MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 7 / 1976

Differentialgleichungen der mathematischen Physik

1.2. bis 7.2.1976

Gegenstand der Tagung waren Fortschritte bestimmter mit Differentialgleichungen der mathematischen Physik zusammenhängender rein mathematischer Theorien. So standen im Vordergrund des Interesses: Variablen- und Parameterasymptotik gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme und hiermit verbundene Transformationen, Rand-Eigenwertprobleme, insbesondere auch nicht-hermitesche und singuläre, und zugehörige Entwicklungssätze, die Fortentwicklung und Erweiterung der Theorie höherer spezieller Funktionen, insbesondere mit der Methode der simultanen Separation gewonnene sehr allgemeine Integralrelationen für Lösungen Fuchsscher Differentialgleichungen. Es ergaben sich Verbindungen zu Algebra, Funktionentheorie, Funktionalanalysis, Approximationstheorie und Differenzengleichungen.

Die Tagung unter der Leitung von Prof. Dr. F.W. Schäfke (Konstanz) und Prof. Dr. A. Schneider (Wuppertal) wurde von 31 Teilnehmern besucht, davon 7 aus dem Ausland. Es wurden 2o - in der Regel 5o-minütige-Referate gehalten.

Teilnehmer

H.E. Benzinger, Bielefeld
J. Blankenagel, Wuppertal
B.L.J. Braaksma, Groningen
A. Dijksma, Groningen
M.S.P. Eastham, London
W. Eberhard, Marburg
G. Freiling, Marburg
H. Frentzen, Essen
R. Gérard, Strasbourg
J. Hainzl, Kassel

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

U. Höhle, Wuppertal

M. Kurz, Speyer

H. Lemei, Delft

D.A. Lutz, Ulm

J. Meixner, Aachen

M. Mendel, Wuppertal

R. Mennicken, Regensburg

L. Neckermann, Würzburg

W. Neuhaus, Berlin

H.D. Nießen, Essen

K. Okamoto, Strasbourg

A. Sattler, Köln

F.W. Schäfke, Konstanz

D. Schmidt, Essen

A. Schneider, Wuppertal

A. Schönhage, Tübingen

B. Schultze, Essen

H.S.V. de Snoo, Groningen

H. Volkmer, Konstanz

E. Wagenführer, Regensburg

G. Wolf, Essen

Vortragsauszüge

H.E. BENZINGER

Pointwise and Norm Convergence of Biorthogonal Expansions.

G.D. Birkhoff and M.H. Stone have shown, that with respect to pointwise convergence, the eigenfunction expansions corresponding to a large class of ordinary differential operators are equiconvergent with the corresponding Fourier series expansions. We show that a similar situation exists with respect to convergence in the norm of $L^p(o,1)$, $1 < p < \infty$. Thus if $\phi_k(x) = \exp(2k\pi ix)$ and if $\{u_k(x)\}$ is the sequence of eigenfunctions of an n-th order differential operator (with suitably restriced boundary conditions), $k = o, \pm 1, \ldots, 0 \leq x \leq 1$, then there exists a bicontinuous linear map $A: L^p \to L^p$ such that $A\phi_k = u_k$.

Since $\{\phi_k\}$ is a basis for L^p, $1 < p < \infty$, so also is $\{u_k\}$. The expansion of a given F in eigenfunctions u_k is uncounditionally convergent if and only if the Fourier expansion of $A^{-1}F$ is unconditionally convergent. These methods can also be used to extend the results of Carleson and Hunt on pointwise convergence to such expansions.

J. BLANKENAGEL

Zur Charakterisierung von Orthogalpolynomen in zwei Veränderlichen

In Arbeiten von J. Blankenagel (Arch. rat. Mech. Anal. 53 (1973), S. 56 - 68) und von F.W. Schäfke & G. Wolf (J. reine angew. Math. 262/263 (1973), S. 339- 355) wurde dargestellt, wie sich bei Orthogonalpolynomen in einer Veränderlichen zu sehr verschiedenen Skalarprodukten Differentialgleichungen und Differenttialrekursionen herleiten lassen, indem man ähnliche einfache Überlegungen, wie sie zum Beweis der klassischen 3-gliedrigen Rekursion benutzt werden, auf geeignete Polynomoperatoren anwendet. Hier wird nun aufgezeigt, wie sich dieses Prinzip auf Polynome in 2 Veränderlichen übertragen läßt, wie sich damit die bekannten Ergebnisse erzielen lassen und welche Formeln in bisher noch nicht behandelten Fällen entstehen.

H. VOLKMER

Potenzreihenradien, die im Zusammenhang mit zweiparametrigen Eigenwertproblemen auftreten

In der Mathieuschen DGL $y''(z) + (\lambda - 2\mu \cos 2z)\, y(z) = 0$ gibt es zu gegebenem $\nu \in \mathbb{C}$ nur zu gewissen Paaren (λ,μ) Lösungen der Form $y(z + \pi) = e^{i\pi\nu}\, y(z)$. Man kann nun λ lokal nach μ auflösen. Es entsteht die Frage nach der Größe der dabei auftretenden Potenzreihenradien. Dieses Problem soll in verallgemeinertem Rahmen behandelt werden.

W. EBERHARD

Vollständigkeitsfragen bei irregulären Eigenwertproblemen

Es wird die Fragestellung diskutiert, ob das Biorthogonalsystem $\{\phi_k, \psi_k\}$ der Eigenfunktionen von irregulären Eigenwertproblemen mit zerfallenden Randbedingungen (Neumark, Linear Diff. Operators, S. 1oo ff) im Raum $L^2(0,1)$ bzw. $L^p(o,1)$ vollständig ist. Die allgemeinen Vollständigkeitskriterien von Dunford-Schwartz für Operatoren im Hilbertraum (Bd. II, S. 1115) bzw. von Benzinger (Proc. AMS 38, S. 32o) sind nur anwendbar, falls die Zahl der Randbedingungen in 0 diejenigen in 1 um nicht mehr als 2 übersteigt. Andernfalls zeigen Gegenbeispiele die Nichtanwendbarkeit der genannten Kriterien. Mit Hilfe eines Entwicklungssatzes für eine spezielle Klasse von irregulären Eigenwertproblemen (MZ 86, S. 2o5 und MZ 9o, S. 126) kann eine Funktionenklasse charakterisiert werden, die aufgrund des Müntzschen Satzes dicht liegt in $L^2(o,1)$ und gleichmäßig durch die Eigenfunktionen ϕ_k approximiert werden kann.

L. NECKERMANN

Restgliedentwicklungen Stieltjesscher Art für asymptotische Darstellungen konfluenter hypergeometrischer Funktionen

Für asymtotische Untersuchungen konfluenter hypergeometrischer Funktionen grundlegend ist die (i.a. divergente) Poincare'sche Darstellung

$$x^{-a}\,\psi(a,c,x) = \sum_{\nu=0}^{N-1} b_\nu x^{-\nu} + R_N(x) \qquad (x \to \infty \text{ in } |\operatorname{arc} x| < \tfrac{3\pi}{2})$$

mit $\nu! b_\nu = (-1)^\nu (a)_\nu\,(a-c+1)_\nu$ und $R_N(x) = b_N x^{-N} C_N(x)$.

Ein Abbrechen beim "Zentralindex" N(x) liefert für ein festes x die bestmögliche Approximation der erzeugenden Funktion. Eine Verbesserung der Güte der Annäherung läßt sich aus einer Darstellung des Konvergenzfaktors $C_N(x)$ als dreifach iteriertes Integral durch Weiterentwicklung nach Funktionen von (x,N) bei passender Kopplung der beiden Variablen erreichen. Diese so gewonnene verallgemeinerte asymptotische Weiterentwicklung von $C_N(x)$ nach einer Potenzskala enthält als Entwicklungskoeffizienten spezielle Lagueresche Polynome des Typs $L_n^{(b-n)}(x)$ mit $b = b(x) = x + O(x)$, deren Grad $<n$ $(n > 0)$ ist; z.B. ist Grad $L_{2m}^{(x-2m)}(x) = m$. -Das benutzte Verfahren ist auch für die asymptotische Untersuchung von $\psi(a,c,x)$ bezüglich mehrerer Parameter geeignet.

D.A. LUTZ

Invariants and effective solutions of second order differential equations.

For linear differential equations at an isolated singular point (irregular singularity of the solutions), a theory of invariants is discussed which may be applied to effectively calculate global solutions. The theory is based upon the reduction of a given differential equation to a canonical form (locally). In the case of second order linear differential equations with singular points of rank one, the canonical forms turn out to be essentially the classically discussed differential equations, i.e., the confluent hypergeometric equation. Many of the properties of the solutions of these classical equations can be viewed in terms of the invariants.

R. GÊRARD

Integration of a Formal Solution for a Class of Completely Integrable Pfaffian System with Singularities.

Consider a system (1) $x_1^{p_1+1} \frac{sz}{sx_1} = f(x_1,x_2,z)$, $x_2^{p_2+1} \frac{sz}{sx_2} = g(x_1,x_2,z)$ $(p_1+p_2 > o)$, where f and g are holomorphic near the origin of $\mathbb{C}^2 x \mathbb{C}^n$ with values in $\mathbb{C}^n$. Assume that (1) has a formal solution of the form $\varphi = \sum_{r_1+r_2 \geq 1} \varphi_{r_1 r_2} x_1^{r_1} x_2^{r_2}$. Let $S = S_1 \times S_2$ be the product of the two sectors in $\mathbb{C}$, S_i in a sector in $\mathbb{C}(x_i)$ with angle smaller than $\frac{\pi}{p_i}$. Then it does exist a solution $\Phi(x_1,x_2)$ of (1) holomorphic in S which is asymptotic to φ in a sector $S' \subset S$. This means that:

$$\forall m: \| \Phi(x_1,x_2) - \sum_{r_1+r_2 \geq o}^{m} \varphi_{r_1 r_2} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \| \leq C_m \cdot [|x_1|^m + |x_2|^m] \text{ in } S'.$$

This result is also true in the case of more than two variables and is a generalization of the Main asymptotic theorem of Wasow's book. With this result it is now possible to study a certain type of irregular singularities for linear connection in the case of several variables.

M.S.P. EASTHAM

Lengths of the instability intervals of higher-order periodic differential equations.

A method is given for obtaining asymptotic estimates of the form $L(\mu) = o(\mu^{-r/2n})$ $(\mu \to \infty)$ for the length $L(\mu)$ of an instability interval, centre μ, associated with self-adjoint periodic differential equations of even-order 2n. The range of possible values for the integer r is $-2n \leq r < \infty$ and the exact value taken depends on the differentiability properties of the coefficients in the differential equation.

D. SCHMIDT - G. WOLF

Über simultane Separierbarkeit verallgemeinerter Schwingungsgleichungen

Aus der Tatsache, daß die Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in mehreren orthogonalen Koordinaten simultan separierbar ist, können auf einfache Weise Integralrelationen bzw. - darstellungen von Lösungen der bei der Separation auftretenden gew. Dgln. gewonnen werden. Für den k-dimensionalen

$(k \geq 2)$ Operator

$$A = \Delta_k + \sum_{\pi=1}^{k} p_\pi(x) \frac{\partial}{\partial x_\pi} + q(x)$$

werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Separierbarkeit in kartesischen, elliptischen, Kugel-Kegel und Kugel-Koordinaten angegeben. Daraus lassen sich über ein allgemeines Prinzip Integralrelationen für die Lösungen der (in ∞) konfluenten Fuchs'schen Dgl. (mit k-einfachen Singularitäten) mit Produkten von konfluenten hypergeometrischen Funktionen als Kerne mittels (k-1)-facher Integration herleiten. Durch Reduktion der Gleichung in Kugel-Kegel und Kugel-Koodinaten werden noch Beziehungen für die Lgn. Fuchs'schen Dgl. (mit k-einfachen Singularitäten und ∞) und Produkten von hypergeometrischen Funktionen als Kerne mittels (k-2)-facher Integration erhalten.

J. HAINZL

Zur Faktorisierung und Vertauschbarkeit von linearen homogenen partiellen Differentialoperatoren

Sei $L := \sum_{|\alpha|<m} A_\alpha(x_1,\ldots,x_n)\, D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $m \geq 1$.

Zunächst wird gezeigt: Genau dann existiert eine Faktorisierung $L = Q \circ P$ mit linearen homogenen Operatoren Q,P, wobei P einen Grad ≥ 1 und konstante Koeffizienten hat, wenn die Gleichung $Lu = 0$ eine (n-1)-dimensionale Schar von Exponentiallösungen besitzt. Verallgemeinerungen dieses Ergebnisses schließen sich an. Im Zusammenhang mit Faktorisierungen stellt sich auch die Frage nach der Vertauschbarkeit von Differentialoperatoren. Zwei Aussagen hierzu lauten (wenn C^∞-Koeffizienten vorausgesetzt werden):

1) Ist L vertauschbar mit $M := D_1^{p_1} \ldots D_n^{p_n}$, so sind die Koeffizienten A_α von L bezüglich x_k Polynome vom Grade $\leq \alpha_k$, sofern $p_k > 0$.
2) Ist für ein $k \in \mathbb{N}$ M^k vertauschbar mit L, so ist auch M vertauschbar mit L.

E. WAGENFÜHRER

Transformation einer im Parameter ρ nichtlinearen Differentialgleichung n-ter Ordnung auf ein in ρ lineares System

Für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung in $[a,b]$ der Form

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x,\rho)\eta^{(k)}(x) = 0$$

mit $p_n(x,\rho) = 1$, $p_k(x,\rho) = \sum_{j=o}^{n-k} \pi_{n-k,j}(x)\rho^j$, $\pi_{n-k,j} \in C_{k+j}$ $[a,b]$

wird unter gewissen Voraussetzungen eine Transformation

$$(\eta^{(k)}(x))_{k=o}^{n-1} = \tilde{C}(x,\rho)y(x)$$

mit $\tilde{C}(x,\rho) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho^\nu \tilde{C}_\nu(x)$, $\tilde{C}_o = I$, $\tilde{C}_\nu$ nilpotente untere Dreiecksmatrizen,

entwickelt, die obige Differentialgleichung auf ein System der Form

$$y'(x) = [A_o(x) + \rho A_1(x)]y(x)$$

mit stetig differenzierbarer unterer Dreiecksmatrix $A_1(x)$ überführt. Eine weitergehende Transformation, die A_1 als konstante Diagonalmatrix liefert, existiert für Differentialgleichungen der Form

$$\eta^{(n)}(x) + \sum_{k=o}^{n-1} l_k(x)\,\eta^{(k)}(x) = \lambda\left[\eta^{(m)}(x) + \sum_{k=o}^{m-1} h_k(x)\,\eta^{(k)}(x)\right]$$

mit $m \leqq n-1$, in denen $\Lambda = \rho^{n-m}$ gesetzt wird.

A. SCHÖNHAGE

Darstellung der Diskriminante einer Matrix und eine Anwendung

Die Diskriminante einer Matrix $A = (a_{i,j})_{n,n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, $\text{dis } A = \prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)^2$, ist ein ganzzahliges Polynom in den Elementen $a_{i,j}$, das folgende Darstellung besitzt:

Wird A als Endomorphismus eines passenden Raumes E angesehen, dann bildet $H = A\otimes I - I\otimes A$ den symmetrischen Teil U^+ von $E\otimes E$ in den antisymmetrischen Teil U^- ab (es ist $E\otimes E = U^+\otimes U^-$) und $H(U^-)\subseteq U^+$, also $H^2(U^-)\subseteq U^-$. Sei Q die Einschränkung von H^2 auf U^-. Dann gilt Satz: dis A = det Q .

Bei Verwendung der Basiselemente $u_{i,j} = e_i\otimes e_j - e_j\otimes e_i$ $(1\leq i<j\leq n)$ für U^- erhält man eine $N\times N$ - Matrix für Q, wobei $N = \dim U^- = \binom{n}{2}$, deren Elemente quadratische Formen in den $a_{i,j}$ sind.

Mit diesen Hilfsmitteln lassen sich die Diskriminanten gewisser Eigenwertaufgaben im Zusammenhang mit der Mathieuschen Differentialgleichung explizit als unendliche Determinanten darstellen.

H. FRENTZEN

Kriterien für die Linksdefinitheit s-hermitescher Differentialgleichungssysteme

Für linksdefinite (d.h. die mit F_1 und S_1 gebildete Sesquilinearform ist auf einem geeigneten Raum positiv semidefinit) S_1-hermitesche Differentialgleichungssysteme im Normalfall, $F_1 y = \lambda G_1 y$, ergeben sich unter der Voraussetzung $G_{11} = 0$ zwei notwendige Bedingungen, von denen die erste hinreichend dafür ist, daß sich ein solches System auf gewissen Teilmengen der Grundmenge auf ein verallgemeinertes kanonisches System transformieren läßt.

Fordert man die Linksdefinitheit auf einem hinreichend großen Raum und die Positivdefinitheit der Sesquilinearform auf dem Raum $F_1 y = 0$, so ist jedes verallgemeinerte kanonische System schon kanonisch.

B. SCHULTZE

Die Formel von Titchmarsh-Kodaira bei linksdefiniten kanonischen Differentialgleichungssystemen

In ihrer Theorie linksdefiniter singulärer kanonischer Eigenwertprobleme geben A. Schneider und H.D. Nießen Entwicklungssätze an, die man in konkreten Fällen nur anwenden kann, wenn es gelingt, die Spektralmatrix $P(\sigma)$ explizit zu berechnen. Eine Darstellung dieser Spektralmatrix gelingt mit der Greenschen Matrix $\mathcal{L}_\lambda(x)$, deren explizite Form angegeben wird. Für eine große Klasse von Eigenwertproblemen erhält man als Darstellung ein vollkommenes Analogon der Formel von Titchmarsh-Kodaira.

A. DIJKSMA

On ordinary differential subspaces - a report on work done in collaboration with E.A. Coddington (UCLA, USA).

Let X,Y be Banachspaces; $W = X \oplus Y$ a direkt sum; $W^+ = Y^* \oplus X^*$, where X^* denotes the dual of X consisting of conjugate linear functionals on X. Let $\langle\ ,\ \rangle : W \times W^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ be defined by $\langle \{f,g\}, \{f^+,g^+\} \rangle = \overline{f^+(g)} - \overline{g^+(f)}$.

A subspace T is a closed linear manifold T of W. Consider T as a multivalued operator. For subspaces T of W and S of W^+ we let

$$T^* = \left\{ \{f^+,g^+\} \,\middle|\, \langle T, \{f^+,g^+\} \rangle = 0 \right\} , \quad {}^*S = \left\{ \{f,g\} \,\middle|\, \langle \{f,g\} , S \rangle = 0 \right\} .$$

The problem we discuss is the following one

Given subspaces $A_0 \subset A$, with (i) A_0, A_1^* operators, (ii) dim $A_1/A_0 = r$, (iii) dim $(A_1)_\infty/(A_0)_\infty = s$ and (iv) $(A_0^*)_\infty/(A_1^*)_\infty = s^+$, describe subspaces A, A^* such that $A_0 \subset A \subset A$, $(A_1^* \subset A^* \subset A_0^*)$ and (i) dim $A/A_0 = d$, (ii) dim $A_\infty/(A_0)_\infty = s_1$, (iii) dim $(A^*)_\infty/(A_1^*)_\infty = s_1^+$

A complete characterisation is given and examples involving ordinary differential operators with Stieltjes boundary conditions are also given.

H.S.V. de SNOO

Eigenfunctionexpansions for the differential equation Ly=lMy

For the differential equation Ly=lMy on an open interval $\iota \subset \mathbb{R}$,
$L = \sum_{k=o}^{n} p_k D^k$, $M = \sum_{k=o}^{m} q_k D^k$ with sufficient regularity conditions on p_k, q_k we wish to consider a theory of self-adjoint extensions analogous to the case of operators when M=I. Four problems are discussed:

I. Regularity results for the system $(f,L\phi)_2 = (g,M\phi)_2$, $(g,L^+\phi)_2 = (f,M\phi)$ for all $\phi \in C_o^\infty(\iota)$ with $f,g \in U_{oc}(\iota)$.

II. Construction of a Hilbertspace associated with the differential expression M via a Dirichlet form.

III. Maximal and minimal differential relations S, S^+, T and T^+ associated with L,M such that $S^* = (T^+)^c$, $(S^+)^* = T^c$ (c closure in the Hilbert space)

IV. In case $L=L^+$ we sketch how a spectral measure can be constructed for a selfadjoint extension of S ($= S^+$).

This work is being done together with E.A. Coddington (Los Angeles).

B.L.J. BRAAKSMA

Asymptotics for a linear difference equation.

We consider a system of difference equations $y(z+1)=A(z)y(z)$ where $A(z)$ is a holomorphic $n \times n$ matrix in a neighbourhood of $z = \infty$: $A(z) = \sum_0^\infty A_k z^{-k}$, $|z|>z_o$.
In case A_o is non-singular a complete asymptotic theory is available. However, if A_o is singular, one does not always know fundamental solutions with their asymptotic expansions in sectors which cover the plane. Culmer & Harris, Pac. J. Math (1963) 13 therefore studied in detail the case n = 2. However, if $A_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$, $\rho \neq 0$ and $\det A(z) \not\equiv 0$, in a sector containing the positive real axis they only gave one solution with its asymptotic behaviour. We report on some progress for this case by W.A. Harris jr. and myself. We use a canonical form for the system above and apply the method of Laplace Transforms: $v(z) = v_o + \int_0^\infty e^{-zt} w(t)\cdot dt$. One gets an integral equation for w, which may be considered also as an integrodifferential equation for an other variable. This can be solved and the solutions can be estimated in some cases and thus a solution to the original problem may be given.

G. FREILING

Ein Äquikonvergenzsatz für eine Klasse von singulären nichtselbstadjungierten Differentialoperatoren

Für Differentialgleichungen $m(y) = \lambda n(y)$ mit linearen gewöhnlichen Differentialausdrücken m und n der Ordnungen n bzw. $p \leq n - 1$ werden unter geeigneten Differenzierbarkeits- und Wachstumsvoraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen im nichtkompakten Fall asymptotische Abschätzungen bewiesen. Zunächst wird gezeigt, daß die Gleichung $n(y) = 0$ ein Fundamentalsystem besitzt, das sich für $x \to \infty$ so verhält wie ein Fundamentalsystem von $y^{(p)} = 0$, ferner wird bewiesen, daß n linear unabhängige Lösungen der Gleichung $m(y) = \lambda n(y)$ existieren, von denen sich p so verhalten wie das genannte Fundamentalsystem von $n(y) = 0$ und n-p wie ein Fundamentalsystem von $y^{(n-p)} = \lambda y$. Diese Abschätzungen gelten sowohl für $|\lambda| \to \infty$ für beliebige x-Intervalle als auch für $x \to \infty$ und $|\lambda| > \lambda_0$. Mit Hilfe dieser Abschätzungen ist es möglich, einen Äquikonvergenzsatz zu beweisen, der besagt, daß eine von $m(y) = \lambda n(y)$ im singulären Fall erzeugte Klasse von Integraltransformationen im Fall von L^1 - Funktionen lokal die gleichen Eigenschaften besitzt, wie die gewöhnliche Fouriertransformation.

J. MEIXNER

Numerische Anwendung von Sphäroidfunktionen auf ein Beugungsproblem

Problem: Schallharter ebener Schirm mit kreisförmiger Öffnung, senkrecht einfallende ebene Schallwelle. Die strenge Lösung für die durchgehende Welle wird ebenso wie die entsprechende Kirchhoff-Näherung nach Sphäroidwellenfunktionen entwickelt. Die Koeffizienten werden für $\gamma = 20$ (γ = Zahl der Wellenlängen auf dem Umfang der Öffnung) numerisch berechnet. Die hohe Übereinstimmung legt nahe das Verhältnis entsprechender Entwicklungskoeffizienten für große γ zu untersuchen. Es ergibt sich $1 + O(\gamma^{-4})$. Es wird vermutet, daß man $1 + O(\gamma^{-n})$, n beliebig groß, erwarten kann.

W. NEUHAUS

Die Lösung der Randwertaufgabe der Elastizität bei gegebener Belastung für Rotationskörper mit Integralgleichungen

Es sei $K_{ijk} := \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{R^3} (X_i \delta_{jk} - X_j \delta_{ik} - X_k \delta_{ij}) - \frac{3}{R^5} X_i X_j X_k \right]$

mit $X_i = x_i - \xi_i$, $\vec{x} = (x_i)$ Aufpunkt, $\vec{\xi} = (\xi_i)$ Quellpunkt, $R^2 = \sum_{i=1}^{3} X_i^2$, ν Querkontr.

Die Randwertaufgabe bei gegebener Belastung (p_j) lässt sich als System von 3 eigentlich singulären 2-dimensionalen "Quasi"-Fredholmschen Integralgleichungen 2.ter Art formulieren, auf das nach S.G. Michlin die Fredholmsche Theorie ausgedehnt werden kann:

$$\pm \frac{(F_j)}{2} + \int_\Gamma (K_{ijk})\,(\alpha_k)\,(F_i)\,d\Gamma = (p_j) \qquad i,j,k = 1,2,3) .$$

Γ ist die Oberfläche, $(\alpha_k(\vec{x}))$ der Normaleneinheitsvektor und $(F_i(\vec{\xi}))$ die Belegung.

Die explizite Durchrechnung wird im allgemeinen Fall zu kompliziert. Sie gelingt bei Rotationskörpern mit rotationssymmetrischer Belastung. Hier braucht der Aufpunkt $\vec{x}$ nur in einer Schnittebene durch die Rotationsachse betrachtet zu werden, $(\alpha_k(\vec{x}))$, $(F_j(\vec{x}))$ und $(p_j(\vec{x}))$ werden nur in dieser Ebene und $(F_j(\vec{\xi}))$ nur in dieser und in einer dazu senkrechten gedreht. Seien (γ_{kl}), (ψ_{im}) und (χ_{mn}) die Matrizen dieser Drehungen, so wird:

$$\pm \frac{(F'_j)}{2} + \int_{\Gamma^*} T_{jn}\,F'_n\,d\Gamma^* = (p'_j)$$

$$\text{mit} \quad (T_{jn})(F'_n) = (K_{ijk})(\gamma_{kl}) \begin{pmatrix} e_\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\psi_{im})(\chi_{mn}) \begin{pmatrix} F_\rho \\ F_\beta \\ F_\xi \end{pmatrix}$$

Es zeigt sich bei Integration, daß mehrere Komponenten von (T_{jn}) wegfallen. Das Integralgleichungssystem zerfällt in ein System von 2 gekoppelten Integralgleichungen für Normal- und Tangentialbelastung

$$\pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} F_r \\ F_z \end{pmatrix} + \int_{\Gamma^*} T_{jn} \begin{pmatrix} F_\rho \\ F_\xi \end{pmatrix} d\Gamma^* = \begin{pmatrix} p_r \\ p_z \end{pmatrix} \qquad j,n = 1,2$$

und in eine einzige Integralgleichung für Torsion:

$$\pm \frac{1}{2} (F_\beta) + \int_{\Gamma^*} (T_{33})(F_\beta)\,d\Gamma^* = (p_\beta)$$

Besonders die letztere Integralgleichung ist einfach numerisch zu lösen. Anwendungen aus der Kerbspannungslehre und dem Tunnelbau wurden explizit angegeben.

M.Mendel (Wuppertal)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft