MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 15 /1976

Arbeitsgemeinschaft Geyer-Harder:

Stabilität von Abbildungen

4.4. bis 10.4.1976

Die Frühjahrstagung der Arbeitsgemeinschaft stand unter der Leitung von E.Looijenga (Nijmegen) und D.Siersma (Amsterdam), mit Assistenz von Th.Bröcker (Regensburg).

Die Herbsttagung der Arbeitsgemeinschaft findet vom 10.10. bis 16.10.1976 statt. Sie wird das Thema "Himmelsmechanik" haben. Die Vorbereitung übernimmt Herr Zehnder aus Erlangen; auf der Tagung wird Herr Rüßmann aus Mainz als Fachmann des Gebiets anwesend sein.

Teilnehmer

Abels, Bielefeld
Baas, Trondheim (Norwegen)
Bingener, Osnabrück
Böhme, Erlangen
Bröcker, L., Münster
Bröcker, Th., Regensburg
tom Dieck, Göttingen
Dress, Bielefeld

Erle, Dortmund	Mayer, Dortmund
Fischer, W., Bremen	Neukirch, Regensburg
Frey, Saarbrücken	Pommerening, Mainz
Gamst, Bremen	Reiter, Mainz
Geyer, Erlangen	Scheerer, Heidelberg
Greuel, Bonn	Scherk, Bonn
Gottschling, Mainz	Siersma, Amsterdam (Niederlande)
Hain, Erlangen	Slodowy, Regensburg
Horneffer, Bremen	Suckow, Mainz
Kneser Göttingen	Tamme, Göttingen
Köhnen, Mainz	Vogt, E., Heidelberg
Lamotke, Köln	Wassermann, Regensburg
Lindner, Saarbrücken	Zehnder, Erlangen
Looijenga, Nijmegen (Niederlande)	

Some comments on the topological stability theorem

Two C^∞-mappings f and f' from a manifold N to a manifold P are said to be C^∞-equivalent if there exist diffeomorphisms $h: N \to N$ and h' $P \to P$ such that $f' = h' \circ f \circ h^{-1}$. A C^∞-mapping $f: N \to P$ is said to be C^∞-stable if the equivalence class of f for this relation forms a neighbourhood of f in the function space $C^\infty(N,P)$. This requires a topology on $C^\infty(N,P)$, of course: we choose the Whitney topology. Mather has given in his fundamental series 'Stability of C^∞-mappings' [I - VI] necessary and sufficient conditions for a mapping to be C^∞-stable under the natural assumption that it is proper. Among other things he obtains a criterion of a semi-local nature (in terms of commutative algebra) and a (multi-) transversality criterion. A very basic role is played here by his generalisation of the Malgrange preparation theorem, although a more recent proof of these results in [Golubitsky-Guillemin] shows that Malgrange's original theorem also serves the purpose. For certain pairs (n,p) := (dimN, dimP) the transversality criterion involves uncountably many transversality conditions. As one may expect, in this case the transversality conditions cannot be simultaneously satisfied by a dense subset of the set $C^\infty_{pr}(N,P)$ of proper C^∞ -mappings. The many pairs (n,p) with this nasty property have been determined by [Mather VI]. In particular for those (n,p), C^∞ -stability is not a dense property in $C^\infty_{pr}(N,P)$. Besides being unsatisfactory by itself, this also makes the C^∞ -classification of 'generic mappings' in $C^\infty_{pr}(N,P)$ a hopeless matter. The conclusion to be drawn seems clear: the notion of C^∞ - equivalence is much too fine to make the corresponding stability generic. Examples show that little is gained if C^∞ -equivalence is replaced by C^1 -equivalence. Therefore we consider C^0 -(= topological) equivalence.

It was conjectured by Thom in the late fifties (see [Thom-Levine]) that the topologically stable mappings intersect $C^\infty_{pr}(N,P)$ in a dense subset. In a later paper [T2] he indicated along which lines a proof of this conjecture might proceed. Thus an intermediate between the smooth and piecewise linear categories, the category of stratified sets and spaces, was born. It derived part of its importance from Whitney's regularity lemma [Wh 1,2], which asserts that any complex-analytic set admits a stratification in Thom's sense and which was later extended by [Lojasewicz] to semi-algebraic sets. Thom's work on stratified sets and mappings culminated in his famous isotopy lemmas [T3]. The first isotopy lemma may be viewed as a fantastic generalisation of Ehresmann's theorem (which states that a proper submersion determines a locally trivial fibre bundle). The second one is more pertinent to our purpose: it gives sufficient conditions that a family of mappings be locally (topologically) trivial.

Both the ideas and the theorems of Thom proved to be extremely fruitful. By fully exploiting his own work on C^∞ -stability and Thom's philosophy, Mather obtained around 1970 a definite proof of Thom's conjecture. An outline of this proof can be found in [Chenciner's] account in the Bourbaki seminar. The complete proof will appear in a book Mather is writing.

The proof presented here is somewhat different from Mather's and follows Thom's indications more closely.

The last two lectures are devotet to a related subject which was also developed by Thom: elementary catastrophe theory. The mathematical aspect of this theory. The mathematical aspect of this theory and the C^∞ -stability theory of Mather are variations on the same theme.

Participants should be familiar with some elementary differential topology, like Sard's theorem, the notions of transversality, jet, spray, most of which can be found in the book of [Bröcker-Jänich]. Also, some rudimentary knowledge of commutative algebra is recommended.

Some references

Survey articles:

V. I. Arnol'd, Singularities of smooth mappings, Russian Math. Surveys (1968) 1 - 43.

A. Chenciner, Travaux de Thom et Mather sur la stabilité topologique. Sém. Bourbaki 1973.

C.T.C. Wall, Lectures on C^∞ -stability and classification. Proc. Liverpool singularities Symposium I, Springer Lecture Notes 192, 170 - 206.

C.T.C. Wall Stratified sets: a survey, idem, 133 - 140.

Differential topology:

Differential-Topologie, Th. Bröcker and K. Jänich. Heidelberger Taschenbücher, Vol 143, Springer Verlag.

Other references on topological stability

[GG] M. Golubitsky and V. Guillemin, Stable mappings and their singularities, Graduate Texts in Math. 14, Springer Verlag

[Lo] S.Jojasewicz, Ensembles semi-analytiques, available at IHES (1965).

[M I-VI] J.Mather, Stability of C^{∞} -mappings I-VI, Ann. of Math. 87, 89-104, Ann. of Math. 89, 254-291, Publ. Math. IHES 35, 127-156, Publ. Math. IHES 37, 223-248, Adv. in Math. 4, 301-366, Proc. Liv. Symp. I (Springer Lecture Notes 192) 207-253.

[M1] J.Mather, Harvard notes on topological stability (1970).

[M2] J.Mather, Harvard notes on topological stability (1971), published in M.M., Peixoto (ed.): Dynamical Systems, 195-223, (Stratifications and mappings), Academic Press 1973.

[N] L.Nirenberg, A proof of the Malgrange preparation theorem, Proc. of the Liv. Symp., Springer Lecture Notes 192, 97-105.

[TL] R.Thom and H.Levine, Singularities of differentiable mappings, reprinted in Proc. Liv. Symp.I, Springer Lecture Notes 192.

[T1] R.Thom, La stabilité topologique des applications polynomiales, l'Enseignement Math. 8 (1962) 24-33.

[T2] R.Thom Local topological properties of differentiable mappings, in Differential Analysis, Oxford U.P.(1964) 191-202.

[T3] R.Thom, Ensembles et Morphismes Stratifies, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 240-284.

[Wa1] C.T.C. Wall, Introduction to the preparation theorem, Proc. Liv. Symp. I, Springer Lecture Notes 192, 90-96.

[Wa2] C.T.C. Wall, Regular stratifications, Dynamical Systems, Warwick 1974, Springer Lecture Notes 468, 332-344.

[Wh1] H.Whitney, Local properties of analytic varieties, in Differential and Combinatorial Topology, Princeton U.P. (1965), 205-244.

[Wh2] H.Whitney, Tangents to an analytic variety, Ann. of Math. 81 (1965), 496-549.

[TS] Notes of the Liverpool seminar on topological stability (1974-75) (manuscript).

E. Looijenga

<u>Vortragsauszüge:</u>

E.LOOIJENGA: <u>Introduction</u>

The purpose of this lecture was threefold: first to define the relevant notions of stability (C^l -stability, $l = 0,1,2,\dots,\infty$) for smooth mappings and related concepts, secondly to give a short (and incomplete) account of the history of the problem wheather C^l -stable mappings are dense in $C^\infty(N,P)$ (N,P manifolds) and thirdly to provide some motivation for studying especially this question for $l = 0$.

Thus among other things, Whitney's (affirmative) solution to the C^∞-stability question in case $\dim N = \dim P = 2$ was sketched and Thom's proof that the C^2-stable mappings in $C^\infty(N,P)$ in case $\dim N = \dim P = 16$ do not form a dense subset was worked out in some detail. Also, Mather's description of the pairs $(\dim N, \dim P)$ for which C^∞-stability is a dense property of $C^\infty(N,P)$ was mentioned. Since for many of the pairs (dimN,dimP), C^1-stability is <u>not</u> a dense property of $C^\infty(N,P)$, one is lead to consider the notion of C^0-stability. The main purpose of this Tagung is to describe a proof of the theorem of Thom and Mather that C^0-stable mappings are dense among the proper smooth mappings. Also attention is paid to a related subject: catastrophy theory.

G.-M.GREUEL: <u>Semialgebraische Mengen und das Whitney-Regularitätslemma</u>

Eine Stratifikation S einer Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist eine lokal-endliche Zerlegung von V in Untermannigfaltigkeiten (Strata) aus $\mathbb{R}^n$. S heißt Whitney-regulär, wenn je zwei Strata X,Y regulär (im Sinne von Whitney) aneinanderpassen; i.e. (Y,X) heißt regulär in $x \in X$, wenn für alle Folgen $X \ni x_n \to x$, $Y \ni y_n \to x$, deren Verbindungsgeraden $\overline{x_n y_n}$ und Tangentialräume $T_{y_n}Y$ gegen l bzw. τ konvergieren (in entspr. Graßmannbündeln), $l \subset \tau$ gilt.

Das Whitney-Regularitätslemma besagt:

Sind $X,Y \subset \mathbb{R}^n$ semialgebraische, nicht-singuläre Mengen mit $X \subset \overline{Y} - Y$ so gilt:

i) $S(Y,X) = \{x \in X \mid (Y,X)$ nicht regulär in $x\}$ ist semialgebraisch

ii) $\dim S(Y,X) < \dim X$

Die Regularitätsbedingung wurde an Beispielen erläutert, die Aussage i) wurde vollständig, die (wesentlich tieferliegende) Aussage ii) teilweise bewiesen. Einige klassische Beispiele wurden diskutiert.

K.H.MAYER: Kanonische Stratifikation von semialgebraischen Mengen

Es wurden zunächst einige Konstruktionen angegeben, mit deren Hilfe man aus gegebenen Stratifikationen neue Stratifikationen erhält, und es wurde gezeigt, daß jede semialgebraische Menge eine kanonische Whitney-Stratifikation besitzt. Danach wurde der Begriff der Thom-Stratifikation für differenzierbare Abbildungen eingeführt und gezeigt, daß jede polynomiale Abbildung zwischen offenen semialgebraischen Teilmengen von euklidischen Räumen unter einer gewissen Generizitätsbedingung eine Thom-Stratifikation zuläßt.

T.TOM DIECK: System von Tubenumgebungen für Whitney-stratfizierte Mengen und Thom-stratifizierte Abbildungen

Es wurde einer Whitney-stratifizierten Menge nach Mather ein verträgliches System von Tubenumgebungen zugeordnet.

E.VOGT: Kontrollierte Vektorfelder

Vektorfelder auf stratifizierten Mengen, die durch Systeme von Tubenumgebungen kontrolliert werden, wurden eingeführt. Es wurde bewiesen, daß sich kontrollierte Vektorfelder bei Thom-regulären Abbildungen zu kontrollierten Vektorfeldern hochheben lassen.

H.SCHEERER: Die Isotopiesätze von Thom

Es wurde bewiesen, daß die im Vortrag vorher konstruierten Vektorfelder lokale 1-Parametergruppen von Homöomorphismen, welche die Strata invariant lassen, erzeugen. Damit konnte dann der Beweis des Isotopielemmas von Thom durchgeführt werden.

A.DRESS: Der Malgrange'sche Vorbereitungssatz

Es wurde eine etwas vereinfachte Version des Beweises von Nierenberg vorgetragen.

G.WASSERMANN: Bestimmtheit von Jets und stabile Entfaltungen

Es wurden zunächst Kontaktäquivalenz und Rechtslinksäquivalenz von Abbildungskeimen und deren Jets definiert.

Nun sei ein Keim $f:(N,x_o) \to (P,y_o)$ gegeben, seien: $\theta(f)$ die Menge der Vektorfelder entlang $f(= \{\omega:(N,x_o) \to TP$ mit $\pi\omega = f$, wo $\pi:TP \to P$ die Projektion ist$\})$; $tf \subseteq \theta(f)$ sei das Bild unter Tf der lokalen Schnitte von TN; setze $\chi(f) := \dim_{\mathbb{R}} \theta(f)/(tf+f^*m_{P,y_o}\ \theta(f))$. $\chi(f)$ hängt nur von der Kontaktklasse von f ab und mißt etwa deren "Kodimension". f heißt von endlichem Singularitätstyp wenn $\chi(f) < \infty$.

$F:(N \times \mathbb{R}^k,x_o \times 0) \to (P \times \mathbb{R}^k,y_o \times 0)$ heißt Entfaltung von f, wenn $F(x,t) = (f_t(x),t)$, wo $f_o = f$ und $t \in \mathbb{R}^k, x \in N$. Für solches F gilt $\chi(F) = \chi(f)$.

F heißt trivial wenn es Retraktionen $r:N \times R^k \to N$, $s:P \times R^k \to P$ gibt, mit $f \circ r = s \circ F$. Ein Keim f heißt stabil, wenn jede Entfaltung trivial ist.

Jeder Keim f definiert Jetschnitte $J^1f:(N,x_o) \to J^1(N,P)$ durch $J^1f(x) :=$ 1-jet von f bei x. Wir schreiben $j^1f = J^1f(x_o)$.

Dann hat man folgende Sätze:

1. $f:(N,x_o) \to (P,y_o)$ ist stabil $\Leftrightarrow$ $J^{\dim P+1}f$ ist transversal zur Kontaktklasse von $j^{\dim P+1}f$.

2. F entfalte f. Dann ist F stabil $\Leftrightarrow$ die Abbildung $(x,t) \to J^{\dim P+k+1}f_t(x)$ ist transversal zur Konkatklasse von $j^{\dim P+k+1}f$.

3. $\chi(f) < \infty \Leftrightarrow$ f hat stabile Entfaltungen.

J.NEUKIRCH: <u>Nicht endlich bestimmte Jets</u>

Es wurde bewiesen, daß die nicht endlich kontakt-bestimmten Jets von Funktionskeimen $f:(R^n,0) \to (R^p,0)$ eine pro-algebraische Menge im Raume aller Jets von unendlicher Kodimension bilden.

W.-D.GEYER: <u>Ein Beispiel von Thom</u>

Es wurde ein Beispiel einer Familie $f_\lambda: R^3 \to R^3$ eigentlicher Polynomabbildungen nach Thom vorgeführt, so daß f_λ und $f_{\lambda'}$ für $\lambda \neq \lambda'$ nicht durch Homöomorphismen von Quell- und Zielraum ineinander übergeführt werden können. Die Idee war folgende: Die f_λ besitzen alle eine einzige unendliche Faser, einen Kreis C. Dieser liegt auf einer (durch f_λ top. bestimmten) Fläche F, so daß ein inverser σ-Prozeß

$$\begin{array}{cccl} f_\lambda : F & \to & E & \text{(Ebene)} \\ & & \cup & \\ C & \to & x_o & \end{array}$$

induziert wird, der im Punkt x_o auf E eine diff. Struktur induziert zusammen mit einer Abb.

$$\psi_F : C \to \mathbb{P}T_{x_o} E = S^1 .$$

Legt man durch C eine zweite (variable) Fläche G_λ, so daß $f_\lambda G_\lambda \to E$ wieder ein Zusammenblasen von C ergibt, so erhält man eine zweite Abb.

$$\psi_{G_\lambda} : C \to S^1$$

Richtet man f_λ so ein, daß G_λ top. ausgezeichnet und die Abb. ψ_F und ψ_{G_λ} sich um Drehungen des Winkels α ($\tan \alpha = \lambda$) von S^1 unterscheiden, so sind die f_λ alle von verschiedenem Typ, da Drehungen verschiedener Winkel nicht konjugierte Homöomorphismen von S^1 sind. In der Realisierung von Thom sind F und G_λ kubische Flächen.

J.GAMST: <u>Ein Transversalitätslemma</u>

Für stratifizierte Mengen $(A,\mathcal{G}) \subset J^1(N,P)$, für die alle $\pi_P|X$ submersiv sind ($X \in \mathcal{G}$), wurde gezeigt, daß die zu $(A,\mathcal{G})$ multitransversalen Abbildungen in $C^\infty(N,P)$ eine generische Menge bilden.

D.SIERSMA: Stratifikation des Jet-raumes

Das Ziel dieses Vortrages war es, eine Stratifikation $A^1(N,P)$ von $J^1(N,P)\setminus W^1(N,P)$ anzugeben, so daß für alle $f:N \to P$ mit $J^1f(B) \cap W^1(N,P) = \emptyset$ und f multitransversal auf $A^1(N,P)$ gilt, daß die auf N zurückgeholte Stratifikation $B = (Jf)^{-1}\, A^1(N,P)$ eine Thom-Stratifikation (B_f, B_f') für f induziert.

K.LAMOTKE: Das Ende des Beweises

Mit den Bezeichnungen des vorstehenden Vortrags (Siersma) gilt:

(1) $A^1(N,P)$ ist überall eine Whitney-reguläre Stratifikation. Es wurde gezeigt, wie dies aus dem Hauptsatz des vorangehenden Vortrags folgt.

Sei nun $\Omega^1(N,P) = \{f \in C^\infty(N,P) : J^1f(N) \cap W^1(N,P) = \emptyset$ und f multitransversal zu $A^1(N,P)\}$

Für $f \in \Omega^1$ ist dann $B = (J^1f)^{-1}\, A^1(N,P)$ eine Whitney-reguläre Stratifikation von N. Man kann sie zu einer Stratifikation B_f verfeinern, so daß

(2) (B_f, B_f') mit $B_f' = \{f(X) : X \in B_f\} \cup \{P\ f(N)\}$ eine Thomsche Stratifikation von f ist.

Es wurde bewiesen (Folgerung aus den Ergebnissen der Vorträge Neukirch und Gamst):

(3) Für $l \gg n$ ist $\Omega_{pr}(N,P)$ dicht in $C^\infty_{pr}(N,P)$. [pr = eigentlich]

Schließlich gilt:

(4) Jedes $f \in \Omega^1_{pr}(N,P)$ ist topologisch stabil.

Zum Beweis von (4) wurden (2), "Ω^1_{pr} ist offen in C^∞_{pr}" und das zweite Thomsche Isotopielemma (Vortrag Scheerer) benutzt. Das Ende des Beweises ist damit erreicht, da aus (3) und (4) folgt, daß die topologisch stabilen Abbildungen dicht in der Menge aller eigentlichen Abbildungen liegen.

q.e.d.

L.BRÖCKER: Stabile Entfaltung von Funktionskeimen

Beweisskizze des folgenden Satzes: Sei $I = C^\infty(\mathbb{R}^{n+r},\mathbb{R})$, für $f \in I$ sei $M_f := \{(x,u) \subset \mathbb{R}^{n+r} \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\}$ und s_f die Projektion: $M_f \to \mathbb{R}^r$. I besitzt eine offene und dichte Teilmenge I^*, so daß für alle $f \in I^*$ gilt:

(1) M_f ist eine $\mathbb{R}$-Mannigfaltigkeit.

(2) Jede Singularität von X_f ist rechts-links-äquivalent zu einem Repräsentanten aus einer Liste von 11 Elementarkatastrophen.

(3) X_f ist lokal stabil (unter Störung von f).

N.A.BAAS: Catastrophe theory-applications

R.Thom's general dynamical models of gradient systems were discussed. The following applications were given: The Zeeman-catastrophe machine, the heart-beat equations and work in elasticity theory of J.M.T. Thompson and G.W. Hunt.

D.SIERSMA: Stratifikation des Jet-raumes

Das Ziel dieses Vortrages war es, eine Stratifikation $A^1(N,P)$ von $J^1(N,P)\setminus W^1(N,P)$ anzugeben, so daß für alle $f:N \to P$ mit $J^1f(B) \cap W^1(N,P) = \emptyset$ und f multitransversal auf $A^1(N,P)$ gilt, daß die auf N zurückgeholte Stratifikation $B = (Jf)^{-1}\, A^1(N,P)$ eine Thom-Stratifikation (B_f, B_f') für f induziert.

K.LAMOTKE: Das Ende des Beweises

Mit den Bezeichnungen des vorstehenden Vortrags (Siersma) gilt:

(1) $A^1(N,P)$ ist überall eine Whitney-reguläre Stratifikation. Es wurde gezeigt, wie dies aus dem Hauptsatz des vorangehenden Vortrags folgt.
Sei nun $\Omega^1(N,P) = \{f \in C^\infty(N,P) : J^1f(N) \cap W^1(N,P) = \emptyset$ und f multitransversal zu $A^1(N,P)\}$

Für $f \in \Omega^1$ ist dann $B = (J^1f)^{-1}\, A^1(N,P)$ eine Whitney-reguläre Stratifikation von N. Man kann sie zu einer Stratifikation B_f verfeinern, so daß

(2) (B_f, B_f') mit $B_f' = \{f(X) : X \in B_f\} \cup \{P \setminus f(N)\}$ eine Thomsche Stratifikation von f ist.

Es wurde bewiesen (Folgerung aus den Ergebnissen der Vorträge Neukirch und Gamst):

(3) Für $l >> n$ ist $\Omega_{pr}(N,P)$ dicht in $C^\infty_{pr}(N,P)$. [pr = eigentlich]

Schließlich gilt:

(4) Jedes $f \in \Omega^1_{pr}(N,P)$ ist topologisch stabil.

Zum Beweis von (4) wurden (2), "Ω^1_{pr} ist offen in C^∞_{pr}" und das zweite Thomsche Isotopielemma (Vortrag Scheerer) benutzt. Das Ende des Beweises ist damit erreicht, da aus (3) und (4) folgt, daß die topologisch stabilen Abbildungen dicht in der Menge aller eigentlichen Abbildungen liegen.

q.e.d.

L.BRÖCKER: Stabile Entfaltung von Funktionskeimen

Beweisskizze des folgenden Satzes: Sei $I = C^\infty(\mathbb{R}^{n+r},\mathbb{R})$, für $f \in I$ sei $M_f := \{(x,u) \subset \mathbb{R}^{n+r} \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\}$ und s_f die Projektion: $M_f \to \mathbb{R}^r$. I besitzt eine offene und dichte Teilmenge I^*, so daß für alle $f \in I^*$ gilt:

(1) M_f ist eine $\mathbb{R}$-Mannigfaltigkeit.

(2) Jede Singularität von X_f ist rechts-links-äquivalent zu einem Repräsentanten aus einer Liste von 11 Elementarkatastrophen.

(3) X_f ist lokal stabil (unter Störung von f).

N.A.BAAS: Catastrophe theory-applications

R.Thom's general dynamical models of gradient systems were discussed. The following applications were given: The Zeeman-catastrophe machine, the heart-beat equations and work in elasticity theory of J.M.T. Thompson and G.W. Hunt.

Related to the rest of the programm the following conjecture was stated:"topologically stable compositions are dense in the space of compositions" (compact spaces). The relation of this to hirarchical systems and their stability was mentioned. Examples of stability situations for compositions were given.

Th. Bröcker (Regensburg)