MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 9/1976

Funktionentheorie

15.2. bis 21.2.1976

Die diesjährige Funktionentheorietagung stand unter der Leitung von D. Gaier (Gießen), Ch. Pommerenke (Berlin) und H. Wittich (Karlsruhe).

Neben den deutschen Teilnehmern konnte in diesem Jahr wieder eine große Zahl ausländischer Gäste begrüßt werden, die auch durch ihre Vorträge zum Gelingen der Tagung beitrugen. Vorgetragen wurden Ergebnisse aus verschiedenen Gebieten der Funktionentheorie einer Veränderlichen. Die am häufigsten behandelten Themen waren: Approximationstheorie sowie Gewöhnliche Differentialgleichungen im Komplexen.

Teilnehmer

I.N. Baker, London
J. Becker, Berlin
H. Begehr, Berlin
J.G. Clunie, London
H. Epheser, Hannover
G. Frank, Hagen
F. Gackstatter, Berlin
D. Gaier, Gießen
T.H. Ganelius, Göteborg
H. Grunsky, Würzburg
K. Habetha, Aachen
W.K. Hayman, London
H. Hornich, Wien
F. Huckemann, Berlin
A. Hyllengren, Stockholm
K.-H. Indlekofer, Paderborn
B. Kjellberg, Stockholm
O. Knab, Karlsruhe
B. Korenblum, Tel-Aviv
J. Korevaar, Amsterdam
I. Laine, Erlangen
W. Luh, Darmstadt
P. Malliavin, Paris
K. Menke, Dortmund
E. Mues, Karlsruhe
R. Nevanlinna, Helsinki

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

J. Nikolaus, Siegen
E. Peschl, Bonn
A. Pfluger, Zürich
Ch. Pommerenke, Berlin
M. v. Renteln, Gießen
L.A. Rubel, Urbana
H. Rüßmann, Mainz
St. Ruscheweyh, Dortmund
W. Schwarz, Frankfurt
H.S. Shapiro, Stockholm
V. Singh
K. Strebel, Zürich
H. Tietz, Hannover
St. Timmann, Hannover
K. Umgeher, Wien
J. Winkler, Berlin
H. Wittich, Karlsruhe
D. Wrase, Karlsruhe

Vortragsauszüge

I.N. BAKER: Iteration of holomorphic maps $T: C^n \to C^n$ near a fixed point

Let $x \in C^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. $||x|| = \max (x_i)$. Given (bi)holomorphic $T: C^n \to C^n$ with $T(0) = 0$, $T'(0) = L$, where L nonsingular, and given a (continuous) determination of L such that $L^\sigma \cdot L^\tau = L^{\sigma+\tau}$, $L^1 = 1$. Consider the problem: Embed T in a continuous group: $T^\sigma(x) = L^\sigma x + o(||x||)$, with $T^\sigma \circ T^\tau = T^{\sigma+\tau}$, $T^1 = T$.

If the eigenvalues λ_i of L satisfy no relations $\lambda_i = \lambda_1^{\mu_1}, \dots, \lambda_n^{\mu_n}$ there is a unique formal series T^σ with $T^\sigma \circ T = T \circ T^\sigma$, and automatically one has $T^\sigma \circ T^\tau = T^{\sigma+\tau}$.

Example of a T which is not even formally embeddable.

Convergence of formal iterates when they exist: This always occurs if all $|\lambda_\nu| < 1$ (Peschl & Reich). No (?) work has been done befor on other cases. - In fact these lead to small divisor problems. However, using techniques of Rüßmann, Szekeres and I have shown that for almost all $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ we do have convergence of the formal iterates.

Applications to differential equations let Poincaré in this direction and his followers Lean, Lattès took it up c. 1900. More recent work by Japanese authors any by Peschl and Reich.

H. BEGEHR: Das Randwert-Normproblem für die nichtlineare Gleichung $w_{\bar{z}} = f(z,w)$

Das Randwert-Normproblem für die Differentialgleichung $w_{\bar{z}} = f(z,w)$ ist von Wendland (in Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 430(1974)) untersucht worden. Die eindeutige Lösbarkeit des Problems kann unter einer Bedingung, die eine Verallgemeinerung der Lipschitzbedingung ist, mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes bewiesen werden. Zu den hier erfaßten Funktionen gehört die allgemeine Klasse der approximativ analytischen Funktionen.

J. CLUNIE: Koebe arcs* and Blaschke products

Maclane introduced the now well-known classes A, B and L of functions analytic in the unit disc and showed that A = B = L. If A_m, B_m, L_m are the similar classes of functions meromorphic in the unit disc, then Barth showed that the only relations among A_m, B_m, L_m are those which are immediate logical consequences of the definitions. If A'_m, B'_m, L'_m are the subclasses of A_m, B_m, L_m of functions f such that $N(r,f) = O(1)$ $(r \to 1-)$, then Barth showed that $A'_m = B'_m$. It is now shown that L'_m is different from A'_m and B'_m.

For ε $(0 < \varepsilon < 1)$ and c $(\frac{1}{2} < c < 1)$ given consider

$$g(z) = \left(\frac{1-e^{\varepsilon}z^2}{1-e^{-\varepsilon}z^2}\right)^2 \left(\frac{1-e^{-(1-c)\varepsilon}z^2}{1-e^{(1-c)\varepsilon}z^2}\right)^2 \left(\frac{1-e^{-2c\varepsilon}z^2}{1-e^{2c\varepsilon}z^2}\right) .$$

By examining the level set $\{z: |g(z)| = 1\}$ it is shown that c can be chosen and then g(z) "perturberd" to give a function

$f(z)$ which is a quotient of Blaschke factors with $f(0) = 1$, $|f(z)| = 1$ $(|z| = 1)$ and $\{z: |f(z)| = 1\}$ containing an unbranched loop about the origin and given $\eta > 0$ one can ensure that $M(r,f) + N(r,\frac{1}{f}) < \eta$.* Hence by suitably choosing a sequence (f_k) of such functions and a sequence (n_k) of positive integers one constructs $F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z^{n_k})$ to be a quotient of Blaschke products having a sequence of loops round the origin on which $|F(z)| = 1$ and which converges to $\{|z| = 1\}$.

*I am informed by the distinguished Professor Dr. Ch. Pommerenke that my use of "Koebe arcs" is incorrect.

G. FRANK: Über meromorphe Funktionen und deren Ableitungen

Mit Hilfsmitteln aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der Nevanlinna-Theorie wird folgender Satz bewiesen:

Satz:

Sei $f \not\equiv c$ meromorph in $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ und $k \geq 2$. Weiter besitzen f und $f^{(k)}$ die Darstellungen $\frac{Q}{G}$ bzw. $f^{(k)} = \frac{P}{G^*}$ mit ganzen Funktionen Q, G, P, G^*. Dabei haben G und Q bzw. P und G^* keine gemeinsamen Nullstellen. Dann gilt

$$\bar{N}(r,f) \leq k_1 \log r + k_1 \overset{+}{\log}\,[k_2 T(r,\tfrac{f'}{f}) + \tfrac{1}{k}\, m(r,\tfrac{Q^{k+1}}{P})$$
$$- (k_2-1)\bar{N}(r,\tfrac{1}{f}) + k_3 \log r] + k_4\{\bar{N}(r,\tfrac{1}{f}) + \bar{N}(r,\tfrac{1}{f^{(k)}})\}, r \notin E,$$

wobei $E \subset \mathbb{R}^+$ eine Menge von endlichem linearem Maß ist und die Konstanten k_1, k_2, k_3 und k_4 nur von k abhängen.

Als Folgerungen beweist man

1) Für $Q = P = 1$ eine Vermutung von Hayman:
   Aus f meromorph in $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ und $k \geq 2$, $f(z)\, f^{(k)}(z) \not\equiv 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt: $f(z) = e^{az+b}$ oder $f(z) = (az+b)^{-n}$ mit $a,b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.

2) Für P,Q Polynome eine Verschärfung eines Satzes von Clunie und Tumura:
f meromorph in $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ und $k \geq 2$, f und $f^{(k)}$ haben nur endlich viele Nullstellen.
Dann gilt $f = \frac{P_1}{P_2} e^{P_3}$ mit P_1, P_2 und P_3 Polynome.

T. GANELIUS: Complex methods to rational approximation

A typical approximation problem (said to have some practical interest) we shall consider is the following:
Let K be a set of disjoint real intervals and consider the function f equal to +1 on some of this intervals $\{I_k\}$ and equal to -1 on the others $\{J_k\}$. Put $P = \cup I_k$ and $M = \cup J_k$. We shall prove that the best rational approximation $r_n(f)$ to f on K by rationals with n poles satisfies

$$0 < C_1 < r_n(f) \cdot \exp\left(\tfrac{1}{2} n / C(P,M')\right) < C_2,$$

where $C(P,M')$ is the Green capacity of P with respect to the complement M' of M. This is a complement to results of Widom and Goncar.

The above-mentioned inequality follows from the fact that for closed sets P and M in $\mathbb{C}$ with a certain regularity it holds that $0 < C_1 < \exp(-n/C(P,M')) \sup_{g \in R_n} (\min_P |g| / \max_M |g|) < C_2$.

The proof is based on a construction of "Faber rationals" related to methods of Pommerenke and applies results of Grunsky (

W.K. HAYMAN: Ein Reihensatz mit Anwendungen auf subharmonische Funktionen

Satz A. Es sei a_ν eine nicht negative Reihe, $a_1 > 0$, $b_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$, $c_n = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu$, und $b_n = O(n)$ wenn $n \to \infty$. Dann folgt für

$\alpha > \frac{1}{2}$, aber nicht immer für $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a_\nu}{c_\nu}\right)^\alpha < \infty.$$

Hieraus folgt

Satz B. Es sei $u(z)$ in der Ebene subharmonisch,

$$B(r) = \sup_{|z|=r} u(z) = O(\log r)^2 \quad \text{wenn } r \to \infty.$$

Für positives ε sei $E(\varepsilon)$ die Menge aller z, für welche

$$u(z) < (1-\varepsilon)B(|z|)$$

und $d_n(\varepsilon)$ die Kapazität vom Teil von $E(\varepsilon)$ der im Ringgebiet $2^n \leq |z| < 2^{n+1}$ liegt. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \{\log(2^{n+2}/d_n(\varepsilon))\}^{-\alpha}$$

für $\alpha > \frac{1}{2}$, aber nicht mehr i.a. für $\alpha = \frac{1}{2}$.

Der Satz B verschärft einen früheren Satz des Vortragenden.

H. HORNICH: Produktdarstellung von analytischen Funktionen

Die im Einheitskreis analytischen und dort nirgends verschwindenden Funktionen lassen sich als Produkte $\prod_j (1+z^j)^{c_j}$ mit $\overline{\lim} \sqrt[j]{|c_j|} \leq 1$ darstellen. Der Raum dieser Funktionen mit einer geeigneten Metrik wird näher untersucht.

K.-H. INDLEKOFER: Äquivalente Potenzreihen

Es sei D der offene Einheitskreis der komplexen Ebene und

$$A_a(D) := \{f\colon D \to \mathbb{C} \text{ holomorph};\ f(z) = \sum a_n z^n,\ \sum |a_n| < \infty\}.$$

Für monoton steigende und subadditive Funktionen $w\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^+$ mit $w(h) \to 0$ für $h \to 0^+$ definiere man die Algebra

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(1) $$A_{aw} := \{f \in A_a(D): \sup_{h \in (0,\pi]} \frac{\omega(f;h)}{w(h)} < \infty\},$$

wobei $\omega(f;h)$ den Stetigkeitsmodul von f auf dem Rand von D bezeichnet. Sei außerdem

(2) $$\sum_{i=o}^{\infty} 2^{i/2}\, w(2^{-i}) = \infty .$$

Dann läßt sich zeigen:

<u>Satz.</u> Sei Φ: $D \to D$ eine Möbiustransformation von D mit $\Phi(z) \not\equiv e^{i\alpha}z$ $(z \in D)$. Dann ist die Menge

$$M_{aw} := \{f \in A_{aw}:\ f\circ\Phi \notin A_a(D) \text{ für alle } \Phi\}$$

dicht in $A_a(D)$, wobei die durch die Norm

$$\|f\| = \sum |a_n| \qquad (f \in A_a(D),\ f(z) = \sum a_n z^n)$$

erzeugte Topologie zugrunde gelegt wird.
Als Korollar bestätigt man u.a. eine Vermutung von G. Halâsz (Acta Math. Acad. Sci. Hung. <u>25</u> (1974), 81-87).

Das Ergebnis des Satzes ist im Zusammenhang mit der Charakterisierung der Automorphismen der Algebra (1) zu sehen (Mitt. Math. Sem. Gießen <u>111</u> (1974), 68-79).

B. KJELLBERG: <u>Nichts Neues über den Minimummodul</u>

Betrachten wir in der Ebene eine subharmonische Funktion u(z), z.B.

$$u(z) = \log |f(z)| ,$$

wobei f(z) ganz ist. Maximum und Infimum auf $|z| = r$ sind mit M(r) und m(r) bezeichnet. Seit langem (Wiman, Valiron u.a.) hat man sich für

$$Q(\rho) = \limsup_{r\to\infty} \frac{m(r)}{M(r)}$$

interessiert. Für $\rho \leq 1$ wurde früh gefunden, daß $Q(\rho) = \cos \pi\rho$ (später verbessert mit der unteren Ordnung λ statt ρ).
Wiman bewies, daß für ganze Funktionen ohne Nullstellen

gilt, daß

$$Q(\rho) \equiv -1$$

für $\rho > 1$, und er behauptete, daß dieses Resultat im allgemeinen gilt.

Es war eine große Überraschung, als Hayman 1950 bewies, daß es für große ρ Funktionen gibt, für die $Q(\rho)$ die Größenordnung $-\log \rho$ hat. Es ergibt sich die Frage, ob es schon für ρ (oder λ) kleiner als 2, z.B., möglich ist, Funktionen mit $Q(\rho) < -1$ zu konstruieren. Der Vortragende berichtete über die bisher nicht gelungenen Versuche, solche Beispiele zu konstruieren.

O. KNAB: <u>Über den Typus der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten</u>

Es wird der Index eines in

$$S_\gamma = \{z: |z| > R_o, \ \gamma \leq \arg z < 2\pi+\gamma\}$$

gewählten Zweiges W einer sich in $z=\infty$ unbestimmt verhaltenden Lösung w der Differentialgleichung

$$(*) \qquad \sum_{i=o}^{n} a_{n-i}(z) w^{(n-i)} = 0 \quad (a_{n-i} \text{ Polynome, } a_n(z) \not\equiv \text{const.})$$

eingeführt (Der Fall $\gamma = 0$ wurde von dem Vortragenden in manuscripta math. 18, 299 (1976) betrachtet.).

Dann existiert in dem Puiseux-Diagramm von (*) eine nur von der Lösung w abhängende negative Steigung $\lambda > 0$, die das Anwachsen des Index von W in S_γ für $|z| \to \infty$ bestimmt.

Hieraus ergibt sich, daß sich jeder in S_γ, $\gamma \in [0,2\pi)$, gewählte Zweig für $z \to \infty$ unbestimmt verhält und vom Mitteltypus der Wachstumsordnung $\lambda > 0$ ist.

B KORENBLUM: Non-Nevanlinna Classes of Analytic and Harmonic Functions in a Disk

For the class $A^{-\infty}$ of analytic functions in the unit disk D, which satisfy

$$|f(z)| \leq C_f(1-|z|)^{-n_f},$$

and for the corresponding class of meromorphic functions $\mathcal{N} = A^{-\infty}/A^{-\infty}$, a Nevanlinna-type theory is developed, including a description of zero sets, factorization and the notion of a singular boundary measure. For the corresponding class of harmonic functions

$$-\infty < u(z) < a_n + b_n \log\frac{1}{1-|z|} \qquad (z \in D)$$

a representation is obtained in the form of a generalized Poisson integral. Some larger classes are treated as well.

J. KOREVAAR: Approximation auf Kurven und verwandte funktionentheoretische Probleme

Approximationssätze von Runge, Walsh und Mergeljan implizieren, daß die nichtnegativen ganzen Potenzen z^n, bzw. alle ganzen Potenzen z^n, ein vollständiges System bilden für Räume von Funktionen auf gewissen kompakten Mengen. In diesem Vortrag wird für verschiedene Probleme gleichmäßiger Approximation die Frage untersucht, wieviele Potenzen weggelassen werden können. Resultate werden gegeben für die folgenden Fälle:

1. Holomorphe Funktionen auf einem (Null enthaltenden) Jordangebiet G, welche stetig sind auf $\bar{G}$, und in deren Potenzreihen nach z unendlich viele Glieder fehlen (gemeinsam mit M.J. Dixon).
2. Beliebige stetige Funktionen auf einer Jordankurve um Null (Arbeiten mit Pia Pfluger und mit H. Alexander).
3. Beliebige stetige Funktionen auf einem Jordanbogen.

Verwandte funktionentheoretische Probleme werden kurz erwähnt und einige Vermutungen ausgesprochen.

I. LAINE: Über das Wachstum der Lösungen linearer und algebraischer Differentialgleichungen

Bekanntlich läßt sich die Nevanlinnasche Charakteristik der meromorphen Lösungen y linearer Differentialgleichungen $\sum_{j=0}^{n} f_j(z)y^{(j)} = 0$ mit Hilfe der Charakteristiken der meromorphen Koeffizienten $f_0,\ldots,f_n$ nicht allgemein abschätzen; mit Hilfe der Größen $T(r,f_0),\ldots,T(r,f_n)$, $N(r,1/y)$ ist aber eine solche Abschätzung möglich. Allgemeiner betrachten wir eine algebraische Differentialgleichung $\Omega(z,y,y',\ldots,y^{(n)}) = \sum_{\lambda\in I} a_\lambda(z)y^{i_0}\ldots(y^{(n)})^{i_n} = 0$ mit meromorphen Koeffizienten und bezeichnen

$$|\lambda| = i_0+\ldots+i_n, \qquad \|\lambda\| = i_1+2i_2+\ldots+ni_n,$$

$$\Omega_q = \sum_{\lambda \in I, |\lambda|=q} a_\lambda(z)y^{i_0}\ldots(y^{(n)})^{i_n},$$

$$A_q = \sum_{|\mu|=q, \|\mu\|=k} a_\mu, \quad \text{wobei } k = \max_{\lambda\in I, |\lambda|=q} \|\lambda\| .$$

Eine allgemeine Abschätzung von $T(r,y)$ gewinnt man mit Hilfe von $N(r,y)$, $\bar{N}(r,1/y)$ und $\{T(r,a_\lambda): \lambda \in I\}$, falls y keine Lösung (von wenigstens) einer Gleichung $\Omega_q = 0$ ist oder aber y eine Lösung aller Gleichungen $\Omega_q = 0$ ist, und es existiert wenigstens ein $A_q \not\equiv 0$. Andernfalls braucht man für die Abschätzung von $T(r,y)$ zusätzliche Größen, deren Bestimmung im Prinzip möglich ist.

J. NIKOLAUS: Eine Bemerkung zum Picardschen Ausnahmewert Null bei Lösungen linearer Differentialgleichungen

Gegeben sei die Differentialgleichung

(D) $$w^{(n)} + a_{n-1}w^{(n-1)} + \ldots + a_0 w = 0$$

mit a_j = ganze Funktionen $(j = 0,1,\ldots,n)$.

1. Es sei $n = 2$. Hat (D) ein Fundamentalsystem (w_1,w_2), in

dem beide Funktionen von der Gestalt $w_j = \exp\{q_j\}$ sind mit q_j = ganze Funktionen, dann gilt

(1) $\quad w_1 = e^q, \quad w_2 = e^{q + \int e^f}$, f = ganze Funktion.

Umgekehrt stellen alle Funktionspaare der Gestalt (1) bei beliebigen ganzen Funktionen q und f ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung (D) dar.

2. Es sei $n = 3$. Die Funktionen w_1, w_2, w_3 mögen folgende Gestalt haben (dabei seien die q und f beliebige ganze Funktionen und $a_j, a, b \in \mathbb{C}$, die a_j seien paarweise verschieden):

   (2) $\quad w_j = e^{q + a_j \int e^f} \quad (j = 1,2,3)$ oder

   (3) $\quad w_1 = e^{q + a\int e^f}, \; w_2 = z \cdot e^{q + a\int e^f}, \; w_3 = z^2 \cdot e^{q+a\int e^f}$ oder

   (4) $\quad w_1 = e^{q+a\int e^f}, \; w_2 = z \cdot e^{q+a\int e^f}, \; w_3 = e^{q+a\int e^f + bz}$.

   Dann bilden die System (2), (3) und (4) jeweils ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung (D).

   Hat umgekehrt (D) ein Fundamentalsystem (w_1, w_2, w_3), in dem alle Funktionen von der Gestalt sind

   $$w_j = p_j \cdot \exp\{q_j + a_j \int e^f\}, \; j = 1,2,3,$$

   wo p_j, q_j und f Polynome sein sollen, dann haben die Funktionen w_j die Gestalt (2), (3) oder (4).

3. Gegeben seien die Polynome mit p_1, p_2 mit nur einfachen und voneinander verschiedenen Nullstellen und die ganze Funktion q. Dann gibt es immer eine ganze Funktion h so, daß $w_1 = p_1 e^q$, $w_2 = p_2 e^{q+h}$ Fundamentalsystem einer Differentialgleichung (D) für $n = 2$ ist. Im allgemeinen gilt nicht $h = \int e^f$.

A. PFLUGER: <u>Einige Probleme über konvexe schlichte Funktionen</u>

Es wird folgendes Problem in der Klasse K der konvexen schlichten Funktionen betrachtet: Unter den Funktionen

$$f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \dots + a_n z^n + \dots, \quad f \in K,$$

(i.e. wo die Koeffizienten der Nebenbedingung $a_2 = \dots = a_k = 0$, k fest, $1 < k < n$, genügen) ist $\operatorname{Re} a_n$ zu maximieren. Für $n \leq 2k$ bildet die (einzige) Extremale f den Einheitskreis auf ein reguläres $n-1$ - Eck ab. Im Fall $n = 2k+1$ bildet die eine Extremale auf ein reguläres k - Eck ab, die andere Extremale ist $\varepsilon^{-1}f(\varepsilon z)$ mit $\varepsilon^k = -1$. Für $n > 2k+1$ ist die Lösung nicht bekannt. Die Beweismethode beruht auf der Tatsache, daß $\frac{zf''(z)}{f'(z)} = g(z)$ eine Funktion der Caratheodoryklasse ist, i.e. $g(z) = 1 + 2c_1 z + \dots + 2c_n z^n$ und $\operatorname{Re} g > 0$ in $\{|z| < 1\}$, sowie der Darstellung der Koeffizienten c_j in der Form $c_j = \int_0^{2\pi} e^{ij\theta} d\mu$. Aus den Resultaten von Carathéodory über den Koeffizientenkörper C_{n-1} ergeben sich Aussagen über den Koeffizientenkörper K_n und Koeffizientenungleichungen, die jenen von J.A. Jenkins für die Klasse S analog sind. Ähnliche Methoden gelten in der Klasse der sternförmigen Funktionen und in der Klasse der Funktionen mit beschränkter Randdrehung.

M. v.RENTELN: Topological divisors of zero and finitely generated ideals in some algebras of holomorphic functions

Let $\mathbb{K}$ be a subfield of the complex numbers possessing a non-real number α with $|\alpha| \in \mathbb{K}$. Let A be a subalgebra of

$$A_{\mathbb{K}}(\bar{D}) := \{f \in A(\bar{D}) : f(z) = \sum_{n=o}^{n} a_n z^n, \ a_n \in \mathbb{K}\}$$

where $A(\bar{D})$ is the disc algebra. Then A and $A_{\mathbb{K}}(\bar{D})$ are normed algebras over the field $\mathbb{K}$ under the norm $\|f\| = \sup\{|f(z)| : |z| < 1\}$. Let $I = I(f_1,\dots,f_n)$ denote the ideal generated by the functions $f_1,\dots,f_n \in A$ and let $W = W(f_1,\dots,f_n)$ be the ideal consisting of all $f \in A$ with $|f(z)| \leq C \sum_{i=1}^{n} |f_i(z)|$ in $|z| < 1$ for some constant C (depending on f). Let $TNT^c(A)$ denote the complement of the topological divisors of zero of A. Then the main theorem can be stated for $A = A_{\mathbb{K}}(\bar{D})$ and some subalgebras as follows:

$$W \cap TNT^c(A) \neq \emptyset \iff I = W \text{ and } I \text{ is principal.}$$

In the special case of $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, this is a generalization of the Corona theorem for $A = A(\bar{D})$.

L.A. RUBEL: Hypernormal analytic functions

Let M be the Möbius group of all one-one conformal maps of the unit disc D onto itself and A the family of all analytic maps of D into itself. A meromorphic function f on D is called S-normal, where $S \subseteq A$, if the orbit of f under S, $\mathrm{orb}_S f = \{f \circ \sigma : \sigma \in S\}$, is a normal family. It is called S-hypernormal if the convex hull of the orbit is normal, and S-absolutely-hypernormal if the absolute convex hull of the orbit is normal. The main result so far is that in the case of the disc, the M-absolutely-hypernormal functions are all analytic and are just the Bloch functions. In the plane, where T is the group of all translations, the T-absolutely-hypernormal functions are az+b and $ae^{\lambda z}+b$. We are trying to prove that f is T-hypernormal iff it is of this form. A simple remark, in the case of the disc, is that f is M-normal iff f is A-normal. This suggests generalizations, to other domains, possibly different from that of Lehto-Virtanen.

H. RÜSSMANN: Über das Verhalten der Lösungen analytischer Differentialgleichungen in der Umgebung eines singulären Punktes

Gegeben sei ein System von Differentialgleichungen

(1) $\quad \frac{dz}{dt} = f(z) = Az + O(|z|^2)$,

wobei $f: \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < r\} \to \mathbb{C}^n$ mit $f(0) = 0$, $f'(0) = A$. Die

Lösung von (1) durch den Punkt $(0,\zeta)$ bezeichnen wir mit $z = Z(t,\zeta)$, also $Z(0,\zeta) = \zeta$ und $Z(t,0) = 0$. Wir betrachten die Lösungen von (1) nur für reelle t und fragen, unter welchen Bedingungen der singuläre Punkt $z = 0$ für $t \to \pm\infty$ stabil ist im Sinne von Ljapunov, d.h. wann zu jedem positiven $\varepsilon < r$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert mit $|Z(t,\zeta)| \leq \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $|\zeta| < \delta$. Es gilt der

Satz: Der Punkt $z = 0$ ist dann und nur dann für $t \to \pm\infty$ stabil, wenn gilt: (i) A ist diagonalisierbar, und die Eigenwerte von A sind rein imaginär. (ii) Es gibt eine holomorphe Koordinatentransformation $z = \zeta + O(|\zeta|^2)$, so daß (1) in $\frac{d\zeta}{dt} = A\zeta$ übergeht.

Dieser Satz ist ein Analogon des Satzes von Carathéodory-Cartan über beschränkte Gruppen holomorpher Transformationen (Theorem 8, Kap. I in Bochner-Martin). Ein sehr einfacher Beweis wird gebracht.

H.S. SHAPIRO: Domains on which analytic functions satisfy quadrature identities

A plane domain Ω (bounded) is said to admit a quadrature identity (q.i.) if there exist points $z_1,\dots,z_n \in \Omega$ and complex numbers $c_1,\dots,c_n$ such that $\int_\Omega f\, d\sigma = \sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j)$ for all analytic functions on Ω which are integrable; here $d\sigma$ denotes dxdy. (If some z_j are equal, this formula has a natural interpretation in terms of derivatives.)
Dov Aharonov and the author, in a paper to appear in J. d'Analyse Math., have obtained detailed information about domains which admit q.i. In the special case $n = 2$, $z_1 = z_2$ all solutions are obtained. The main results are: (i) the boundary of such a domain is a subset of an irreducible algebraic curve, (ii) if Ω is simply connected, it is the image of the unit disc under conformal mapping by a rational function.

V. SINGH: Inequalities for Starlike Functions

Notation $E = \{z: |z| < 1\}$.

P: The class of functions $p(z)$, regular analytic in E such that $\operatorname{Re} p > 0$, $p(0) = 1$.

S_α^*: The class of functions $f(z)$ regular in E, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ and

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \quad 0 \le \alpha < 1.$$

$\tilde{P}$: The class of functions $g(z) = \int_0^1 p(tz)\,dt$, $p \in P$, $z \in E$.

G: The class of functions $h(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ in E such that $\operatorname{Re} h'(z) > 0$.

H_β: $H_\beta \subset G$ such that if $h \in H_\beta$, $0 < \beta \le 1$ then $|h'(z)-1| < \beta$.

Theorem 1: If $\zeta \in E$, $|\zeta| = r$, $f \in S_0^*$ and $f(\zeta) = \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} = p$ then

$$\left| \log \left(\frac{(1-r^2)}{p} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\right) + \int_0^1 \frac{A}{B} dt - i \operatorname{Im} p \int_0^1 \frac{t(1-r^2)dt}{t(1-r^2)+(1-t)(1-tr^2)\operatorname{Re} p} \right|$$

$$\le \int_0^1 \frac{A}{B}\, dt,$$

where $A = (1-r^2)(\rho^2 - |p(\zeta)-a|^2)(1-t)(1-tr^2)$,

$B = 2(1-t^2r^2)(t(1-r^2)+(1-t)(1-tr^2)\operatorname{Re} p$

and $\rho = \dfrac{2r}{1-r^2}$, $a = \dfrac{1+r^2}{1-r^2}$.

In particular,

$$(1-r^2)\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| \le \operatorname{Re} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \le \frac{1+r}{1-r} + \frac{2r \log \left|(1-r^2)\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|}{(1-r^2) \log \frac{1+r}{1-r}}.$$

Theorem 2: If $p \in P$, $\zeta \in E$, $|\zeta| = r$, then

$$\int_0^1 \frac{(1-t)(1-tr^2)+t(1-r^2) \operatorname{Re} p(\zeta)}{1-r^2t^2} \le \operatorname{Re} \int_0^1 p(t\zeta)\,dt$$

$$\le \int_0^1 \frac{(rt^2) \operatorname{Re} p(\zeta)\,dt}{t(1-r^2)+(1-t)(1-tr^2)\operatorname{Re} p}.$$

Further, the radius of starlikeness of the class $G > .8534$ and that of the class H_1 is $> .974$. However, if $\beta \leq \sqrt{4/5}$, then $H_\beta \subset S_o^*$, and the class G and H_1 are not subclasses of S_o^*.

K. STREBEL: Über die Existenz extremaler Teichmüllerscher Abbildungen

Teichmüllersche Abbildungen sind quasikonforme Abbildungen, deren komplexe Dilatation von der Form

$$\kappa(z) = k \frac{\bar{\phi}(z)}{|\phi(z)|}$$

ist, wo ϕ ein meromorphes quadratisches Differential und k eine Konstante $0 \leq k < 1$ ist. Es werden extremale quasikonforme Selbstabbildungen des Einheitskreises (einfach zusammenhängender Gebiete) mit gegebenem Randhomöomorphismus h betrachtet. Bekanntlich gibt es zu jedem quasisymmetrischen h mindestens eine solche Abbildung f_o. Gibt es auch eine Teichmüllersche Abbildung? Es werden die beiden folgenden Sätze bewiesen:

1) Läßt sich h in einen Kreisring quasikonform fortsetzen mit einer maximalen Dilatation, die beliebig nahe an Eins ist, so ist die Antwort Ja.

2) Gibt es eine solche Fortsetzung, deren Maximaldilatation kleiner als die Maximaldilatation K_o einer extremalen Abbildung ist, so ist die Antwort ebenfalls Ja. In beiden Fällen ist die Extremale eindeutig (das zugehörige quadratische Differential hat endliche Norm).

Die angewendete Methode liefert z.B. auch eine Verallgemeinerung des Teichmüllerschen Verschiebungssatzes.

K. UMGEHER: Über multivalente Lösungen von linearen Differentialgleichungen

Im Einheitskreis D werden Differentialgleichungen der Form

$$D_n(w) = w^{(n)}(z) + \sum_{i=o}^{n-1} \sigma_i(z) w^{(1)}(z) = 0$$

mit $w^{(i)}(0) = a_i$ $(0 \leq i \leq n-1)$, σ_i regulär, beschränkt, auf ihre Lösbarkeit durch im Flächenmittel p-wertige Funktionen untersucht (i.Z.: $w \in A_p$).

Gezeigt wird: Sei $n \in N$, $0 < p < n$. Zu jedem solchen $p \in R$ gibt es eine Differentialgleichung $D_n(w) = 0$, welche keine Lösungen aus A_p besitzt.

D. WRASE: Zum Halbadditivitätsproblem der analytischen Kapazität

Mit einer von Vitushkin entwickelten Methode gelingt es, Probleme der qualitativen rationalen Approximation in der komplexen Ebene mit Hilfe der analytischen Kapazität zu lösen. Daher ist es von einigem Interesse, die analytische Kapazität γ als Mengenfunktion zu untersuchen. Insbesondere ist die Lösung des Halbadditivitätsproblems vom approximationstheoretischen Standpunkt wünschenswert.

Satz: Für beliebige disjunkte kompakte Teilmengen E_1, E_2 der komplexen Ebene gilt

$$\gamma(E_1 \cup E_2) \leq [\gamma(E_1)^{1/2} + \gamma(E_2)^{1/2}]^2.$$

E. Mues (Karlsruhe)