MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 13 /1976

Mathematische Methoden in der Geodäsie

21.3. bis 27.3.1976

Unter der Leitung der Professoren E. Grafarend (München) und R. Leis (Bonn) fand in diesem Jahr erstmalig eine Tagung über mathematische Methoden der Geodäsie in Oberwolfach statt. Hauptziel war es, Kontakte zwischen Mathematikern und Anwendern herzustellen und zu fördern; daher setzte sich der Teilnehmerkreis etwa je zur Hälfte aus Mathematikern und Geodäten zusammen.

An fünf Vormittagen und drei Nachmittagen wurden 21 teils mathematische, teils geodätische Vorträge gehalten über Themen aus der globalen physikalischen Geodäsie, der Netzwerkanalyse, über Behandlung von Randwertaufgaben u.a..

Die Vorträge und insbesondere viele Diskussionen im kleinen Kreis brachten sowohl für Mathematiker wie Geodäten eine Fülle von Anregungen, und es ist zu hoffen, daß mit dieser Tagung wenigstens ein kleiner Schritt zur Überbrückung der Kluft zwischen der Mathematik und ihren Anwendungsgebieten gelungen ist.

<u>Teilnehmer</u>

H.D. Alber, Darmstadt

R. Böck, Darmstadt

K. Borre, Charlottenlund (Dänemark)

W. Bosch, Bonn

C. Boucher, Saint-Mande (Frankreich)

B. Brosowski, Frankfurt

H.M. Dufour, Saint-Mande (Frankreich)

E. Ecker, Berlin

B. Eitschberger, München

K. Graf Finck von Finckenstein, Darmstadt

R. Firl, Darmstadt

W. Freeden, Aachen

E Grafarend, München

E.Groten, Darmstadt

K.H. Hauer, Dortmund

A. Hein, München

H. Heister, München

G. C. Hsiao, Darmstadt

H. Kahmen, Karlsruhe

H. Kersten, Aachen

H. Kielhöfer, Stuttgart

E. L. Koh, Darmstadt

T. Krarup, Charlottenlund (Dänemark)

R. Kreß, Göttingen

R. Leis, Bonn

I. S. Louhivaara, Jyväskylä (Finnland)

E. Martensen, Karlsruhe

P. Meissl, Graz (Österreich)

E. Meister, Darmstadt

C. Müller, Aachen

H. N. Mülthei, Mainz

H. Neunzert, Kaiserslautern

H. Pelzer, Hannover

R. Picard, Bonn

R. Rautmann, Paderborn

C. Ruland, Bonn

B. Schaffrin, Bonn

M. Schneider, München

K. P. Schwarz, Graz (Österreich)

H. Sohr, Tübingen

H. Teschke, Aachen

W. Törnig, Darmstadt

C. C. Tscherning, Charlottenlund (Dänemark)

H. L. de Vries, Göttingen

N. Weck, Darmstadt

W. Wendland, Darmstadt

W. Wickel, Bonn

K. J. Witsch, Bonn

Vortragsauszüge

ALBER, H.D.: Das Spektrum des Laplaceoperators in unbeschränkten Gebieten bei verschiedenen Randbedingungen

Im Vortrag möchte ich mich mit Randwertproblemen für die Schwingungsgleichung $\Delta u + ku = f$ in unbeschränkten Gebieten befassen, und insbesondere das Spektrum des Laplaceoperators erörtern.

Die untersuchten Gebiete bestehen aus einer beschränkten Menge, an die unbeschränkte Röhren ("Wellenleiter") angesetzt sind.

Für verschiedene Formen dieser Gebiete und für verschiedene Randbedingungen werde ich Sätze über die Lage des Spektrums und über die Eigenwerte des Laplaceoperators angeben.

DUFOUR, H.M.: Usage des fonctions orthogonales dans la sphère

It is possible to define orthogonal functions inside the sphere, which can give an approximation (in euclidian norm) of any bounded variation function (potential, density of masses).

From the coefficients of the density, it is possible to derive the formulation of inside and outside earth potential. It is namely shown that the external potential is exactly produced by the harmonic subset of the internal density.

EITSCHBERGER, B.: Sensitivität der zweiachsigen Referenzfigur der Erde gegenüber zeitlichen Geoidschwankungen

Die Mongeformen der Referenzflächen und des Geoids werden erläutert. Bei bekannten Parametern des Geoids, hier die Potentialkoeffizienten, läßt sich die Lage, Größe und Form des Referenzellipsoids bestimmen. Dabei auftretende Konvergenzprobleme werden aufgedeckt. Wesentlicher Inhalt ist die Untersuchung des Einflusses von zeitlichen Schwankungen der niedrigen Potentialkoeffizienten, wie sie kürzlich berechnet wurden, auf die Referenzfigur.

FIRL, R.: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer nichtlinearen Integrodifferentialgleichung mit Kernen vom Faltungstyp

Der Vortrag beschäftigt sich mit der nichtlinearen Integrodifferentialgleichung

$$D_t u(t)+\lambda\int_0^\infty b(s)D_t u(t-s)ds+\gamma f(t,u(t))+\int_0^\infty a(s)f(t-s,u(t-s))ds = s(t)$$

Es wird ein Lösungsbegriff eingeführt und anschließend die Existenz von Lösungen mit Hilfe eines Satzes von Browder (Ann. of Math., Bd 80 + 82, S. 485-523 bzw. S. 51-87) gezeigt. Die Untersuchung dieser Integrodifferentialgleichung geht auf eine Arbeit von Grasmüller zurück (erschienen in Methoden u. Verf. der Math.Physik, Bd. 10), in der eine lineare Wärmeleitungsgleichung für Materialien mit schwindendem Gedächtnis betrachtet wird. Die obige Gleichung ist eine nichtlineare Verallgemeinerung dieser Wärmeleitungsgleichung.

GROTEN, E.: Zum Problem optimaler digitaler Darstellung

An Hand von Höhen-, Schwere - und Geoidhöhendaten sowie entsprechenden Differenzen werden Probleme regionaler Autokovarianzfunktionen sowie Prädiktion beim Übergang Kontinuum $\leftrightarrows$ diskrete (endliche) Datenmenge diskutiert. Die Möglichkeiten und Bedeutung von Trendelimination bei isotropen stationären Prozessen werden im Zusammenhang mit Anisotropie, Instationarität etc. geodätischer Datenmengen behandelt. Stützpunktdichte und Glättungseffekte werden außerdem betrachtet. Mathematische Optimalitätskriterien wie minimale Varianz, maximale Wahrscheinlichkeit sowie Erwartungstreue etc. werden für die ingenieurmäßige Anwendung relativiert.

HAUER, K. H.: Maclaurinsche Ellipsoide und Kontinuumsmechanik

Mittels der Virialmethode konnte von Chandrazekhar die Herleitung einer im Jahre 1742 von Maclaurin entdeckten und nach ihm benannten Klasse von Gleichgewichtsfiguren rotierender idealer Flüssigkeiten auf einfache Weise durchgeführt werden. Diese Methode kann auch zur Untersuchung der Gleichgewichtsfiguren anderer Kontinua herangezogen werden.

HSIAO, G.C.: A finite element method for a class of singular integral equations of the first kind (zus. mit W. Wendland)

This paper discusses a finite element approximation for a class of singular integral equations of the first kind. These integral equations are deduced from Dirichlet problems for strongly elliptic differential equations in two independent variables. By a variation of technique due to Aubin, it is shown that the Galerkin method with finite elements as trial functions leads to an optimal rate of convergence.

KAHMEN, H.: Zur Abschätzung der physikalischen Korrelationen in elektronisch gemessenen Streckennetzen

Bei der elektronischen Entfernungsmessung sind aufgrund des nur unsicher erfaßbaren Brechungsindexes des Ausbreitungsmediums der Trägerwellen Wiederholungsmessungen physikalisch korreliert. Physikalische Modellstudien zeigen, daß das Spektrum der Streckenfluktuationen zwei Maxima aufweist, der Prozeß als ein Zwei-Komponenten-Prozeß definiert werden kann und sich das Moment zweiter Ordnung als Funktion atmosphärischer Parameter darstellen läßt. Es wird nachgewiesen, daß die Korrelationstheorie der Zufallsfunktionen nicht ausreicht, den Prozeß zu beschreiben.

KOH, E. L.: An Operational Calculus for a Bessel Operator and Applications

An operational calculus for the operator $B_\mu = t^{-\mu}Dt^{\mu+1}D$ $(-1 < \mu < \infty)$ is developed. A convolution process is proposed which reduces to Ditkin's convolution when $\mu = 0$. The construction is through the field extension of a commutative ring without zero divisors. The relationship between the calculus and those of Mikusinski and Ditkin are shown. Some applications are given.

KRARUP, T.: An Elasticity Theory for Geodetic Networks

There is presented a continuous analogue to the least squares adjustment of geodetic networks. It is formally expressed as a variational problem which has some similarity with that of classical elasticity. If the search for the solution is restricted to a certain finite dimensional space then we find the classical adjustment solution; if we look for it in the Sobolev space H^1, then the problem is described by an elliptic system of partial differential equations with a Neumann boundary condition, and so the original geodetic problem may be looked upon as a finite element approximation to this boundary value problem.

MEISSL, P.: Mathematische Analyse großer geodätischer Netze mit Hilfe diskreter Modelle

Die Ausgleichung der Messungen an einem geodätischen Triangulationsnetz führt zu Regressionsproblemen, deren Normalgleichungen als Differenzengleichungen für die gesuchten Koordinateninkremente gedeutet werden können. Die Inverse der Normalgleichungsmatrix, d.h. die Green'sche Funktion der Differenzengleichungen liefert wichtige Kriterien zur Beurteilung der geometrischen Stärke eines Netzes. Es wird überblicksweise über Untersuchungen einiger geodätisch relevanter Differenzengleichungssysteme berichtet. Dabei werden zur Abrundung der Theorie auch Netze mit abzählbar unendlich vielen Punkten zugelassen. Für gewisse idealisierte geodätische Netze können analytische Ausdrücke für die Green'sche Funktion angegeben werden. Die gewonnenen Aufschlüsse über die geometrische Stärke solcher Netze können mit gewissen Einschränkungen auch auf unregelmäßige Netze übertragen werden. Es werden auch Einblicke in die Akkumulation von Rundungsfehlern während der direkten Auflösung der Normalgleichungen gewonnen.

MÜLLER, C.: Über Sätze vom Runge-Typ in der Theorie elliptischer Differentialgleichungen

Am Beispiel der Lösungen der Differentialgleichung $\nabla\wedge\nabla\wedge v = v$ im Äußeren G_e eines endlichen, von einer glatten Fläche berandeten Gebietes G werden zwei Approximationssätze bewiesen, die als Verallgemeinerung des Rungeschen Approximationssatzes der klassischen Funktionentheorie gelten können

<u>Satz 1</u>: Es sei v stetig in $G_e + F$, genüge der Differentialgleichung $\nabla\wedge\nabla\wedge v = v$ und den Ausstrahlungsbedingungen der Theorie elektromagnetischer Schwingungsfelder, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Vektorfeld

$$v^* = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=-k}^{+k} (C_{kj}W_{kj} + C'_{kj}W'_{kj})$$

so, daß in $G_e + F$

$$|v - v^*| \leq \varepsilon$$

gilt. Dabei sind W_{kj} und W'_{kj} Vektorfelder, die durch

$$W_{kj} = X\wedge\nabla H_k S_{kj};\ W'_{kj} = \nabla\wedge W_{kj}$$

mit der Hankefunktion H_k der Ordnung k im $\mathbb{R}^3$ und den $(2k + 1)$ Kugelfunktionen S_{kj} der Ordnung k gebildet werden. $(0 \in G)$.

<u>Satz 2</u>: Es erfülle v die Voraussetzungen von Satz 1. Dann kann v in $G_e + F$ gleichmäßig durch Linearkombinationen der Form

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} d_k^{(j)} (x, y_k)$$

mit

$$e^{(j)}(x, y_k) = e^{(j)} \wedge \nabla_x \frac{e^{i|x-y_k|}}{|x-y_k|}$$

approximiert werden, wenn die Punkte y_k in einem kompakten Teil von G dicht liegen. Dabei stellen die $e^{(j)}(x, y_k)$ die Felder der durch Dipole in Richtung der Einheitsvektoren $e^{(j)}$ im Punkte y_k erzeugten Schwingungsfelder dar.

PELZER, H.: <u>Genauigkeit und Zuverlässigkeit geodätischer Netze</u>

Bei der Anlage eines geodätischen Netzes ist in der Regel eine Vielzahl von Varianten möglich, unter denen eine optimale auszuwählen ist. Dies erfordert die Festlegung von Beurteilungskriterien, wobei unterschiedliche Zielvorstellungen möglich sind.

Hinsichtlich der Genauigkeit eines Netzes erweisen sich die Eigenwerte λ_i der Kovarianzmatrix Q der Punktkoordinaten als geeignetes Kriterium. Für die Varianz σ^2 beliebiger Funktionen der Koordinaten gilt die Ungleichung

$$\lambda_{min} \leq \frac{\sigma^2}{c} \leq \lambda_{max} \tag{1}$$

mit gegebener Konstante c. Durch Verkleinerung des größten Eigenwertes wird eine Steigerung der Genauigkeit erreicht; die Forderung

$$\lambda_{max}/\lambda_{min} - 1 \overset{!}{=} 0 \tag{2}$$

führt zu weitgehend homogen und isotropen Netzen. Die Anwendung der Kriterien auf lokale Teilnetze ist möglich und führt zu engeren Grenzen in (1).

Die Zuverlässigkeit eines Netzes kann nach seiner Empfindlichkeit gegenüber groben Fehlern beurteilt werden. Ist ε_i ein grober Fehler, v_i die zugehörige Verbesserung durch eine Regressionsrechnung, so gilt die Forderung

$$k_i = \frac{\varepsilon_i}{-v_i} - 1 = \frac{\bar{\sigma}_i^2}{\sigma_i^2 - \bar{\sigma}_i^2} \overset{!}{=} \min, \quad i = 1,2 \ldots n.$$

σ_i^2 : Varianz der Beobachtung l_i a priori,

$\bar{\sigma}_i^2$: Varianz der Beobachtung l_i a posteriori.

PICARD, R.: <u>Ein Randwertproblem für die zeitunabhängigen Maxwellschen Gleichungen mit den Randbedingungen $n \cdot \varepsilon E = n \cdot \mu H = 0$</u>

Im Zusammenhang mit verschiedenen Formulierungen des Huygenschen Prinzips in der elektromagnetischen Theorie treten Randwertprobleme auf. Eine spezielle Variante führt auf das Randwertproblem

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} E - i\omega\mu H &= J \\ \operatorname{rot} H + i\omega\varepsilon E &= K \end{aligned}\right\} \text{ in einem beschränkten Gebiet } G$$

$$\left.\begin{aligned} n \cdot \varepsilon E &= 0 \\ n \cdot \mu H &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ auf den Rand } \partial G.$$

Bei Gebieten mit höherem als einfachen Zusammenhang müssen noch Nebenbedingungen gestellt werden um Eindeutigkeit im gedämpften Fall zu erzielen. Das Problem wird mit Hilbertraummethoden angegangen. Es kann die Fredholmsche Alternative gezeigt werden. Im gedämpften Fall erhält man auch in der schwachen Formulierung Eindeutigkeit.

RAUTMANN, R.: Über Galerkinverfahren für einige Grundgleichungen der Physik

Galerkinverfahren bieten, wie am Beispiel der Vlasovschen Anfangswertaufgabe mit Mittelung ausgeführt wird, einen einfachen Weg zu (schwachen) Lösungen der Anfangswertaufgaben für Gleichungen vom Typ der Focker-Planck-Gleichung (mit Mittelung), der Navier-Stokesschen sowie der Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen (mit Lerayscher Mittelung). Bei der Vlasovschen bzw. der Eulerschen Gleichung (als Grenzfall der Focker-Planck bzw. der Navier-Stokesschen Gleichung) führt allerdings das ursprünglich von E. Hopf 1951 verwandte Galerkin-Verfahren nicht zum Ziel, da sich hier keine globalen Schranken für die schwachen räumlichen ersten partiellen Ableitungen der Lösungen ergeben. Die benötigte Konvergenz des nichtlinearen Terms der betr. Gleichung folgt, wie gezeigt wird, bereits aus der schwachen Konvergenz der Näherungslösungen mit Hilfe eines Kompaktheitssatzes. Dabei wird die in dem nichtlinearen Term vorgenommene Mittelung wesentlich benutzt.

RULAND, C.: Ein Verfahren zur Berechnung der Lösung des Dirichletschen Außenraumproblems zur Helmholtzschen Schwingungsgleichung bei nicht glatten Rändern

Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ ein Außengebiet G (= Gebiet mit beschränktem Komplement) mit stückweise glattem Rand, wobei Spitzen ausgeschlossen werden. Gesucht ist eine komplexwertige Funktion u, die in G die DGL $\Delta u + k^2 u = 0$ ($\mathrm{Im}\, k \geq 0$) erfüllt, einer Ausstrahlungsbedingung genügt und auf dem Rand vorgegebene stetige Werte stetig annimmt. Das Problem ist eindeutig gestellt. Zum Existenzbeweis benutzen wir die Integralgleichungsmethode. Der Integraloperator läßt sich so ergänzen, daß er den Raum der stetigen Funktionen in sich abbildet. Er ist nicht vollstetig. Dennoch kann für die Integralgleichung die Gültigkeit der Fredholmschen Alternative nachgewiesen werden; der Eindeutigkeitsfall liegt vor. Die Darstellungsformel liefert die Lösung. Zur numerischen Berechnung wird die exakte Integralgleichung in einem n-dimensionalen Unterraum approximiert und die approximierende Lösung in die Darstellungsformel eingesetzt.

SOHR, H.: Über das asymptotische Verhalten zeitlich veränderlicher Vorgänge

Ein zeitlich veränderlicher Vorgang wird durch eine Funktio- $\phi : t \to \phi(t)$ beschrieben, die auf der Zeitachse definiert ist und deren Werte in einem Hiltertraum H liegen; ϕ genügt einer Evolutionsgleichung $\dot{\phi}(t) + A(t)\phi(t) = f(t)$ mit linearen Operatoren A(t) in H. In einem geeignet gewählten Hilbertraum H-wertiger Funktionen erhält man dann eine Operatorgleichung $(\frac{d}{dt} + A)\phi = f$. Der gesuchte inverse Operator $(\frac{d}{dt} + A)^{-1}$ wird erhalten, indem $\frac{d}{dt}$ als "Störung" von A betrachtet wird. Hierzu ist es erforderlich, das bekannte Störungskriterium von Rellich-Kato so zu erweitern, daß auch nicht relativ beschränkte Störungen einbezogen werden können. Als Ergebnis erhält man neben der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung ϕ auch Aussagen über die Existenz des Limes $\phi(\infty) := \lim_{t\to\infty} \phi(t)$ und darüber, wie $\phi(t)$ in $\phi(\infty)$ einmündet (Abklingaussagen für $||\phi(t) - \phi(\infty)||$).

TSCHERNING, C.C.: Choice of Norm in (least Squares) Collocation

Abstract: A global or local approximation to the anomalous potential of the Earth (T) may be obtained using the method of least-squares collocation. This method requires the specification of a reproducing kernel Hilbert space containing T.

In geodetic practice the norm of the Hilbert space is choosed by a procedure where the inner product of the gravity anomaly functionals

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{\gamma} T, \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$

are computed from different norms and compaired with an "empirical" estimate of the inner products. The question of the validity and consequences of using this procedure is put forward.

WENDLAND, W.: Bemerkungen zur Methode der kleinsten Fehlerquadrate und zu Galerkinverfahren bei elliptischen Problemen (zus. mit E. Stephan)

Verwendet man bei Galerkin-Verfahren reguläre finite Elemente , so ergibt sich bekanntlich

1.) bei stark elliptischen Differentialgleichungsproblemen nach J. Nitsche,
2.) mit den für (allgemeinere) Verfahren gefundenen Ergebnissen von Gohberg und Feldman für gewisse singuläre Integralgleichungen und
3.) bei Integralgleichungen 1. Art mit Grundlösungskernen nach LeRoux, Hsiao u. Wendland

jeweils optimale Konvergenzordnung. Diese verschiedenen Ergebnisse können alle als Spezialfälle von Galerkin-Verfahren für reguläre Randwertaufgaben stark elliptischer Pseudodifferentialoperatorprobleme gedeutet werden, wenn man die a priori Abschätzungen von Dikanskii und Vishik und Eskin verwendet.

Eine entsprechende Situation liegt für die von J. Nitsche und Bramble u. Schatz bei der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für reguläre Randwertprobleme mit elliptischen Differentialoperatoren gerader Ordnung gezeigte optimale Konvergenzordnung vor: Auch hier ist die Übertragung auf allgemeine Probleme leicht möglich. Zu diesen gehören auch die inversen Probleme der Potentialtheorie.

WICKEL, W.: Eine Lösungstheorie zur Plattengleichung mit der Integralgleichungsmethode

Wir betrachten die Dirichletsche Randwertaufgabe zur Gleichung
(1) $(\Delta^2 - k^4)u = 0$ in Innen - oder Außengebieten G mit den

Randbedingungen

(2) $u|_{\partial G} = f_1$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial G} = f_2$ mit $(f_1\ f_2) \in C^{1+\alpha} \times C^{\alpha}(\partial G)$

Falls G Außengebiet ist, müssen noch Bedingungen für $|x| \to \infty$ gestellt werden.

Die spezielle Form dieser Gleichung ermöglicht einen Lösungsansatz, der Potentiale einfacher und doppelter Belegungen enthält und der unter Ausnutzung der üblichen Sprungrelationen auf ein Fredholmsches System 2. Art führt, das auf dem Banachraum $C^{1+\alpha} \times C^{\alpha}(\partial G)$ diskutiert wird. Man erhält Existenzsätze und Darstellungsformeln für alle betrachteten Fälle ($k = 0$, $k \neq 0$; G Innen- oder Außengebiet), und es kann gezeigt werden, daß für $C^{3+\lambda}$-Ränder alle klassischen Lösungen die Greenschen Umformungen zulassen. Damit folgt für die Innenraumaufgabe zu $k = 0$ und die Außenraumaufgaben klassische Eindeutigkeit, und für das Innenraumproblem bei reellen $k \neq 0$ kann die Fredholmsche Alternative gezeigt und eine Lösungsbedingung formuliert werden.

WITSCH, K. J.: Das geodätische Randproblem nach einer Arbeit von L. Hörmander

Unter dem geodätischen Randproblem versteht man die Aufgabe, die euklidische Figur der Erde aus den auf der Erdoberfläche gemessenen Werten für das Erdpotential und seinen Gradienten zu bestimmen. Sei ϕ eine Einbettung von S^2 in $\mathbb{R}^3$ und $W: S^2 \to \mathbb{R}$ das Erdpotential, bezogen auf einen "Globus" S^2. Im Äußeren der "Ersatzerde" $\phi(S^2)$ läßt sich dann ein "Erdpotential" w als Lösung einer Randwertaufgabe mit Randdaten $W \circ \phi^{-1}$ bestimmen. $\Gamma(\phi,W)$ bezeichne $(\text{grad } w) \circ \phi$. Dann besteht das geodätische Randproblem in der Auflösung der Gleichung $\Gamma(\phi,W) = G$ nach ϕ bei gegebenem W und G. Das Problem wird analysiert, und es lassen sich lokale Existenz- und Eindeutigkeitssätze beweisen.

K. J. Witsch (Bonn)