MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 8/1976

Wahrscheinlichkeitsmaße auf Gruppen

8.2. bis 15.2.1976

Die nunmehr vierte Tagung über Wahrscheinlichkeitsmaße auf Gruppen stand wieder unter der Leitung der Herren H.Heyer (Tübingen) und L.K.Schmetterer (Wien). Wie in den Jahren zuvor wurde durch die Besprechung einer jüngeren Arbeit der thematische Rahmen der Tagung abgesteckt. In diesem Jahr wurde dazu die Arbeit "Limit Theorems for Random Walks on Lie Groups" von D.W.Stroock und S.R.S. Varadhan (Sankhya, Ser.A.35, 277-294 (1973)), gewählt. Der überwiegende Teil des Vortragsprogramms bestand aus Referaten über neue Ergebnisse vor allem aus dem Gebiet der Irrfahrten auf Gruppen.

Teilnehmer

C. Berg, Kopenhagen
M.S. Bingham, Hull
Q.L.Burrell, Manchester
H. Carnal, Bern
P. Crépel, Rennes
I. Csiszár, Budapest
E. Dettweiler, Tübingen
J. Faraut, Straßburg
G. Forst, Kopenhagen
O. Gebuhrer, Straßburg
P. Gerl, Salzburg
H.F. de Groote, Tübingen
W. Guth, Konstanz
W. Hazod, Tübingen
H. Heyer, Tübingen
G. Högnäs, Åbo
A. Koranyi, Straßburg
T.-A. Maroudas, Tübingen
M. McCrudden, Manchester
A. Mukherjea, Tampa
H. Rindler, Wien
B. Roynette, Nancy
L.K. Schmetterer, Wien
E. Siebert, Tübingen
W. von Waldenfels, Heidelberg
M. Wolff, Dortmund.

Vortragsauszüge

W. Hazod: Einführung in "Limit Theorems for Random Walks on Lie Groups" von D.W.Stroock und S.R.S.Varadhan.

Man betrachtet zunächst die Verteilungen der Zuwächse eines stochastisch stetigen Prozesses mit unabhängigen Zuwächsen auf einer Lie-Gruppe G, also eine Familie $(\mu_{s,t} \mid 0 \leq s \leq t \leq T)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mu_{s,t}$ mit $\mu_{s,s} = \varepsilon_e$, so daß $\mu_{s,t}$ von den "Zeitparametern" s und t schwach stetig abhängt und die Evolutionsgleichung

$$\mu_{s,t} * \mu_{t,r} = \mu_{s,r} \quad (0 \leq s \leq t \leq r \leq T)$$

erfüllt ist. Wenn $\mu_{s,t}$ nur von der Differenz $t-s$ abhängt, so ist

$$(\mu_t \mid 0 \leq t \leq T) \qquad (\mu_t := \mu_{0,t})$$

eine Faltungshalbgruppe und $(\mu_{s,t})$ heißt homogen. Faltungshalbgruppen sind in letzter Zeit eingehend untersucht worden (s. G.A.Hunt, Trans.Amer.Math.Soc.81 (2), 264-293 (1956)). Sei (μ_t) eine Faltungshalbgruppe, (R_{μ_t}) die Halbgruppe der Faltungsoperatoren und R_A ihr infinitesimaler Generator. (R_{μ_t}) ist dann Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dt} R_{\mu_t} f = R_A R_{\mu_t} f = R_{\mu_t} R_A f, \quad f \in \mathcal{D}(G)$$

($\mathcal{D}(G)$ ist der Raum der Testfunktionen auf G). Es ist daher naheliegend, solche (inhomogenen) Evolutionsfamilien $(\mu_{s,t})$ zu untersuchen, die der folgenden inhomogenen Evolutionsgleichung genügen:

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial}{\partial t} R_{\mu_{s,t}} f = R_{\mu_{s,t}} R_{A(t)} f \quad (f \in \mathcal{D}(G)).$$

Die Lösbarkeit solcher Gleichungen wurde für endliche Halbgruppen und Gruppen (S.Johansen, V.M.Maximoff), für kompakte Gruppen und allgemeiner für Moore-Gruppen (V.M.Maximoff, W.Guth), sowie unter zusätzlichen Voraussetzungen für beliebige lokal kompakte Gruppen untersucht. In allen Fällen wurden die Lösungen durch Produktintegrale beschrieben.

In der Arbeit von Stroock und Varadhan wird ein anderer Weg gewählt: Man betrachtet anstelle der Verteilungen $\mu_{s,t}$ der Zuwächse die Prozesse mit Werten in G. $\mathcal{P}$ sei die Menge aller W-Maße auf dem Raum D^G aller rechtsseitig stetigen Abbildungen $[0,T] \to G$, die die Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen beschreiben, welche

(i) stochastisch stetig sind und

(ii) $P(X(0)=e) = 1$ erfüllen.

Weiterhin wird im ersten Teil der Arbeit vorausgesetzt, daß die Pfade der Prozesse fast sicher stetig sind.

Man integriert die Evolutionsgleichung (E) und sieht leicht, daß das Lösen von (E) äquivalent dazu ist, ein Maß $P \in M^1(D^G)$ zu finden, so daß für alle $f \in \mathcal{D}(G)$

$$\mathcal{G}_t^f \quad : \quad X \mapsto f(X(t)) - \int_0^t (R_{A(\tau)} f)(X(\tau))\, d\tau \ , \quad X \in D^G$$

ein Martingal bezüglich der σ-Algebren M_t, $0 \leq t \leq T$, die von $\{x(s) \mid s \leq t\}$ erzeugt werden, bildet ($x(s)$ ist das Auswertungsfunktional zur Zeit s).

Nun sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe, $\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$ sei eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G. V sei die Menge der stetigen Abbildungen A von $[0,T]$ in die Menge der positiv-semidefiniten Matrizen, so daß $A(0) = 0$ und für

$t > s$ $A(t) - A(s)$ positiv-semidefinit ist. Die Teilmenge solcher Abbildungen, die sogar absolutstetig sind, werde mit V_o bezeichnet. I bzw. I_o sei die Menge der stetigen bzw. absolutstetigen Abbildungen von $[0,T]$ in G. Jedem $(A,g) \in V_o \times I_o$ ordnet man $\mathcal{A}(t) = (a_{ij}(t)) := \frac{d}{dt} A(t)$ und $b(t) := (b_j(t))$ so zu, daß $\dot{g}(t) = \sum_j b_j(t)\, \xi_j(g(t))$ gilt. Damit ist eine Abbildung von $[0,T]$ in die Gaußgeneratoren definiert:

$$t \longmapsto L_t := \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(t)\, \xi_i\, \xi_j + \sum_j b_j(t)\, \xi_j.$$

Nun lassen sich folgende Hauptsätze formulieren:

<u>Satz 1</u>: Zu jedem $(A,g) \in V_o \times I_o$ gibt es genau eine Lösung $P_{A,g} \in M^1(D^G)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $P_{A,g}\,(X(o) = 1) = 1$,

(ii) für alle $f \in \mathcal{D}(G)$ ist

$$\left(g_t^f := f(X(t)) - \int_o^t (L_\tau f)(x(\tau))d\tau \right)_{0 \le t \le T}$$

ein Martingal.

Versieht man $V \times I$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, dann läßt sich die Abbildung $\phi : (A,g) \longmapsto P_{A,g}$ zu einem Homöomorphismus von $V \times I$ auf $\mathcal{P}$ fortsetzen:

<u>Satz 2</u>: (i) Zu jedem $A \in V$ gibt es genau ein $Q_A \in \mathcal{P}$, so daß für alle $f \in \mathcal{D}(G)$

$$\left(f(x(t)) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_o^t (\xi_i \xi_j\, f)\,(x(s))dA_{ij}(s) \right)_{0 \le t \le T}$$

ein Martingal bezüglich $(D^G, M_t, Q_A)_{0 \le t \le T}$ ist.

(ii) Ist $X(t)$ nach Q_A verteilt, so sei für $g \in I$ $Q_{A,g}$ die Verteilung von $X(t)g(t)$.

Dann ist die Abbildung $(A,g) \longmapsto Q_{A,g}$ ein Homöomorphismus von $V \times I$ auf $\mathcal{P}$.

Von den Herren E.Dettweiler, W.Guth und E.Siebert wurden dann die (nicht immer unproblematischen) Einzelheiten der oben zitierten Arbeit ausgeführt.

P.Crépel: Théorèmes limites sur les groupes localement compacts.

Soit G un groupe localement compact, $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a. indépendantes, à valeurs dans G, de même loi μ. On étudie le comportement asymptotique de la suite des v.a. $S_n = X_1 . \dots . X_n$. Le but de l'exposé est de donner des généralisations de la loi forte des grands nombres, du théorème central limite et de la loi du logarithme itéré, pour les groupes localement compacts.

1) Loi des grands nombres: Supposons ici G métrisable. Soit d une distance invariante à gauche sur G. On peut démontrer en appliquant un théorème de Kingman sur les processus sous-additifs (pour ce théorème, voir la démonstration de Y.Derriennic: CRAS 3/12/75 p.985), que $\frac{d(e,S_n)}{n}$ converge p.s. vers une constante.

Y.Guivarc'h ("Loi des grands nombres sur les groupes", exemplaires multigraphiés, Rennes) montre que si l'on prend de bonnes distances sur G, la positivité de la constante ne dépend pas de la distance choisie. Il étudie ensuite pour quelles conditions sur G et sur μ, cette constante est nulle.

2) Théorème de la limite centrale et loi du logarithme itéré: On rappelle quelques méthodes de démonstration du théorème de la limite centrale sur $\mathbb{R}$ (transformation de Fourier, méthode des moments, théorème de Trotter) et on donne quel-

ques idées de généralisations sur les groupes. Un premier problème consiste à préciser le concept de normalisation; ensuite il s'agit de démontrer les convergences. Les premiers théorèmes dans cette direction ont été donnés par V.N. Tutubalin et A.D.Virtser. Dans cet exposé, on donne des résultats sur le groupe de déplacements de R^d et sur les groupes nilpotents, ce qui généralise et précise (étude de la loi limite, vitesse de convergence, loi du logarithme itéré) les théorèmes de Tutubalin (cf. B.Roynette "Théorème central limite pour le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$ Ann. IHP 1975; P.Crépel et E.Le Page CRAS 22/9/75; P.Crépel et A.Raugi CRAS 13/10/75; H.Hennion "Théorème central limite fonctionnel pour le groupe de Heisenberg" Sém. de l'Univ. de Rennes 1975).

B.Roynette: Récurrence et transience des groupes localement compacts.

Soit G un groupe localement compact et μ une mesure de probabilité sur G. Soit $Z_n = X_1 \ldots X_n$ la marche aléatoire droite associée. Supposons μ adaptée (i.e. le support de μ engendre topologiquement G. Dans ces conditions, il est bien connu que, de deux choses l'une: ou tout élément de G est récurrent, ou tout élément est transitoire. Un groupe est dit récurrent s'il porte une marche adaptée récurrente, et sinon transitoire. Le but de l'exposé est de présenter les résultats actuellement connus sur la classification des groupes récurrents. En particulier, on a le théorème suivant: Soit G un groupe de Lie connexe.

1) Si G est à croissance polynomiale de degré inférieur ou égal à 2, alors G est récurrent.

2) Supposons G à croissance polynomiale de degré inférieur à 2. Supposons que μ ait un moment d'ordre $4+\delta$ $(\delta>0)$ ou que μ soit étalée; alors la marche de loi μ est transitoire.

Si de plus G est de type R (rigide) le potentiel de la marche tend vers 0 à l'infini (la marche est de type I).

Ce théorème est une preuve partielle d'une conjecture de Kesten. Il a été obtenu par Y.Guivarc'h et M.Keane.

<u>O.Gebuhrer</u>: Un théorème central limite sur le dual d'un espace riemannien symétrique de type compact.

I. Introduction: Le cas de $SU(2)$

(Exmard-Roynette: Séminaire Nancy-Strasbourg 1973-1975, Lecture Notes in Math.<u>497</u> (1975))

Les représentations unitaires irréductibles de $SU(2)$ sont indexées par $\mathbb{N}$ et, si $x, y \in \mathbb{N}$ on a les formules de Clebsch-Gordan donnant la multiplication des matrices associées aux représentations unitaires irréductibles de $SU(2)$, π_x et π_y:

$$\chi_x \cdot \chi_y = \frac{|x-y|+1}{(x+1)(y+1)}\chi_{|x-y|} + \frac{|x-y|+3}{(x+1)(y+1)}\chi_{|x-y|+2} + \dots + \frac{x+y+1}{(x+1)(y+1)}\chi_{x+y}$$

Ces formules et les relations d'orthogonalité des charactères conduisent aux définitions suivantes:

1) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) := \{\mu = \sum_{x\in\mathbb{N}} a_x\delta_x \mid \sum_x a_x = 1,\ a_x \geq 0\ (x\in\mathbb{N})\}$

2) Si $\mu,\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$: $\mu * \nu = \nu * \mu := (\sum_x a_x\delta_x) * (\sum_y b_y\delta_y)$

$$= \sum_{x,y\in\mathbb{N}} a_x b_y (\delta_x + \delta_y) = \sum_{x,y\in\mathbb{N}} a_x b_y\ \delta_{x+y}.$$

3) Si $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\hat{\mu} : SU(2) \to \mathbb{C}$ est donnée par

$$\hat{\mu}(\theta) := \sum_{x \in \mathbb{N}} a_x \chi_x(\theta) \qquad (\theta \in [0,\pi])$$

et on a

$$\widehat{\mu * \nu}(\theta) = \hat{\mu}(\theta)\,\hat{\nu}(\theta) \qquad (\theta \in [0,\pi])$$

4) Si $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et si $A \subseteq \mathbb{N}$ on pose

$$P(x,A) := (\delta_x * \mu)(A).$$

On dit que $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, (X_n)_{n\geq 0}, (P(x,.))_{x \in \mathbb{N}})$ est la chaîne de Markov associée à P et cette chaîne est appelée marche aléatoire de la loi μ sur N. On pose $P_n(x,y) := (\delta_x * \mu^{*n})(y)$, $G(x,y) := \sum_n P_n(x,y)$. On dit que la marche de loi μ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est transiente si $G(x,y) < \infty$ $(x,y \in \mathbb{N})$.

Quelques résultats:

<u>Th.1</u>: Si $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et si μ est adaptée (i.e. $\bigcup_{n \in N} (\mathrm{supp}\,\mu^{*n}) = \mathbb{N}$) alors $G(x,y) < \infty$ $(x,y \in \mathbb{N})$.

<u>Th.2</u>: Si $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est adaptée et si $\sum_{x \in N} a_x x^2 < \infty$, alors

$$\forall_{y \in \mathbb{N}} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} G(y,x) = \frac{1}{C(\mu)}$$

<u>Th.3</u>: Sous les hypothèses du Th.2, si $A \subseteq \mathbb{N}$, alors A est récurrente si et seulement si card $A \doteq \infty$.

<u>Th.4</u>: Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et on suppose les hypothèses du Th.2 vérifiées alors si (X_n) est la marche de loi μ,
$Y_n = \frac{X_n}{\sqrt{2c(\mu)n}}$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers la mesure admettant comme densité par rapport à dx $(\mathbb{R})$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. La marche aléatoire sur $[SU(2)]^\wedge$ se comporte asymptotiquement comme le module d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^3$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

II. Cas d'un espace riemannien symétrique de type compact (Clerc-Roynette, à paraître)

Soit $\mathfrak{U}$ une algèbre de Lie semi simple sur $\mathbb{R}$, de type compact et ϑ un automorphisme involutif de $\mathfrak{U}$. Soi $\mathfrak{g}$ la complexifiée de $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{g}_o$ la forme réelle associée, avec les décompositions en sous-espaces propres de l'extension de ϑ à $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o \ , \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_* \quad (\mathfrak{p}_* = i\mathfrak{p}_o).$$

Soit $\mathfrak{a}_*$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}_*$, de dimension ℓ. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a}_* + i\,\mathfrak{a}_*$. Soit Δ l'ensemble des racines non nulles du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, S le système réduit de racines, et P_+ l'ensemble des racines de Δ positives par rapport à S non identiquement nulles sur $i\mathfrak{a}_*$.

Soit Λ l'ensemble des fonctions sphériques élémentaires de type positif associées à l'espace riemannien symétrique $X = U/_{K_1}$ $(U \to U,\ K_1 \to \mathfrak{k}_o)$. Alors

$$\Lambda = \{\lambda \in (i\mathfrak{a}_*)' \mid \lambda \text{ rélle},\ \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N} \text{ pour les } \alpha \in \Delta_+ \text{ tels que } H_\alpha \in i\mathfrak{a}_*\}$$

Soit λ et $\mu \in \Lambda$, π_λ, π_μ, ϕ_λ, ϕ_μ respectivement les représentations unitaires et les fonctions sphériques associées. Alors

$$\phi_\lambda \cdot \phi_\mu = \sum_{\gamma \in \Lambda} C^\gamma_{\lambda,\mu}\, \phi_\gamma \quad \text{où} \quad C^\gamma_{\lambda,\mu} \geq 0, \ \sum_{\gamma \in \Lambda} C^\gamma_{\lambda\mu} = 1$$

et $C^\gamma_{\lambda\mu}$ est nul sauf pour un nombre fini de $\gamma \in \Lambda$.

Par analogie avec le cas de $[SU(2)]^\wedge$ on pose

$$\delta_\mu * \delta_\lambda = \delta_\lambda * \delta_\mu = \sum_{\gamma \in \Lambda} C^\gamma_{\lambda\mu}\, \delta_\gamma \quad \text{et si} \quad \theta, \nu \in \mathcal{P}(\Lambda),$$

alors

$\theta = \sum_{\lambda\in\Lambda} \theta(\lambda)\delta_\lambda$, $\sum_{\lambda\in\Lambda} \theta(\lambda) = 1$, $\theta(\lambda) \geq 0$.

Pour

$\nu = \sum_{\lambda\in\Lambda} \nu(\lambda)\delta_\lambda$ on pose $\theta * \nu = \nu * \theta \sum_{\lambda,\mu\in\Lambda} \theta(\lambda)\nu(\mu)\delta_\lambda \delta_\mu$.

Enfin $\hat{\mu}(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mu(\lambda)\phi_\lambda(x)$ $(x\in X)$.

Soit $\mu \in \mathcal{P}(\Lambda)$ et soit P la matrice sur $\Lambda\times\Lambda$ défini par $P(\lambda,\gamma) = (\delta_\lambda * \mu)(\gamma)$. A la mesure μ et à la matrice P, on associe la chaîne de Markov $(\Omega,(X_n)_{n\geq 0}, (P(\lambda, .))_{\lambda\in\Lambda})$ où $\Omega = \Lambda^{\mathbb{N}}$. On dira aue (X_n) est la marche de loi μ sur Λ.

A l'espace X on associe canoniquement un espace riemannien symétrique de type euclidien (L/K^*) isomorphe à $\mathcal{P}_*$ (L est ici un sous groupe fermé du groupe des déplacements de $\mathcal{P}_*$). Alors les fonctions sphériques élémentaires de type positif associées à (L/K^*) sont définies par

$$\mathcal{A}^+ = \{\lambda\in (i\,\mathfrak{a}_*)' \mid \lambda \text{ réelle}, \ \lambda(H_\alpha) \geq 0 \text{ pour } H_\alpha \in i\mathfrak{a}_*\}.$$

Soit Γ l'application $\mathcal{P}_*' \to \mathcal{A}^+$ qui à tout élément de $\mathcal{P}_*'$ associe l'unique élément de $\mathcal{A}^+$ qui lui est conjugué par l'action de K^*. Soit enfin (β_t), un mouvement brownien usuel sur $\mathcal{P}_*'$ de matrice de covariance S, supposée invariante par l'action de K^* sur $\mathcal{P}_*'$. On appelle mouvement brownien sur $\mathcal{A}^+$ le processus de Markov à trajectoires continues défini par $\gamma_t = \Gamma(\beta_t)$ $(t\geq 0)$. Alors on peut montrer le

<u>Théorème</u>: Soit μ une mesure de probabilité sur $\Lambda \subset \mathcal{A}^+$, adapté et ayant un moment d'ordre 2 (i.e. $\sum_{\lambda\in\Lambda} \mu(\lambda) ||\lambda||^2 < \infty$ $||.||$ une norme sur $\mathcal{A}^+$) et soit (X_n) la marche aléatoire de loi μ sur Λ. Alors $(\frac{X_N}{\sqrt{N}})$ converge en loi lorsque N tend vers ∞ vers la loi d'un mouvement brownien sur $\mathcal{A}^+$ à l'instant 1.

J.Faraut: A central limit theorem for the Lobatchevsky plane after Karpelevich, Shur and Tutubalin.

In the paper "Limit theorem for the composition of distributions in the Lobatchevsky plane and space" (Theory of Prob. and Appl. 4 (1959)) Karpelevich, Shur and Tutubalin define the dispersion $D(\mu)$ of a probability measure μ on $G = SL(2, \mathbb{R})$, biinvariant with respect to the compact subgroup $K = SO(2, \mathbb{R})$. The map $\mu \mapsto D(\mu)$ satisfies $D(\mu_1 * \mu_2) = D(\mu_1) + D(\mu_2)$ but it is not linear. In this talk the dispersion is defined in another way:

$$D(\mu) = \int_G Q(x)\, d\mu(x)$$

where Q is a generalized quadratic form, that is a continuous function on G, biinvariant with respect to K, satisfying the functional equation

$$\int_K Q(x\,k\,y)dk = Q(x) + Q(y),$$

so that $D(\mu_1 * \mu_2) = D(\mu_1) + D(\mu_2)$. With this definition a theorem analogous to the classical central limit theorem using spherical Fourier transform is proved.

H.Rindler: Asymptotic uniform distribution of sequences of probability measures in locally compact groups.

Let G be a locally compact group, $\mathcal{P}(G)$ the set of all probability measures on G. If (μ_α) is a net of probability measures, certain concepts of uniform distribution can be defined: $(\mu_\alpha * \nu - \mu_\alpha)$ should tend (for all $\nu \in \mathcal{P}(G)$) to zero in a suitable topology.

"Asymptotically" this net of measures satisfies the relation $\mu * \nu = \mu (\nu \in \mathcal{P}(G))$ which can only hold for normalized Haar-measure in compact groups. Interesting topologies are: norm-topology, strong operator-topology $(\|\mu_\alpha * \nu * f - \mu_\alpha * f\|_1 \to 0$ for all $\nu \in \mathcal{P}(G)$, $f \in L^1(G))$, or $\lim_\alpha (\mu_\alpha * \nu - \mu_\alpha)(f) = 0$ for all f in certain subspaces of the space of all bounded continuous functions (right uniform cont., left unif.cont., two sided uniform cont. and almost periodic).

It turns out that all concepts are strongly connected with the theory of invariant means (amenable groups). In general non compact, non abelian groups the relation between the several concepts are strongly connected with certain compactness conditions (invariant neighbourhoods, precompact conjugacy classes, etc.).

For abelian groups the theory was developed by Kerston and Mattes (Math.Nach.37,1968), continued by Gerl (using a characterization of Day of amenable groups) and Maxones and Rindler (also to appear in Math.Nachrichten or in preparation resp.). It turns out that in general groups the problems become much more difficult and computational and there are a lot of different concepts which are equivalent only in the compact or abelian case. There are also connections with the "usual" theory of distribution of point-sequences.

G.Forst: The Lévy-Khinchin representation of negative definite functions.

Let G be a locally compact abelian group with dual

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

group Γ. A continuous function $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ is said to be negative definite if for all $n \in \mathbb{N}$ and all $\gamma_1,\dots,\gamma_n \in \Gamma$ the $n\times n$-matrix

$$(\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i-\gamma_j))_{i,j=1,\dots,n}$$

is non-negative hermitian. The negative definite functions on Γ are in one-to-one correspondance with vague continuous convolution semigroups $(\mu_t)_{t\geq 0}$ on G (consisting of positive bounded measures with mass ≤ 1). Here ($\hat{}$ denotes Fourier-transformation) ψ and $(\mu_t)_{t\geq 0}$ correspond when

$$\hat{\mu}_t(\gamma) = \exp(-t\psi(\gamma)) \quad \text{for} \quad t\geq 0 \quad \text{and} \quad \gamma\in\Gamma .$$

The purpose of the lecture was to give an integral representation of the negative definite functions. This representation can be obtained by an extension of Harzallah's method for the <u>real</u> negative definite functions, using the construction of a Lévy-function given by Parthasarathy, Rao and Varadhan.

<u>C.Berg</u>: Some remarks on convolution semigroups of probability measures on locally compact abelian groups.

Let G be a locally compact abelian group and let $(\mu_t)_{t>0}$ be a convolution semigroup (vaguely continuous) on G. The Lévy measure μ for $(\mu_t)_{t>0}$ is the positive measure on $G\setminus\{0\}$ given as

$$\mu := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mu_t \Big|_{G\setminus\{0\}}$$

in the vague topology.

The talk contained two parts:

<u>A</u>. 1) For all $t>0$: $\operatorname{supp}(\mu_t) + \operatorname{supp}(\mu) \subseteq \operatorname{supp}(\mu_t)$

2) If $(\mu_t)_{t>0}$ is symmetric there exists a closed subgroup $H \subseteq G$ such that $\operatorname{supp}(\mu_t) = H$ for all $t>0$.

B. Let $T := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$ and let $d\mu_t = g_t(\theta)d\theta$ be the Brownian semigroup defined by

$$g_t(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-tn^2} e^{in\theta} .$$

Let $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of positive numbers and consider the semigroup $(\mu_t^{\mathfrak{a}})_{t>0}$ on T^∞ defined by

$$\mu_t^{\mathfrak{a}} := \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_{ta_n} .$$

Then for fixed $t>0$ the measure μ_t is absolutely continuous with respect to Haar measure on T^∞ if and only if the series $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2ta_n}$ converges.

Choosing $a_n = \log(n+1)$ we get a convolution semigroup on T^∞ of local type (Gaussian) such that μ_t is singular for $t< \frac{1}{2}$ and absolutely continuous for $t> \frac{1}{2}$.

A.Mukherjea: Limit theorems for probability measures on non-compact groups and semigroups.

Let S be a locally compact second countable topological (Hausdorff) semigroup and $\mathcal{P}(S)$ the set of all regular probability measures on S. For $\mu\in\mathcal{P}(S)$ the convergence of $(\mu^{*n})_{n\in\mathbb{N}}$ in the vague topology was studied and the following results were established:

(1) If S is a non-compact group generated by S_μ, the support of μ, then $\lim_{n\to\infty} \mu^{*n} = 0$.

(2) If S is a completely simple semigroup with the usual structure $X\times G\times Y$ generated by S_μ, then $\lim_{n\to\infty} \mu^{*n}=0$ if and only if G is non compact.

(3) If S is a compact semigroup and $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a sequence in $\mathcal{P}(S)$, then there exists a sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S such that the sequence $(\mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_n * \delta_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$

(δ_{a_n} denotes the unit mass at a_n) converges vaguely to a probability measure on S.

(4) If S is a compact semigroup, $\mu \in \mathcal{P}(S)$ and $S = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_\mu^n}$, then $(\mu^{*n})_{n\in N}$ converges vaguely to a probability measure on S if and only if $\liminf_{n\to\infty} S_\mu^n \neq \emptyset$, where

$$\liminf_{n\to\infty} S_\mu^n = \{x\in S \mid \forall_{\mathcal{V}}\ \mathcal{V} \text{ neighbourhood of } x\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq N}\ S_\mu^n \cap \mathcal{V} \neq \emptyset\}.$$

(5) Suppose S is a non-compact nilpotent group, $\mu\in\mathcal{P}(S)$, $e\in S_\mu$ and S generated by S_μ. Then for every compact K

$$\sup\{\mu^{*n}(Kx) \mid x\in S\} \to 0$$

as $n\to\infty$.

(6) Suppose S is a non-compact group with a relatively compact invariant neighbourhood V. If $\mu\in\mathcal{P}(S)$ s.t. $\overline{\bigcup_{n\in N} S_\mu^n} = S$, then there exists a sequence $(a_n)_{n\in N}$ in S such that $\mu^{*n} * \delta_{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda\in\mathcal{P}(S)$ if and only if there exists a compact normal subgroup $H\subset S$ such that $S_\mu \subset Hx$, $x\notin H$.

G.Högnäs: Random walks on compact semigroups

Let S be a compact, multiplicatively written semigroup. Then there is a minimal two-sided ideal K in S which is compact and completely simple. K admits the representation $X\times G\times Y$ where G is a compact group and X,Y are compact topological spaces. The multiplication in $X\times G\times Y$ is given by

$$(x,g,y).(x',g',y') = (x,g\phi(y,x')g',y')$$

where $\phi : Y\times X \to G$ is a continuous function. Let ν be a regular probability measure on S and assume furthermore that S is generated by the support S_ν of ν. The Markov process with transition probability $P(x,A) := \nu(x^{-1}A)$ is called the right random walk on S $(x^{-1}A := \{s\in S \mid xs\in A\})$. The left random walk is defined analogously. A mixed random walk is obtained if

$$P(x,A) = p\nu(x^{-1}A) + (1-p)\nu(Ax^{-1}) \quad (0<p<1 \text{ fixed}).$$

Also a so-called bilateral walk, defined by

$P(x,A) := (\nu\otimes\nu)\{(s,t) \mid sxt\in A\}$ (in the second countable case)

was considered. For all walls the elements of K are recurrent and the elements of $\complement K$ transient. The minimal right (left) ideals are the invariant sets for the right walk (left walk). The mixed walk has only one invariant set, namely K itself. The bilateral walk has at most two invariant sets. The stationary walks are ergodic if there is only one invariant set.

<u>T.-A.Maroudas</u>: Mesures de probabilités sur les demi-groupes finis.

Le problème que nous nous sommes posé dans la recherche de demi-groupes γ convexes et compacts de $n\times n$-matrices dont les points extrémaux $\mathcal{E}(\gamma) =: S$ forment un demi-groupe fini comportant un élément neutre se compose de ces quatre parties:

I. D'abord donner une caractérisation des éléments infiniment divisibles de γ.

II. Ensuite donner une caractérisation des éléments idempotents de γ.

III. La recherche de l'ensemble $\mathcal{G}$ de groupes Γ dans γ et leurs propriétés.

Iv. Et enfin exploiter la théorie de probabilité pour acquérir des propositions de convergence concernant le produit d'une suite de $n\times n$-matrices.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Dans la suite nous avons construit la liaison appropriée qui nous a permis de passer de l'ensemble de mesures de probabilité sur S, à l'ensemble de nos matrices au moyen d'une application identique, à savoir de S dans γ.

Puis nous avons montré les propositions suivantes:

<u>Prop.1</u> $P \in \gamma$ est infiniment divisible, si et seulement si P admet la représentation $P = \exp_{\mathcal{J}} |\alpha(R-\mathcal{J})|$, pour un idempotent $\mathcal{J} \in \gamma$, un élément $R \in \gamma$ avec la propriété $\mathcal{J} R \mathcal{J} = R$ et une constante non-négative α.

<u>Prop.2</u> Les éléments idempotents de γ sont caractérisés par les mesures idempotentes de probabilités sur S, mais cette caractérisation n'est pas unique.

<u>Prop.3</u> L'ensemble $\mathcal{G}$ est fini, si et seulement si, chaque demi-groupe simple $H \subset S$ -admettant donc une décomposition $H = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{k=1}^{s} G_{ik}$ en groupes disjoints G_{ik}- possède la propriété:

$$\vartheta(\omega_{ik}) = \vartheta(\omega_{jl})$$

pour tout $i,j = 1,\dots, r$ et $k,l=1,\dots,s$.

(ici ω_{ik} est la mesure normée de Haar sur G_{ik} et ϑ le prolongement de l'application identique de S dans γ sur l'ensemble de mesures de probabilité sur S.)

<u>Prop.4</u> Soit $(P_k)_{k \in N}$ une suite de matrices bistochastiques. Existe-t-il un nombre $\varepsilon \in [0,1)$, et un $k_o \in \mathbb{N}$, tel que $||P_k - I|| \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq k_o$, alors la suite $\left(\prod_{n=1}^{k} P_n\right)_{k \in N}$ converge vers une $n \times n$-matrice bistochastique P.

M.Wolff: Über Produkte abhängiger zufälliger Veränderlicher mit Werken in einer kompakten Halbgruppe.

Sei S eine kompakte metrische Halbgruppe, deren minimales Ideal K eine Gruppe mit e als neutralem Element ist. Sei $X = (X_n)_{n\geq 0}$ eine zeitlich homogene Markoff-Kette mit S als Zustandsraum und stetigem Übergangskern P. Dieser sei gleichmäßig ergodisch und es gebe genau eine wesentliche Klasse C. Diese habe mit K einen nicht-leeren Durchschnitt. Der Prozeß $Z = (X,Y)$ mit $Y_n = X_o \ldots X_n$ ist eine zeitlich homogene Markoff-Kette mit stetigem Übergangskern. Die Menge

$$H_x := \{y \mid (x,e) \overset{\curvearrowright}{(Z)} (x,ey)\}$$

ist eine abgeschlossene Unterhalbgruppe. Z ist mittelergodisch und die ergodischen Maße ρ haben folgende Form: Sei $x \in C$, $y \in K$. Dann ist der Punkt (x,y) wesentlich für Z; die zugehörige wesentliche Klasse $C(x,y)$ ist gleich

$$\bigcup_{u\in C} |\{u\} \times yH_x t_u| \quad \text{und}$$

$$\langle h,\rho\rangle = \int_C \int_N h\,(u,\, sy\, t_u)\,dm_N\,(s)\; d\mu(u)$$

für alle $h \in \mathcal{C}(S\times S)$, wo $N = yH_x y^{-1}$ und m_N das normierte Haarsche Maß dieser Gruppe ist; ferner ist $u \to t_u$ eine passende universell meßbare Abbildung von C nach K. Speziell hat man also für jede beschränkte Borel-Funktion $g : S \to R$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\,(g \circ Y_k \mid (x,y))\right) = \int_C \int_N g(syt_u)\,dm_N\,d\mu(u).$$

P.Gerl: Faltungspotenzen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf diskreten Gruppen.

Auf einer diskreten, abzählbaren Gruppe G werden Wahrscheinlichkeitsmaße P betrachtet, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Der Träger von P erzeugt G und

(2) $P^{*n}(e) > 0$ für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$ (e bezeichnet das neutrale Element von G).

In der Literatur finden sich viele Ergebnisse über das asymptotische Verhalten von P^{*n}, wobei fast immer noch die Voraussetzung

(3) $\limsup_{n\to\infty}(P^{*n}(e))^{1/n} = 1$

gemacht wird. (3) schränkt einerseits die Klasse der zugelassenen Gruppen (diese müssen mittelbar sein) und andererseits die zugelassenen Wahrscheinlichkeitsmaße ein. Es würde über einige Ergebnisse berichtet, die ohne die Voraussetzung (3) erhalten werden können.

<u>I.Csiszár</u>: Convergence of types theorem and stable laws on topological vector spaces.

Let E be a real (Hausdorff) topological vector space; we designate by x,y elements of E, by μ,ν non-degenerate K-regular probability measures on the Borelsets of E, by a,b,c real numbers, and by T_a the map $x \mapsto ax$.

<u>Theorem 1</u> If $\mu_n \to \mu$ and $T_{a_n}\mu_n * \delta_{x_n} \to \nu$, then $a_n \to a$, $x_n \to x$ and $\nu = T_a\mu * \delta_x$, where "$\to$" denotes weak convergence and δ_x the degenerate measure concentrated at x.

<u>Theorem 2</u> The following properties of μ are equivalent:

(i) $\forall_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ a,b>0}} \ \exists_{c\in\mathbb{R}} \ \exists_{x\in E} \quad T_a\mu * T_b\mu = T_c\mu * \delta_x$,

(ii) $\forall_{n\in\mathbb{N}} \ \exists_{a_n\in\mathbb{R}} \ \exists_{x_n\in E} \quad \mu^{*n} = T_{a_n}\mu * \delta_{x_n}$,

(iii) $\exists_{\nu} \ \exists_{(b_n)_{n\in N} \in R^N} \ \exists_{(y_n)_{n\in N} \in E^{\mathbb{N}}} \left(T_{b_n^{-1}} \nu^{*n} * \delta_{y_n} \to \mu.\right)$

Moreover, in (i) and (ii) necessarily $c=(a^{\alpha}+b^{\alpha})^{1/\alpha}$, $a_n = n^{1/\alpha}$ where $\alpha>0$ may be called the type of the stable measure μ. The new feature of this result is that no hypothesis on E (such as local convexity or completeness) is needed. Since Fourier analysis and Prohorov's compactness theorem are not available, the proofs are based on previous results of the author on convolutions in arbitrary topological groups. Unfortunately the method fails to give $\alpha \leq 2$ which is trivial if the topological dual of E separates points of E. The problem of existence of non-trivial stable measures on a general E remains open.

The reported results were obtained jointly with B.Rajput (Univ.of Tennessee, Knoxville, Tennessee, USA).

H.F. de Groote (Tübingen)