel mit einer n-dimensionalen Verallgemeinerung des Satzes vom Feuerbachschen Kreis möglich und kann etwa zu folgenden Sätzen führen: Ein n-Simplex besitzt genau dann einen Höhenschnittpunkt, wenn je zwei disjunkte Kanten orthogonal sind. Ist das der Fall, so ist der Feucherbachpunkt $\frac{n+1}{n-1} S - \frac{2}{n-1} M$ (S Schwerpunkt, M Mittelpunkt der Umsphäre) der Höhenschnittpunkt.

G. HOLLAND: Didaktische Konsequenzen des Einsatzes von Taschenrechnern in der Sekundarstufe I

In wenigen Jahren werden Taschenrechner zu den selbstverständlichen Arbeitsmitteln eines jeden Schülers der Sekundarstufe I gehören. Es ist daher eine vordringliche Aufgabe der Mathematikdidaktik, sich auf diese Entwicklung rechtzeitig einzustellen. An Beispielen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I werden Möglichkeiten und Konsequenzen des Einsatzes von Taschenrechnern unter den folgenden vier Fragestellungen untersucht:

1. Welche neuen mathematischen Inhalte werden durch den Taschenrechner erschlossen?
2. Zu welchen mathematischen Qualifikationen vermag der Taschenrechner einen spezifischen Beitrag zu leisten?
3. Zu welchen traditionellen Inhalten (Lehrzielen) bietet der Taschenrechner neue methodische Zugänge?
4. Welche Konsequenzen ergeben sich für die Stofforganisation?

L. KIEFFER: <u>Didaktische Fragen in Luxemburg mit kurzem Bericht über die Behandlung von Markoffschen Ketten im 11. Schuljahr einer Handelsschule</u>

Luxemburg hat nur 340000 Einwohner. Durch seine Lage an der Sprachgrenze, das Fehlen einer Voll-Universität, die Überfremdung durch romanische Gastarbeiter gibt es Probleme (Sprachen, Ausbildung und Weiterbildung der postprimären Lehrer, Schulbücher usw.).
Seit 1970 wird an einer neugegründeten Schule (Handel, Informatik) ein Lehrplan in praxisnaher Mathematik erprobt. Die Schüler haben etwa mittlere Reife und kommen aus der Realschule. Sie haben Vorkenntnisse in Algebra, beschreibender Statistik, Linearplanung, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Matrizen und Determinanten. Markoffsche Ketten (Übergangsmatrix für Zustände, Fixvektor, $n \leq 4$) werden in fünf bis sechs Stunden behandelt. Der Stoff spricht die Schüler besonders an.

A. KIRSCH: <u>Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht</u>

Der Terminus "vereinfachen", hier im Sinne von "zugänglich machen" benutzt, spielt in der didaktischen Diskussion eine wichtige Rolle, obwohl im konkreten Fall keineswegs immer Konsens darüber besteht, ob eine Vereinfachung vorliegt oder nicht vielmehr eine Erschwerung, Komplizierung oder gar Verfälschung. Trotz Fehlens einer gesicherten methodologischen Basis werden einige mathematik-spezifische Aspekte des Vereinfachens abgegrenzt und als Hilfsmittel zum Einordnen und Beurteilen didaktischer Entwicklungen verwendet, nicht als Gegenstand autonomer theoretischer Erörterungen:

1. Vereinfachung durch Konzentration auf den mathematischen Kern des Gegenstandes, durch Beschränkung auf die Mathematik als deduktive Wissenschaft im engsten Sinne. Neben positiven Beispielen wird kritisch das "Vereinfachen durch Spießumkehr" erörtert, das eine Relativität anzeigt: Was für den Mathematiker Vereinfachung ist, kann dem Lernenden Erschwerung bedeuten.
2. Vereinfachung durch Hinzunehmen des Umfeldes der Mathematik, durch Auffassen der Mathematik im weiteren Sinn, mit Einschluß von Begriffsgenese und Anwendungsbezügen. Insbesondere werden Klärungen im "prämathematischen" Bereich erörtert (Größenbereiche in der Bruchrechnung, Metasprache in der Gleichungslehre), mit dem kritischen Hinweis, daß Hintergrundsanalysen oft als Lehrstoff für Schüler mißverstanden werden - was zu Komplizierungen führt.
3. Vereinfachung durch Anerkennen und Aktivieren von Vorwissen, durch Verzicht auf Entwicklungen "ab ovo", dies insbesondere im Interesse der Arbeitsökonomie und der Vermeidung von Frustrationen. Beispiele sind insbesondere die reellen Maßfunktionen für Länge, Winkel und Flächeninhalt. Die Verwendung erfordert Urteilsvermögen des Lehrers hinsichtlich der Tragfähigkeit solchen "Vorwissens": seine anfängliche Anerkennung schließt späteres Infragestellen und tieferes Fundieren nicht aus (Spiralprinzip). Das verbreitete "axiomatische Vorgehen" entspricht diesem Aspekt, sofern es plausibles Vorwissen artikuliert, aber nicht, wenn es Ausdruck einer Spießumkehr ist.

P. KIRSCHE: Einführung der Achsenspiegelung in Klasse 3 - ein empirischer Vergleich von Falt-und Wendemethode

In der Unterrichtspraxis steht der Lehrer ständig vor dem Problem, unter verschiedenen Methoden die für seine Zwecke geeignetste auszuwählen. Da eine didaktische Analyse nicht in allen Fällen als Entscheidungsgrundlage ausreicht, kann nur eine Erprobung der in Frage kommenden Methoden weiterhelfen.

Neben der direkten Unterrichtsbeobachtung sollten entsprechende Tests eingesetzt und statistisch ausgewertet werden. Die in Frage kommenden Verfahren sind so einfach, daß diese Art von Unterrichtsbeurteilung in die Lehrerausbildung aufgenommen werden sollte. Dabei kommt es weniger auf das Verständnis der statistischen Verfahren als auf die Interpretation der Resultate an.
Am Beispiel der Achsenspiegelung wurde gezeigt, daß nur aus dem Zusammenspiel von Unterrichtsbeobachtungen und statistischer Auswertung sinnvolle Schlüsse gezogen werden können. In diesem Falle ergab sich, daß auf der "nullten Stufe" vieles für die Faltmethode spricht. Weitere modifizierte Untersuchungen sind nötig.

G. SCHEU: Optimale, monotone bzw. alternierende Iterationsverfahren mit überlinearer Konvergenz

Ein Verfahren zur Lösung von Gleichungen einer reellen Funktion wird dargestellt, mit dem man den Schüler in die Probleme der Numerischen Mathematik einführen kann. Es handelt sich um ein Iterationsverfahren mit einer Fehlerabschätzung. Das entwickelte Verfahren hängt von einem Parameter ab, mit dessen Hilfe die Fehlerabschätzung miminiert wird. Durch geeignete Wahl des Parameters kann man ferner beidseitig monotone bzw. alternierende Iterationsfolgen erhalten, so daß sich die Fehlerabschätzung erübrigt. Damit hat man einen Algorithmus der Intervallmathematik. Ist die gegebene Funktion Lipschitz-stetig, konvergiert das Verfahren überlinear.

E. SCHILDKAMP-KÜNDIGER: Der Einfluß von Persönlichkeitsvariablen auf Mathematikleistung

Es werden Ergebnisse empirischer Untersuchungen dargestellt mit dem Ziel, Ursachen für Versagen in Mathematik zu identifizieren. Von besonderem Interesse sind dabei wechselseitige Beziehungen zwischen Mathematikleistungen und folgenden Persönlichkeitsvariablen: Intelligenz, Leistungsmotivation, Einstellungen zur Mathematik, geschlechtsspezifische Rollenvorstellungen.

Im Anschluß daran werden einige Ergebnisse einer empirischen Untersuchung an 13-bis 14-jährigen Oberschülerinnen vorgestellt und im Zusammenhang diskutiert.

G. TÖRNER: Über das 15-Puzzle

Ein Anliegen des Mathematikunterrichts auf jeder Stufe ist das Vermitteln von Einblicken in die Denk-und Arbeitsweisen dieser Wissenschaft. Das Sehen von Problemen und die Fähigkeit, weitere nach Lösung eines Problems sich stellende Fragen erkennen zu können, sind notwendige Aktivitäten, die der Mathematik Lernende erleben sollte. Einschränken, Vereinfachen, Spezialisieren, aber auch Verallgemeinern sind erfolgreiche Lösungsstrategien.
Am Beispiel eines Spiels (15-Puzzle: 15 Plättchen sind verschiebbar in einem 4x4 quadratischen Rahmen angeordnet) werden diese Richtziele verwirklicht. Ziel ist die Charakterisierung der realisierbaren Belegungen des 15-Puzzles. Mit elementaren Mitteln der Gruppentheorie und Kombinatorik kann gezeigt werden, daß sich genau sämtliche geraden 15-Permutationen herstellen lassen.

H. Glaser (Würzburg)