MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 10/1976

Optimierung bei graphentheoretischen und ganzzahligen Problemen

22. 2. bis 28. 2. 1976

Leitung : Prof. Dr. L. Collatz (Hamburg)
Prof. Dr. G. Meinardus (Siegen)
Prof. Dr. W. Wetterling (Enschede)

Auf dieser Tagung über graphentheoretische und ganzzahlige Optimierung wurde sowohl die Anwendungsbezogenheit dieses Gebietes als auch seine Verbindungen mit einer Reihe anderer mathematischer Disziplinen deutlich.

Es konnte über Fortschritte in der praktischen Erprobung und theoretischen Begründung von numerischen Verfahren sowie in ihrer Anwendung auf praktische Problemstellungen berichtet werden. Es blieben aber, insbesondere bei den sehr komplexen Problemen aus den Anwendungsgebieten noch viele Fragen offen.

Eine Reihe von Vorträgen zeigte Zusammenhänge zwischen praxisbezogenen Problemen, graphentheoretischen Methoden und anderen mathematischen Teilgebieten auf.

Die Tagungsteilnehmer danken besonders dem Leiter des Math. Forschungsinstituts Oberwolfach, Herrn Prof. Dr. M. B a r n e r , seinen Mitarbeitern, und dem Personal des Instituts für die ausgezeichnete Betreuung.

Teilnehmer

Albrecht, J., Clausthal-Zellerfeld
Baas, S.M., Enschede
Benders, J.F. Eindhoven
Berge, C., Paris
Berns, M., Siegen
Bohl, E., Münster
Bredendiek, E., Hamburg
Burkard, R., Köln
Collatz, L., Hamburg
Dejon, B., Erlangen
Domschke, W., Hamburg
Ebert, U., Münster
Fleischmann, B., Hamburg
Geiger, C., Hamburg
Gragert, P.K.H., Enschede
Håjek, O., Cleveland
Halin, R., Hamburg
Hammer, P.L., Waterloo
Henn, R., Karlsruhe
Heyden, W.P.A. van der, Delft
Jongen, T. Th., Enschede
Knödel, W., Stuttgart
Köhler, E., Hamburg
Korte, B., Bonn
Krabs, W., Darmstadt
Krafft, O., Aachen
Krarup, J., Kopenhagen
Krisch, H., Hamburg
Kubik, K., Rijswijk
Liebe, B., Siegen
Maurer, K.H., Giessen
Merz, G., Kassel
Minty, G., Bloomington
Neumann, K., Karlsruhe
Opfer, G., Hamburg
Ortlieb, C.P. Hamburg
Overbeck-Larisch, M., Frankfurt
Rauch, E., Siegen
Redheffer, R., Karlsruhe
Schumacher, K., Tübingen
Taubert, K., Hamburg
Wetterling, W., Enschede

Vortragsauszüge

C. BERGE

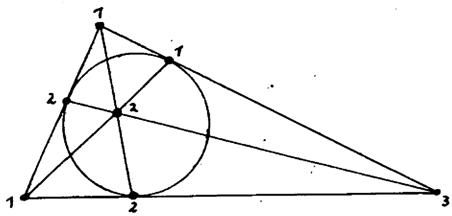
Colorings for Hypergraphs

To extend the concept of "chromatic number of a graph G" to a hypergraph H , several definitions have been proposed.

1. A weak k-coloring of $H = (E_1, E_2, \ldots, E_m)$ is a coloring of the vertices of H with k colors so that no monochromatic edge occurs : i.e. a partition $(S_1, S_2, \ldots S_k)$ of the vertex-set of H so that

$$|E_i > 1| \implies E_i \not\subset S_j \quad (j = 1,2,\ldots,m)$$

(For instance, if H is defined by the lines of a Finite projectiv plane with 7 points, we can color the points with colors 1,2,3 , so that the "weak" chromatic number is equal to 3)



2. The strong k-coloring of H is a coloring of the vertices with k colors so that in a same edge, all the vertices have different colors; i.e.

$$|E_i \cap S_j| \leq 1 , \quad (i,j)$$

Example: The "strong" chromatic number of the finite projection plane with seven points is 7.

3. An equitable k-coloring of H is a partition of the vertex-set into k classes $S_1, S_2, \ldots, S_k$ so that

$$[\, |E_i| / k \,] \leq |E_i \cap S_j| \leq [\, |E_i| / k \,]^*$$

To extend the concept of bicolorable, several concepts have been proposed :

1. Hypergraph with no odd cycles.

2. Unimodular hypergraphs. H is said to be unimodular if the incidence matrix of H has the unimodular property : every square subdeterminant has value 0, + 1 or - 1, (introduced by A. Hofman, Kruskal and others for linear programming in integers). Theorem of Ghouila-Houri : H is unimodular iff for every subset A of vertices, the subhypergraph induced by A has an equitable bicoloring

3. Balanced Hypergraphs - H is said to be balanced if every odd cycle has an edge containing three vertices of the sequence (introduced by B. to extend the class of linear programming problems having solution in positive integers), Theorem 1. H is balanced iff for every subset A , the subhypergraph H_A has a weak bicoloring - Theorem 2. (Las Vergnas, Berge). H is balanced iff every subhypergraph has the König Property.

4. Normal Hypergraphs - H is said to be normal if every partial hypergraph of H has the Edge-coloring Property- (introduced by L. Lovász to prove the weak perfect graph conjecture) Theorem of Lovász : H is normal iff every partial hypergraph of H has the König Property.

5. Quasi-balanced Hypergraphs. H is said to be quasi-normal if in every odd cycle, there are three edges with a non-empty intersection (introduced by Las-Vergnas and Fournier to prove a conjection of Lovász). Theorem of Las Vergnas and Fournier : Every quasi-balanced hypergraph has a weak bicoloring.

Each of these classes of hypergraphs is more general than the preceeding one, and can be used for different kinds of optimizations problems.

R. BURKHARD

Netzwerkflüsse mit allgemeinen Kosten

Es wird gezeigt, daß man durch einen algebraischen Ansatz für die Zielfunktion von Transportproblemen und Flußproblemen in Netzwerken erreichen kann, daß sowohl Summenprobleme als auch Engpaßprobleme als Spezialfälle eines allgemein formulierten Problems auftreten. Zur Lösung dieses allgemeinen Problems werden zulässige Transformationen herangezogen. Für Flußprobleme wird eine Charakterisierung der zulässigen Transformationen angegeben. Mit Hilfe der zulässigen Transformationen läßt sich ein Algorithmus angeben, der das allgemeine Transportproblem und Problem des maximalen Flusses mit (allgemeinen) minimalen Kosten löst. Durch Spezialisierung erhält man auf diese Weise z.B. neue Algorithmen für das klassische Transportproblem und das Zeittransportproblem.

L. COLLATZ

Graphen bei Ornamenten und Verzweigungsdiagrammen

I. Ornamente. Bänder und Streifenornamente als zusammenhängende, einfach periodische, planare, einfache Graphen. Lochlose Bänder und Lochbänder. Typen homogener Bänder. Streifenornamente als Ebenenteilungen. Zu Bändern äquivalente Ringornamente. Rosetten als Grenzfälle von Ringornamenten. Kreisornamente.

Tableaus für alle diese Ornamente, Werteverteilungen, Eigenwerte, Index, Minimalgleichungen, Ordnungen und Methoden zur Unterscheidung topologisch verschiedener Ornamente. Anwendungen bei Planungsproblemen.

II. Verzweigungsdiagramme. Auftreten bei Differential- und Integralgleichungen, Problemen aus Geometrie, Algebra und Naturwissenschaften (z.B. nichtlineare Diffusionsprobleme), Bäume, Geflechte und Gespinste.

B. DEJON

Innere und äußere Algorithmen zur Bestimmung r kürzester Wege unter beliebigen Nebenbedingungen

Das Problem besteht darin, in einer beliebig vorgegebenen Teilmenge P^o der Menge P aller Wege von einem festen Knoten α zu einem festen Knoten β ein r-Minimum $(P_1, P_2, \ldots P_r)$ zu finden ($P_1 \leq P_2 \leq \ldots \leq P_r \leq P$, wobei P irgendein Weg aus $P^o \setminus \{P_1, \ldots, P_r\}$ ist). Eine zentrale Rolle spielt der von Hoffman/Pavley (1959) im Spezialfall $P^o = P$ eingeführte Begriff einer Umleitung (deviation). Es wird gezeigt, daß der Begriff sinnvollerweise auf den allgemeinen Fall übertragbar ist. Mit Hilfe des Umleitungsbegriffes werden innere und äußere Algorithmen definiert. Beispiele innerer Algorithmen sind das von Hoffman/Pavley für den Fall $P^o = P$ und das von Yen (1971) für den Fall angegebene Verfahren, wo P^o aus allen schleifenfreien Wegen in P besteht. Clarke/Krikorian/Rausen haben 1963 ein äußeres Verfahren angegeben, und zwar für den Fall, daß P^o die Menge aller Wege mit schleifenfreiem Sporn ist.
Für den - bislang nicht gelungenen - Vergleich von inneren und äußeren Verfahren ist der Begriff des Grades eines Weges zentral. Der Gradbegriff wurde von Clarke/Krikorian/Rausen in ihrer Arbeit von 1963 in dem dortigen speziellen Rahmen eingeführt. In der vorliegenden Arbeit wird ein - wie man zeigen kann - im Spezialfall äquivalenter Gradbegriff eingeführt, nun aber unabhängig von den gerade verwendeten Nebenbedingungen.

U. EBERT

Optimale Auslegung von Bestrahlungsplänen

Es werden zwei Modelle für die Bestrahlungsplanung in der Strahlentherapie betrachtet. Ziel ist die Zerstörung von bösartigem Gewebe bei möglichst großer Schonung der gesunden Körperpartien. Einmal ist nach der Geschwindigkeit gefragt, mit der die Strahlenquelle vorgegebene Bahnen bei der Bestrahlung abfährt. Es erweist sich als ein lineares Optimierungsproblem. Bei dem anderen Modell sind in vorbestimmten räumlichen Bereichen jeweils eine Position für die Strahlenquelle, die jeweilige Bestrahlungszeit und die Form der Quelle zu bestimmen. Durch Diskretisierung ergibt sich ein gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsproblem. Bei der Formulierung kann es als ein lineares Problem mit einer zusätzlichen nichtlinearen Nebenbedingung dargestellt werden, das sich mit einem Branch-and Bound-Verfahren lösen läßt.

B. FLEISCHMANN

Optimierungsprobleme bei der Distribution von Fertigwaren

Für die Distribution von Fertigwaren sind die klassischen Transportmodelle wegen konkaver Transport- und Lagerhaltungskosten oft nicht anwendbar. Gesucht ist ein kostenminimaler Fluß auf einem Distributionsnetz (zyklenfreier gerichteter Graph) ohne Kapazitätsbeschränkungen bei konkaven Kosten, so daß die gegebene Nachfrage in den Senken gedeckt wird. Bekanntlich gibt es einen extremalen optimalen Fluß. Die übliche Lösung durch dynamische Optimierung kommt aber hier wegen der großen Anzahl (ca. 1000) Senken des Netzes nicht in Frage. Für eine spezielle, häufig vorkommende Form von Transportkosten wird ein einfaches Iterationsverfahren angegeben, das auf der Berechnung kürzester Wege von der Quelle zu den Senken beruht und das sich in der Anwendung bewährt hat. Die Konvergenz des Verfahrens ist aber nicht gesichert; man kann Fälle angeben, in denen das Verfahren zwar endlich ist, die optimale Lösung aber nicht erreicht. Es werden Modifizierungen des Verfahrens diskutiert, die zumindest die Endlichkeit garantieren.

O. HÁJEK

Numerical Control of Perturbation

This concerns two (related) applications of differential game theory. In a control system $\dot{x} = f(x,u,v)$ with perturbing term $v(t)$ and controls $u(t)$ one may interpret $v(t)$ as the unpredictable control action of a notional second player, with possibly opposed intent. If the resulting differential game can be 'solved' for player u (and, possibly, optimised in an appropriate sense, then, obviously, the original problem is also solved (suboptimally).

Second, in a nonlinear control problem $\dot{x} = f(x) + u$ one may write the equation as $\dot{x} = Ax + u + (f(x) - Ax)$, with 'suitably' chosen matrix A ; interpret the bracket as a second player control (unorthodox linearisation); and then solve the game. This was illustrated on the torque-controlled pendulum $\ddot{\theta} + \sin\theta = u$; the auxiliary game begins with $\ddot{\theta} + w^2\theta = u + (w^2\theta - \sin\theta)$ with judiciously chosen constant w. For some numerical results see O. Hájek, Differential Games (1975)

P. L. HAMMER

A Class of Matroid - Producing Graphs

A finite graph G is called threshold if a hyperplane separates the characteristic vectors of its stable (edgeless) sets from those of the others. V. Chvátal and P. L. Hammer proved that a graph is threshold if and only if there are no 4 distinct vertices v_1, v_2, v_3, v_4 with v_1 adjacent to v_2 but not to v_3, and v_4 adjacent to v_3 but not to v_2. A natural generalization of threshold graphs are the matrogenic graphs, i.e. those graphs for which the induced threshold subgraphs form the independence system of a matroid. Proposition 1. A graph is matrogenic if and only if it has no 5 distinct vertices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 such that v_1 is adjacent to v_2 and to v_3, but not to v_4, while v_5 is adjacent to v_4, but not to v_2 and not to v_3. Let N(x) be the set of vertices adjacent to a vertex x. Proposition 2. A graph is matrogenic if and only if its vertex-set can be partitioned into 3 disjoint sets A, B, C, such that: (1) A induces a complete graph, (2) B is stable, (3) C if non-empty induces either a pentagon, or a perfect matching, or the complement of a perfect matching, (4) for all $x,y \in B$, if neither $N(x) \subseteq N(y)$ nor $N(y) \subseteq N(x)$, then Card $[(N(x) \cup N(y)) \setminus (N(x) \cap N(y))] = 2$, (5) every $x \in C$ is adjacent to every vertex in A and to no vertex in B, (6) if x,y,z are 3 distinct elements of B, and $|N(x)| = |N(y)| = |N(z)|$, then $N(x) = N(y)$ implies $N(y) = N(z)$.

W.P.A. VAN DER HEYDEN

Some experiments with Steiner trees with non-linear costs.

A typical technical problem leading to a minimum cost network is the design of a communication or transportation network connecting several places. Usually certain costs are assigned to all connection lines. These costs could by either investment costs or operating costs or a combination of both.

The objective of the design is a network proving a minimal cost. If the cost is proportional to the length of an edge, the minimum cost network is identical with the minimum spanning tree on the given points. If it is possible to add new interconnecting points the problem of finding such a tree is usually referred as the problem of Steiner. We have assumed that the cost of an edge depends not only on the length of the edge, but also depends on a nonlinear function of the load on the edge. The load on an edge depends on the topology of the tree.
The first results of an investigation of this problem are demonstrated.

H. Th. JONGEN

Über die Geometrie endlichdimensionaler nicht-konvexer Optimierungsaufgaben

Topologisch wird untersucht, welche Strategien empfehlenswert sind bei der Suche nach mehreren lokalen Minima. Dazu werden Morse-Funktionen auf kompakten zusammenhängenden unberandeten Mannigfaltigkeiten betrachtet. Es wird gezeigt, daß für solche Optimierungsprobleme ein Symmetriesatz gilt bezüglich lokaler Maxima und Minima. Die Rolle kritischer Punkte vom Index λ wird näher betrachtet und es wird darauf hingewiesen, daß kritische Punkte vom Index 1 eine spezielle Rolle für die Optimierung spielen. Es stellt sich heraus, daß es zwei für die Numerik interessante Graphen gibt: den "0-1-0" Graphen mit Punkten vom Index 0 (lokalen Minima) und Index 1 als Ecken, und den "0-n-0" Graph mit den lokalen Minima und Maxima als Ecken. Diese Graphen sind (im allgemeinen) zusammenhängend.

Als Nebenprodukt wird ein Index 2 - Übergang mit Torsionseffekt betrachtet und insbesondere wird hingewiesen auf den Verband zwischen gewissen Unstetigkeitsmengen und die Untersuchung von kompakten, zusammenhängenden 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

E. KÖHLER

Vom tapferen Schneiderlein in der Versuchsplanung

Es werden einige Pläne aus der Versuchsplanung behandelt, die – scheinbar nicht verwandt - mit der gleichen Idee einer Lösung näher gebracht werden können. Die angesprochenen Probleme liegen in abstrakter Form in

1.) der Theorie der (0,1)- Matrizen
2.) " " Steinersysteme
3.) der Unterhaltungsmathematik.

B. KORTE

Eckenadjazenz in (0,1) Polyedern

Kombinatonische Optimierungsprobleme lassen sich durch Inzidenzvektoren bezgl. einer wohldefinierten Grundmenge beschreiben. Häufig ist diese Grundmenge die Ecken- oder Kantenmenge eines Graphen bzw. Hypergraphen, die Menge der unabhängigen Elemente eines beliebigen Unabhängigkeitssystems oder eines Matroids. Die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren ist dann ein (0-1) Polyeder.

Im einzelnen werden Sätze über Eckenadjazenz im Matroid-, Matroid-Intersection, Matching-, Stable-Set, Linear Ordering-, Acyclic Subgraph - und Unabhängigkeitssystem - Polyeder aufgestellt. Die notwendigen und hinreichenden Charakterisierungen laufen im wesentlichen darauf hinaus, daß ein (für das entsprechende Problem definierter) Teilgraph des Line-Graphen zusammenhängend ist bzw. als Verallgemeinerung auf eine Färbungseigenschaft bei Hypergraphen.

W. KRABS

Über ein geschlossen lösbares quadratisches Optimierungsproblem

Betrachtet wird das Problem, zwei vorgegebene endliche Familien von jeweils gleich vielen verschiedenen Punkten in der Ebene durch eine Translation und Drehung der Ebene einander möglichst nahezubringen.

Verwendet man als Abstandskriterium die Quadratsumme der Euklidischen Abstände gleichindizierter Punkte der beiden Familien, so hat man eine quadratische Funktion mit vier Variablen unter einer quadratischen Nebenbedingung zum Minimum zu machen. Für dieses Problem läßt sich in expliziter Form eine Lösung angeben.

O. KRAFFT

Ein ganzzahliges Optimierungsproblem in der Versuchsplanung

Sucht man in der statistischen Versuchsplanung nach Plänen, die beim Problem der Elimierung zweifacher Heterogenitäten die Determinante der Kovarianzmatrix gewisser kleinster Quadratschätzungen minimieren, so lassen sich beste Lösungen angeben, falls man die Spur der dem Plan zugeordneten C-Matrix maximieren kann. Das führt auf zwei nicht-lineare ganzzahlige Optimierungsaufgaben. Unter recht allgemeinen Teilbarkeitsbedingungen lassen sich deren Lösungen angeben; dies gestattet, die von KIEFER gefundenen hinreichenden Bedingungen für D-Optimalität als notwendig nachzuweisen. Beiläufig wird auf das Problem, solche Pläne, für die die Determinante nicht verschwindet, durch zusammenhängende Graphen zu charakterisieren, hingewiesen.

J. KRARUP

Plant Location, Set Covering and Economic Lot Size

For the simple (uncapicitated) plant location problem for which the coefficient matrix possesses certain properties, we devise a polynomially bounded algorithm by means of which an optimal solution can be derived after a single pass.

After having proved the validity of this O(mn)-algorithm, we present an even simpler version, designed for similarly structured set covering problems.

With reference to a theorem on lower bounds proved by exploiting the concept of duality in LP, we show that a specific LP-problem is solved simultaneously with the structured plant location problem. The most significant result of this observation is that the entire arsenal of post-optimal analysis of LP is immediately at hand.

As an example of the algorithms application, we discuss an all-integer formulation of the well-known economic lot size problem which is shown to be equivalent to a plant location problem of that class for which the algorithm works.

Finally, some suggestions for future research including some comments as to structured matrices in general conclude the paper.

K. KUBIK

Problems in Computer Network Optimization

Various design problems in computer communications networks are defined and investigated. The most significant of them is:

Find the traffic flows and the channel capacities in the communication network, which minimize the cost given the maximum admissble delay of menages.

This particular problem is a nonlinear nonconcave programming problem. For these problems, existing solutions are quoted; no efficient solution algorithms are sofar known to the auther.

G. MINTY

Applications of Sperner's Lemma to the Theory of Inequalities

With Sperner's Lemma we prove the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz Lemma, which is then employed in the form: for $\Sigma\lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant o$, ϕ_i lower-semi-continuous functions,

$$\text{if } \forall_{\vec{\lambda}} \quad \Sigma\lambda_i \; \phi_i(\vec{\lambda}) \leqslant o$$

$$\text{then } \exists_{\vec{\lambda}} \forall_i \quad \phi_i(\vec{\lambda}) \leqslant o$$

Applications are made to various extension-problems related to Kirszbraun's theorem, extension of Hölder-continuous functions, etc. The purpose is the development of a method for proving existence of a solution of a system of inequalities.

K. NEUMANN

Optimale Steuerung bei Entscheidungsnetzplänen

Es werden Entscheidungsnetzpläne betrachtet, bei denen jedem Pfeil bzw. Vorgang neben der Dauer (eine nichtnegative Zufallsgröße mit gegebener Verteilungsfunktion) noch die (bedingte) Ausführungswahrscheinlichkeit zugeordnet ist und sechs verschiedene Typen von Knoten (den Projektereignissen entsprechend) auftreten. Knoten mit Und- oder Incl.-Oder-Eingangsseite sowie Knoten mit deterministischen Ausgang dürfen dabei nur innerhalb sog. Grundelemente vorkommen, die durch Strukturen ersetzt werden können, die nur STEO-Knoten (stochastischer

Ausgang, Excl.-Oder-Eingang) enthalten. Zunächst wird eine Zeitplanung durchgeführt, in der die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die einzelnen Zielergebnisse des Projekts eintreten, sowie die Verteilung der Projektdauer unter der Bedingung, daß ein bestimmtes Zielergebnis eingetreten ist, ermittelt werden. Für die anschließende Kostenplanung werden zunächst die möglichen Politiken mit zeitabhängigen Ausführungswahrscheinlichkeiten von Vorgängen identifiziert. Die Minimierung der erwarteten Projektkosten führt dann auf ein Kontrollproblem mit einfachen und Doppelintegralen im Kostenfunktional und Integralgleichungen als Nebenbedingungen, das z.B. mit Gradientenverfahren für Hilberträume gelöst werden kann.

R. REDHEFFER

Ein elementar lösbares Optimierungsproblem

Man bildet folgende nxn Matrix M_n, die eine Incidenzmatrix für Vielfache bzw. Teiler darstellt:

$$\begin{array}{lc}
\text{Erste Reihe} \rightarrow & \begin{matrix} 1 & o & o & o & o & o & \dots \\ 1 & 1 & o & o & o & o & \dots \\ 1 & o & 1 & o & o & o & \dots \\ 1 & 1 & o & 1 & o & o & \dots \\ 1 & o & o & o & 1 & o & \dots \\ 1 & 1 & 1 & o & o & 1 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . \end{matrix}
\end{array} \quad \leftarrow \text{erste Reihe}$$

Es wird nun die erste Reihe durch $z_1\ z_2\ z_3\ \dots\ z_n$ ersetzt, und man bildet die Determinante $D_n(z)$ der darausentstehenden Matrix $M_n(z)$, Gesucht ist max $D_n(t)$ unter der Nebenbedingung $z_j=-1$, o oder 1. (Oder - was auf dasselbe hinausläuft - unter der Bedingung $z_j \varepsilon C$, $|z_j| \leq 1$). Lösung: Es ist

$$\max_z D_n(z) = \text{Anzahl der quadratfreien Zahlen } j \text{ auf dem Intervall } 1 \leq j \leq n.$$

Das folgt aus der Formel $D_n(z)=\mu(1)z_1 + \mu(2)z_2 + \dots + \mu(n)z_n$, die man aus einer einfachen Überlegung erhält. Insbesondere: Wird $z_j=1$ gesetzt, also die erste Reihe durch

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1$$

ersetzt, so gilt die Riemannsche Vermutung dann und nur dann, wenn die darausentstehende Determinante $D_n(1)$ der Bedingung $D_n(1) \leq O(n^{1/2+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > o$ genügt.

P. Gragert (Enschede)