MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 16/1976

Mathematische Logik

11.4. bis 17.4.1976

Unter der Leitung von E.Specker (Zürich) und W.Felscher (Tübingen) fand in der Woche vom 11.4. bis 17.4.1976 im Forschungsinstitut in Oberwolfach die diesjährige Tagung über Mathematische Logik statt. Es wurden 33 Vorträge über verschiedene Gebiete der Mathematischen Logik gehalten.

Teilnehmer

H.P.Barendregt, Utrecht
E.Börger, Münster
M.Boffa, Mons
W.Buchholz, München
D.van Dalen, Utrecht
R.Deißler, Freiburg
W.Deuber, Hannover
J.Diller, Münster
E.Drewitz, München
H.-D.Ebbinghaus, Freiburg
E.Eder, München
B.Falkenberg, Freiburg
U.Felgner, Tübingen
J.E.Fenstad, Oslo
R.O.Gandy, Oxford
J.Y.Girard, Paris
J.M.Glubrecht, Kiel
P.Hájek, Prag
H.Hermes, Freiburg
B.J.Koppelberg, Berlin

A.Labella, Roma
H.Läuchli, Zürich
H.Luckhardt, Frankfurt
G.Mitschke, Darmstadt
G.H.Müller, Heidelberg
A.Oberschelp, Kiel
Th.Ottmann, Karlsruhe
P.Päppinghaus, Heidelberg
A.Pétry, Liège
W.Pohlers, München
A.Prestel, Konstanz
J.Reineke, Hannover
M.M.Richter, Aachen
D.Schmidt, Heidelberg
W.Schönfeld, Stuttgart
J.Schulte Mönting, Tübingen
W.Schwabhäuser, Stuttgart
H.Schwichtenberg, Heidelberg
D.Scott, Oxford
D.Siefkes, Berlin

C.Smorynski, Chicago
R.Statman, Cambridge
K.Steffens, Hannover
M.Stein, Münster
B.Stephan, Tübingen
L.W.Szczerba, Warszawa
A.S.Troelstra, Amsterdam
J.K.Truss, Oxford
Th.Wolf, Freiburg
M.Ziegler, Berlin

Vortragsauszüge

E.BÖRGER: Darstellungen rekursiver Unlösbarkeitsgrade durch Entscheidungsprobleme formaler Systeme

By a refinement of Minsky's technique for simulating arbitrary register machines (Rm) by such machines with 2 registers and combining this with ideas introduced by Shepherdson we obtain:
Thm 1. (First Representation Thm for 2-Rm): Every triple of nonrecursive r.e. m-degrees can be represented as triple of halting, word, and confluence problem of a 2-Rm.
Thm 2. (Second Repr. Thm for 2-Rm): Every nonrecursive r.e. m-degree is effectively representable as decision problem of a 2-Rm with axiom. Interpreting 2-Rm instructions in a natural way as rewriting rules of combinatorial systems we obtain by variations of one and the same fundamental argument as corollaries: Thm 3. The 2^{nd} repr. thm for: Semi-Thue systems, Post normal calculi, Thue systems, Markov algorithms in Swanson normal form without concluding rules, deterministic restricted Post canonical calculi, Turing machines. Thm 4. The 1^{st} repr.thm for semi-Thue systems, restricted Post canonical calculi, Markov algorithms without concluding rules, Markov algorithms in Swanson normal form with one concluding rule, Turing machines. Thm 5. Every pair of nonrecursive r.e. m-degrees is effectively representable by word- and confluence problem of a Markov algorithm in Swanson normal form without concluding rules. Thm 6. Every nonrecursive r.e. m-degree is effectively representable as word problem of a Thue system. Immediate consequences are a) the strong computability of all total recursive fcts by 2-Rm, semi-Thue systems, Post normal calculi and Markov algorithms without concluding rules in the sense of Davis, b) the undecidability

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

of the set of all Thue systems without infinite equivalence classes.
A natural reformulation of (the effect of) 2-Rm programs in terms of first-order logical formulae gives: Thm 7. Thm 6 for decision problems of classes of formulae of first-order predicate logic.
By thm 7, recursive inseparability properties of stop problems of 2-Rm carry over in a strikingly simple way to properties of the corresponding formulae such as to be satisfiable but not by recursive models, to be $E_{n+1}-E_n$ satisfiable for Grzegorczyk's E_n, to be axiom of an essentially undecidable theory. The interpretation of 2-Rm as semi-Thue systems gives a surprisingly direct relation of "r.e. set versus type-0 language" such that the arithmetical complexity of index sets of partial recursive functions carries over trivially to the corresponding sets of type-0 grammars.
For proofs and references see my Habilitationsschrift, Münster i.W. 1975.

M. BOFFA: Cumulative models of type theory

Let TT be the theory of types based on axioms of extensionality and comprehension. A model $M = \langle M_0, M_1, M_2, \ldots \rangle$ of TT will be said cumulative when (roughly speaking) M_{i+1} is an end extension of M_i.
Main result: let M be any model of TT and let f be any injection of M_0 into M_1 which is definable (with parameters) in M. Then M is isomorphic to a cumulative model N such that:
(i) $\bigcup N \models Z_0$;
(ii) in N, the function f is the identity on N_0;
(iii) in $\bigcup N$, $N_{i+1} = \mathcal{P} N_i$;
where $\bigcup N$ is obtained by taking the union of all levels of N, and where Z_0 is Zermelo's set theory (without axiom of infinity) in which comprehension axiom is restricted to Δ_0-formulas.
This result can be used for the construction of an extension of Z_0 which is equiconsistent with NF.

D. VAN DALEN: Models for intuitionistic analysis

Models for second order intuitionistic theories were presented by Scott, Moschovakis, van Dalen (topological models) and Smorynski (Kripke models). The present model is a Beth-model (hence a topological model in disguise). Sequences (functions) ξ are interpreted in the model by families $\xi^{[\alpha]}$ of partial functions, satisfying the following conditions ($\alpha,\beta,\gamma\ldots$ are nodes of the underlying tree):

$$\alpha \leq \beta \quad \rightarrow \quad \xi^{[\alpha]} \subseteq \xi^{[\beta]} ,$$

$$\bigcup\{\xi^{[\alpha]} \mid \alpha \text{ on a path}\} \text{ is a total function.}$$

The model satisfies the following axioms: weak continuity without choice parameters (WC^{ch}); strong unique continuity (SC!); relativized dependent choice (RDC); bar induction (BI); Kripke's schema (KS). It does not satisfy weak continuity (WC); Markov's principle (MP); independence of premiss principle (IP) (for terminology cf. Kreisel-Troelstra or Moschovakis). In addition the model interpretes the axioms for the creative subject.
By choosing suitable generic functions for $\lambda\alpha.\xi^{[\alpha]}$ one constructs interpretations for the full theory of lawless sequences or for certain fragments. This yields several independence results, e.g. bar induction does not follow from the axioms of LS, $\# \nvdash \not\equiv$ is independent of LS.

R.DEISSLER: Minimal- und Primmodelle torsionsfreier abelscher Gruppen

Eine Gruppe G heißt minimal (strikt minimal) wenn $H \prec G$ impliziert $H \cong G$ (bzw. $H = G$). Sei G eine abzählbare torsionsfreie abelsche Gruppe. Für jede Primzahl p sei Tf(p,G) die Dimension von G/pG als Vektorraum über Z(p). Theorem 1: Th(G) hat ein algebraisches Primmodell gdw alle Tf(p,G) $\neq$ 0 sind gleich. Theorem 2: Th(G) hat ein elementares Primmodell gdw fast alle Tf(p,G) = 0 und alle Tf(p,G) $\neq$ 0 sind gleich. Theorem 3: Th(G) hat ein strikt minimales Modell gdw die Tf(p,G) unterhalb von ω beschränkt sind. Theorem 4: Es gibt eine torsionsfreie abelsche Gruppe G deren Theorie genau ein nichtprimes minimales Modell besitzt. Theorem 5: $G \equiv Z$ ist minimal gdw G ist strikt minimal. Theorem 5 beantwortet eine Frage von Baldwin, Blass, Glass und Kueker (Alg.Univ.3,1973).

W.DEUBER: Ramseyprobleme

Bei geeigneter Definition der Äquivalenz von endlichen Folgen über

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

einem punktierten Alphabeth ist ein Ramseysatz für diese Folgen beweisbar. Dieser erweist sich als nützlich bei der Diskussion der Frage für welche abelschen Gruppen G,H es eine abelsche Gruppe R gibt mit $R \to (G)^H_2$. Dabei ist $R \to (G)^H_2$ die Ramseyaussage: Zu jeder Partition der H-Untergruppen von R in 2 Klassen gibt es eine G-Untergruppe von R mit allen H-Untergruppen in derselben Klasse.

E.EDER: <u>Charakterisierungen der definierbaren Ordinalzahlen und Ordinalzahlfunktionen in Systemen mit rekursiven Definitionsprozessen</u>

Es wird ein System PRO besprochen, das eine Erweiterung des Systems der primitivrekursiven Funktionale auf Ordinalzahlen darstellt. In diesem System PRO lassen sich genau die Ordinalzahlen bis zur kleinsten ω-kritischen Zahl definieren. Ich konnte zeigen, daß die Klasse der in PRO definierbaren Ordinalzahlfunktionen über die Klasse der arithmetischen Funktionen hinausgeht.

Außerdem wird eine Klasse von Systemen $RO_{\mathfrak{M}}$ definiert, die Erweiterungen von PRO darstellen. Für diese Systeme $RO_{\mathfrak{M}}$ konnte ich ebenfalls die Menge der definierbaren Ordinalzahlen ermitteln. Besonders ist hier das System $RO = RO_{\emptyset}$ von Interesse, in dem genau die Ordinalzahlen bis zur kleinsten schwachen Veblenzahl definierbar sind.

B.FALKENBERG: <u>Die Repräsentation von m-Graden durch Fang-Systeme (tag-systems) mit fester Abschlagzahl</u>

In [3] zeigt Hughes, daß jeder rekursiv aufzählbare m-Grad (bis auf zwei Ausnahmen) durch das Halteproblem eines Fang-Systems repräsentiert werden kann. Es blieb die Frage offen, ob man dieses Ergebnis auch beweisen kann, wenn man sich auf Fang-Systeme beschränkt, deren Abschlagzahl (deletion-number) kleiner als eine feste natürliche Zahl ist. Wir können diese Frage jetzt positiv beantworten und zeigen:

Satz 1 Zu jedem r.a. m-Grad d, $d \neq \{\emptyset\}$, $d \neq \{\mathbb{N}\}$ gibt es ein Fang-System mit Abschlagzahl 4, dessen Halte- und Wortproblem beide in d liegen.

Ebenso ungelöst war bisher das Problem, ob - und wenn ja wie weit - die m-Grade von Halte- und Wortproblem eines Fang-Systems ausein-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

anderfallen können. Wir zeigen dazu:

Satz 2 Sind a_1, a_2 r.a. Mengen $a_i \neq \emptyset$, $a_i \neq \mathbb{N}$ (i=1,2), dann gibt es ein Fang-System F mit Abschlagzahl 4 so daß a_1 m-äquivalent zum Halteproblem von F und $\sup\{a_1, a_2\}$ m-reduzierbar auf das Wortproblem von F ist.

Als Spezialfall erhält man aus Satz 2 die Existenz von Fang-Systemen mit Abschlagzahl 4, entscheidbarem Halteproblem und unentscheidbarem Wortproblem.

Bei den Beweisen benutzte Literatur:

[1] E.Börger: Eine einfache Methode zur Bestimmung der Unlösbarkeitsgrade von ...
Habilitationsschrift, Münster 1975

[2] M.L.Minsky: Computation, Finite and Infinite Machines
Prentice Hall, 1967

[3] C.E.Hughes: Many-ones degrees associated with problems of tag.
Journal of Symbolic Logic (38), 1973, 1-17

U.FELGNER: $\aleph_0$-kategorische nicht-abelsche Gruppen

Eine abzählbare Gruppe G heißt $\aleph_0$-kategorisch wenn für jede abzählbare Gruppe H gilt: wenn $\exists D \in \beta N$: $G^\omega/D \simeq H^\omega/D$ dann $G \simeq H$. Die $\aleph_0$-kategorischen abelschen Gruppen sind gerade die beschränkten abelschen Gruppen. Es wurden die folgenden Sätze bewiesen:

(1) Falls G $\aleph_0$-kategorisch ist, dann ist G uniform-lokal-endlich und G besitzt eine endliche Normalreihe $1 = N_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq N_k \trianglelefteq N_{k+1} = G$ dergestalt daß für $j < k$ die Faktorgruppen N_{j+1}/N_j die direkte Summe einer abelschen und einer endlichen Gruppe ist. N_k ist dabei das FC-Hyperzentrum von G und N_k ist FC-nilpotent.

(2) Falls G $\aleph_0$-kategorisch ist und stabil, dann besitzt G genau einen maximalen nilpotenten Normalteiler. Die Fitting-Untergruppe von G existiert also hier und stimmt mit dem Nil-Radikal und dem Hirsch-Plotkin-Radikal überein.

(3) Extraspezielle p-Gruppen vom Exponent p sind $\aleph_0$-kategorisch aber nicht stabil. Daher gibt es für jede Primzahl p genau eine abzählbare extra-spezielle p-Gruppe vom Exponent p, aber in jeder überabzählbaren Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ genau $2^{\mathfrak{m}}$ derartige Gruppen.

R.O.GANDY: A simple proof of strong normalisation

The terms of typed λ-I-calculus, with ω as ground type, denote - in a natural way - functions which are monotonic. Adding 0, 1, + to the language gives closed terms in all types. A translation from the typed λ-calculus into the λ-I-calculus allows one to compute (by a suitable term) the height of the complete reduction tree for a term of the λ-calculus. In this way the proof of strong normalisation is reduced to the proof of normalisation. The idea extends to other systems (e.g. to Gödels "T").

J.Y.GIRARD: Functionals and ordinoids

An analysis of the notion of "proof theoretic ordinal" leads to the concept of ordinoid (or "not well founded ordinal notation"). The interest of looking to such unusual theoretic objects is that we can develop a general theory of ordinal assignments in this framework, whereas nothing similar is possible on the (more) familiar ground of Kleene's O. A very simple application is given: analysis of Gödel's T (or equivalently a proof in HA) in terms of ordinoids. Of course the familiar ε_0 is obtained (immediately). (Although slight changes in the definitions would lead to other numbers s.t. $\phi_{\varepsilon_{\Omega+1}}(1)$.)

J.-M.GLUBRECHT: Die Ausdruckslogik LA(S,C) - eine logisch-mengentheoretische Sprache mit nur einer syntaktischen Kategorie

LA(S,C) ist eine Erweiterung der logisch-Mengentheoretischen Sprache L(S,C) von A.OBERSCHELP. LA(S,C) enthält außer der Identität und der Elementbeziehung den Klassenbildungs- und den Paarbildungsoperator als logische Konstanten, sowie einen Auswahl- oder einen Kennzeichnungsoperator. Die Erweiterung besteht im Wesentlichen darin, syntaktisch nicht mehr zwischen Formeln und Termen zu unterscheiden. Der logische Folgerungsbegriff wird auf beliebige Ausdrucksmengen ausgedehnt. In der Sprache kann ausgedrückt werden, ob ein Ausdruck eine Formel, d.h. wahrheitswertig, ist oder nicht; das erfolgt mit Hilfe von booleschen Variablen. Die üblichen Junktoren und Quantoren können in LA(S,C) durch die vorhandenen logischen Konstanten definiert werden, u.zw. ohne wesentliche Ausnutzung des Auswahloperators.

P.HÁJEK: <u>Experimentelle Logiken und Π^0_3-Theorien</u>

Experimentelle Logik ist eine rekursive Relation $H(-,-)$; $H(t,A)$ liest man "die Formel A wird akzeptiert in der Zeit t". A ist stabil, wenn $H(t,A)$ für fast alle t gilt. Mengen stabiler Formeln experimenteller Logiken wurden von Jeroslow untersucht. Nun heisse A schwach stabil, wenn die relative Frequenz der Akzeptierung von A mit t zu 1 konvergiert. T sei eine deduktiv abgeschlossene widerspruchsfreie Erweiterung der Peano-Arithmetik.

Hauptresultate: (1) $T \in \Pi^0_3$ genau dann, wenn T die Menge aller schwach stabilen Formeln einer experimentellen Logik ist. (2) Ist T beweisbar Δ^0_3, dann gibt es eine wahre Π^0_2 Formel A, $A \notin T$.
(3) Es gibt eine vollständige widerspruchsfreie beweisbar Δ^0_3 Erweiterung T der Peano-Arithmetik, die alle wahren Π^0_1 Formeln enthält und die nicht zu der durch alle Σ^0_2 Mengen erzeugten Booleschen Algebra gehört.

B.KOPPELBERG: <u>Ultrafilter</u>

Seien A, I unendliche Mengen und D ein uniformer, ω-unvollständiger Ultrafilter auf I. Man kann in ZFC ohne zusätzliche Annahmen nicht $|A^I/D| = |A|^{|I|}$ beweisen. Wenn etwa κ eine meßbare Kardinalzahl ist, so gibt es auf κ einen uniformen, ω-unvollständigen Ultrafilter F mit $|\omega^\kappa/F| = 2^\omega < \kappa$. Setzt man $\neg 0^\#$ voraus, so erhält man:

$|A|^{\lfloor I \rfloor} \leq |A^I/D| \leq |A|^{|I|}$ und $|A^{I\times I}/D\times D| = |A|^{|I|}$.

Aus $\neg 0^\#$ und GCH folgt sogar $|A|^{|I|} = |A^I/D|$.

H.LUCKHARDT: <u>Über das Markov-Prinzip</u>

Intuitionistisch hat (MP) folgende Eigenschaften! (1) Gegen (MP) ist nur $\neg\Lambda p(MP)$ möglich, kein Gegenbeispiel. (2) $\neg\neg\Lambda x(Ax \vee \neg Ax)$, $\Lambda x(\neg\neg Ax \to Ax)$ kommen als (MP)-Prämisse nicht in Frage. (3) Alle sinnvollen (MP)-Variationen sind (MP)-Äquivalente. (4) Die Beispiele mit schwachem Kripke-Schema und gesetzlosen Folgen treffen (MP) nicht.

$(MP)_{\alpha(\leq 1)}$: $\Lambda\alpha(\leq 1)\neg\neg V x A_0 \to \Lambda\alpha(\leq 1) V x A_0$ (A_0 extensional, entscheidbar)

<u>Theorem</u>: Für Wahlfolgen α, die $\lambda x.i$ umfassen: $(MP)_{\alpha(\leq 1)}$ für $A_0 \equiv A_0(\alpha x)$ oder $A_0(\overline{\alpha,x})$ mit $\overline{\alpha,x}$, aus dem die Länge x nicht

entnehmbar ist.

(5) $\Lambda\alpha(\mathrm{MP}) \Rightarrow (\mathrm{MP})_{\alpha} \Rightarrow (\mathrm{MP})_{\alpha\leq 1} \Rightarrow (\mathrm{MP})$.

<u>Theorem</u>: $\neg\exists$ stetige Bijektion zwischen $\mathbb{N}$-Wahlfolgen und 0-1-Wahlfolgen.

(6) $(\mathrm{MP})_{\alpha\leq 1} \Leftrightarrow$ Vollständigkeit (IPC^1). (7) $(\mathrm{MP})_{\alpha(\leq 1)}$ ist mit Church's These (CT) unverträglich. (8) (MP) und (CT) haben in CS analoge Metaeigenschaften.

(9) <u>Theorem</u>: In CS gilt: $(\mathrm{MP})+(\mathrm{CT}) \not\Rightarrow 0 = 1$, $(\mathrm{MP})_{\alpha\leq 1}$

$\Lambda\alpha(\mathrm{MP}) \Leftrightarrow (\mathrm{MP}) + (\Lambda a V x A_0 \rightarrow \Lambda\alpha V x A_0) \Leftrightarrow (\mathrm{MP})_{\alpha}$.

(10) <u>Fazit</u>: (MP) erweist sich als elementares und zentrales Prinzip. Die Unverträglichkeit von $\neg\neg(\mathrm{MP})_{\alpha(\leq 1)}$ und (CT) ist ein völlig offenes Problem, das sich mit heutigen Mitteln nicht lösen läßt.

G.MITSCHKE: <u>λ-Kalkül und axiomatische Rekursionstheorie</u>

E.G.Wagner und H.R.Strong haben eine elegante "algebraische" Version der Rekursionstheorie entwickelt, die Theorie der "uniformly reflexive structures (URS)". Die formale Ähnlichkeit der URS-Definition mit der Theorie der Kombinatoren + Diskriminatorregel legt einen Vergleich der beiden Systeme nahe. Es zeigt sich, daß man große Teile der elementaren URS-Theorie als Anwendung einfacher Sätze und Prinzipien der Theorie der Kombinatoren erhält.

TH.OTTMANN: <u>Komplexität universeller Turingmaschinen</u>

Es wird die von Shannon 1956 aufgeworfene und bislang nicht abschließend beantwortete Frage diskutiert, wie kompliziert eine Turingmaschine mindestens sein muß, um noch universell sein zu können. Dabei wird insbesondere auf die Probleme der Wahl eines geeigneten Kompliziertheitsmaßes sowie der in einen Vergleich verschiedener universeller Maschinen einzubeziehenden Parameter eingegangen.

Es wird untersucht, ob sich das von Shannon für eindimensionale Turingmaschinen benutzte Zustands-Bandsymbol-Produkt als Komplexitätsmaß auch für Turingmaschinen mit zweidimensionalem Band eignet. Zum Vergleich von Turingmaschinen verschiedener Typen wird später die Anzahl der insgesamt möglichen Maschinen einer Art als Kompliziertheitsmaß verwendet. Es wird die Existenz universeller zweidimensionaler Turingmaschinen gezeigt, die bei Verwendung dieses Kompliziertheitsmaßes einfacher sind als alle bisher bekannten universellen Turingmaschinen.

P. PÄPPINGHAUS: Über elementare Schnittelimination für eine Zahlentheorie zweiter Stufe

Es wird die Frage betrachtet, ob und wie die metamathematischen Mittel zum Beweis von $\exists x\, Bew_{UA}(x, \ulcorner A \urcorner) \rightarrow \exists x\, Bew_{CFA}(x, \ulcorner A \urcorner)$ von A abhängen. Dabei sei UA der folgende Formalismus der Zahlentheorie zweiter Stufe in der Sprache der primitiv-rekursiven Arithmetik mit Mengenvariablen: Axiome: die Definitionsgleichungen für die primitiv-rekursiven Funktionen sowie $1 \neq 0$. Regeln: der Sequenzenkalkül von Gentzen mit voller Verwendung von Mengentermen $\{y | A(y)\}$ für die Quantorenregeln für die Mengenvariablen; also volle Komprehension (implizit durch die Logik), aber keine Induktion. CFA ist die schnittfreie Version von UA. Es wird primitiv-rekursiv Schnittelimination für eine Formelklasse bewiesen, diese Formelklasse semantisch charakterisiert. Als Nebenprodukt ergibt sich ein neuer Beweis für Takeuti's Fundamentalvermutung für UA.

A. PETRY: Incomparability of some cardinal numbers in Quine's "New Foundations"

Let us recall: $USC(x) = \{\{y\} \mid y \in x\}$, $SC(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$.
We demonstrate that the consistency of NF implies the consistency of NF + $(\exists x)(\ |x| \nleq |USC(x)| \nleq |x| \wedge |x| \nleq |SC(x)| \nleq |x|\ )$.
We apply the Henson's method which transforms models of NF by using automorphisms.

W. POHLERS: Ordinals connected with formal theories for transfinitely iterated inductive definitions

Define ID_ν to be the formal theory for ν-times iterated inductive definitions. There is a canonical mapping into a second-order system Π^* with infinitely long formulas. Denote by P_ρ a set defined by ρ-times iterated inductive definitions, by $\tilde{P}_\rho$ its 2^{nd} order translation and by $\vdash^{\alpha}_{0} F$ that there is a cut-free proof tree of length $\leq\alpha$ for F. Then it holds:

Interpretation lemma: $ID_\nu \vdash n \in P_\rho \Rightarrow \vdash_0^\alpha n \in \tilde{P}_\rho$ for some $\alpha < \theta\varepsilon_{\omega_\nu+1}(\omega_\rho+1)$ if $\rho > 0$ or $\alpha < \theta\varepsilon_{\omega_\nu+1}0$ if $\rho = 0$.

(here $\omega_\rho, \ldots$ denotes the ρ-th admissible ordinal).

Boundedness lemma: $\vdash_0^\alpha n \in \tilde{P} \Rightarrow |n| < \omega^{\alpha+1}$ where $|n|$ is the inductive norm of n.

Pulling both together we get the

Theorem: $ID_\nu \vdash n \in P_\rho \Rightarrow |n| < \theta\varepsilon_{\omega_\nu+1}(\omega_\rho+1)$ if $\rho > 0$ or $|n| < \theta\varepsilon_{\omega_\nu+1}0$ if $\rho = 0$.

On the other side there is a inductively defined set P_0 s.t. $|n| < \theta\varepsilon_{\omega_{\nu+1}}0 \Rightarrow ID_\nu \vdash n \in P_0$ which shows that our result is the best possible. Using results of FEFERMAN we get the following statements: (a) $|(\Pi_1^1\text{-}CA)+BI| = \theta\varepsilon_{\omega_\omega+1}0$

(b) $|(\Delta_2^1\text{-}CR)| = \theta_{\omega^\omega}0$ (c) $|(\Delta_2^1\text{-}CA)| = \theta\omega_{\varepsilon_0}0$.

The theorem also implies that $\theta\omega_{\omega_1}0$ is the boundary for autonomously applied hyperjumps which resembles to the result of SCHÜTTE-FEFERMAN stating that $\theta\omega_1 0$ is the boundary for autonomously applied jumps.

A.PRESTEL, M.ZIEGLER: Die elementare Theorie vollständiger Körper

(vorgetragen von A.Prestel)

Sei (K,τ) ein topologischer Körper, dessen Topologie τ von einem Absolutbetrag oder einer Krullbewertung induziert (und nicht trivial) sein soll. (Nach Kowalsky-Dürbaum ist dies genau für V-Topologien τ der Fall.) $\widehat{(K,\tau)}$ bezeichne die topologische Vervollständigung von (K,τ) als uniformer Raum.

Sei L_t die elementare Sprache, in der eine Quantifikation über "genügend kleine" Umgebungen (bei top. Körpern o.B.d.A. der Null) erlaubt ist. $(K,\tau) \models_t \varphi$ bedeute die Gültigkeit der L_t-Aussage φ in (K,τ). $Th^t(\mathfrak{M})$ bezeichne die Menge der in allen top. Strukturen der Klasse $\mathfrak{M}$ gültigen L_t-Aussagen.

Satz: (Char K = 0) Es ist äquivalent

(a) (K,τ) algebraisch abgeschlossen in $\widehat{(K,\tau)}$

(b) $(K,\tau) \models_t (\forall U \exists x\ p(x) \in U \to \exists x\ p(x)=0)$

(c) τ setzt sich als V-Top. eindeutig auf endlich algebraische Erweiterungen von K fort.

(d) $(K,\tau) \models_t \forall U \exists V \forall p \in (K-U^{-1})[X](p'(0) \notin U \wedge p(0) \in V \rightarrow \exists x\, p(x)=0)$ (topologisches Henselsches Lemma)

(e) jede definierbare "u-Cauchy Folge" hat Häufungspunkt.

Satz: (K_1,τ_1) , (K_2,τ_2) mit (a). Ist (K_1,τ_1) dichter Teilraum von (K_2,τ_2), so gilt $(K_1,\tau_1) \prec_{L_t} (K_2,\tau_2)$.

Satz: (Char. Null)

1) Th^t(vollst. Körper) = Th^t(henselsche Körper) ist axiomatisierbar durch (b), (d) oder (e) und ist unentscheidbar.

2) $Th^t(\mathbb{C}$,kanonische Top.) entscheidbar.

3) Th^t(lokal kompakte Körper) entscheidbar.

J.REINEKE: Modellvollständigkeit bei Ringen

Eine Theorie heißt modellvollständig, falls gilt: $\forall \mathfrak{A},\mathfrak{B} \models T$: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Jede ω_1-kategorische abelsche Gruppe ist modellvollständig; ebenso jeder ω_1-kategorische Körper. Bei ω_1-kategorischen Ringen gilt dies nicht mehr. Wir bewiesen:

Satz Sei K algebraisch abgeschlossener Körper. Dann gilt

a) Sei $R := K[x_1,\dots,x_m] / (x_1^{n_1},\dots,x_m^{n_m})$ $n_i \geq 1$ für alle i. Dann ist Th(R) modellvollständig.

b) Sei $R := K[x_1,\dots,x_m] / (x_i x_j; i,j=1,\dots,m)$ und $m \geq 2$, dann ist Th(R) nicht modellvollständig. Modellbegleiter ist $Th(K[x]/(x^2))$.

c) Sei $R := K[x,y] / (x^3,y^3,x^2y,xy^2)$, dann ist Th(R) nicht modellvollständig [Modellbegleiter $Th(K[x]/(x^3))$], aber $Th(R/(x^2+y^2))$ $= Th(K[x,y]/(x^3,y^3,xy))$ ist modellvollständig. Analog findet man eine Kette von ω_1-kategorischen Ringen derart, daß R modellvollständig, $R_1 = R/A_1$ nicht, $R_2 = R_1/A_2$ ja, usw..

D.SCHMIDT: Assoziative Ordinalzahlfunktionen sind dünn

A problem of Skolem (1956) is:

If U is the set of number-theoretic functions inductively defined by:

$\lambda x.1 \in U$; $\lambda x.x \in U$;

$f,g \in U \rightarrow \lambda x.(f(x)+g(x)) \in U$; $\lambda x.(f(x)\cdot g(x)) \in U$;

$$\lambda x.f(x)^{g(x)} \in U;$$

if $\prec$ is the relation defined by:

$$f \prec g \leftrightarrow (\exists m)(\forall n{\geq}m)(f(n)<g(n)),$$

is $\langle U,\prec\rangle$ a well-ordering and, if so, what is its order type?
Skolem showed that U has a well-ordered subset with $\prec$-order type ε_0.
It has been proved that $\langle U,\prec\rangle$ is a well-ordering.
Using work of de Jongh, we prove the

Theorem. If f_1, f_2, g are 2-place monotonic increasing (i.e. $f\alpha_1\alpha_2 \geq \max(\alpha_1,\alpha_2)$) functions such that f_1, f_2 are associative, f_2 is distributive over f_1, $Cl_{\{f_1,f_2,g\}}(0)$ (the closure of $\{0\}$ under f_1, f_2 and g) is an initial segment of the ordinals and, for all except finitely many ordinals α, $\max(f_1\alpha\alpha, f_2\alpha\alpha) \leq \min(g0\alpha, g\alpha 0)$, then $Cl_{\{f_1,f_2,g\}}(0) \subseteq \Gamma_0$.

It follows from this that the order type of $\langle U,\prec\rangle$ is $\leq \Gamma_0$.

H. SCHWICHTENBERG: Bemerkungen zur Schnittelimination

Absicht des Vortrags ist es, auf eine mögliche Erweiterung der üblichen Schnitteliminationsmethode auf nicht fundierte Bäume hinzuweisen. Zur Illustration wurde ein Beweis von Kreisels No-Counterexample-Interpretation gegeben, und zwar durch Schnittelimination für die Zahlentheorie mit freien Funktionsvariablen.

D. SCOTT: Semigroups, Lattices, Intervals

Topological Semigroup Theory and Interval Analysis provide examples of continuous lattices originally defined by Scott to construct models for the λ-calculus. A new definition of M.B.Smyth (Warwich) for defining effectively given continuous lattices and computable maps was discussed. Smyth has a neat proof that the effectively given continuous lattices form a cartesian closed category (i.e. with function spaces).

D.SIEFKES: Bericht über eine Lehrveranstaltung "Theorie der Berechenbarkeit" an der TU Berlin

(Dieser Vortrag wurde während der Tagung nur als Abstract präsentiert.)

Über die klassischen Anliegen hinaus: Stützung der Churchschen These, Hinführung zur höheren Rekursionstheorie, untersuchen wir vor allem Algorithmen und Datenstrukturen. Wir betonen also die sprachliche Seite, analog zu einer "Mathematischen Logik". So formulieren wir die Äquivalenzbeweise zwischen verschiedenen Definitionen der Berechenbarkeit als Konstruktion von Compilern. Wir unterscheiden zwischen Maschinensprachen, die Wortfunktionen zu berechnen gestatten, und höheren Sprachen, bei denen die Ein/Ausgabe nicht spezifiziert ist, mit denen man daher Funktionen auf natürlichen Zahlen berechnet. Für die Definition der rekursiven Funktionen benutzen wir das spezielle Rekursionsschema

$$hx := \underline{\text{if}}\ fx = 0\ \underline{\text{then}}\ gx\ \underline{\text{else}}\ k(x,h(bx)),$$

dessen Semantik der Fixpunktsatz recht einfach liefert. Die Semantik für das allgemeine Schema $hx := \mathrm{term}(x,h)$ erhält man aus dem Rekursionstheorem. Die Existenz eines universellen Algorithmus (= Interpreter der Sprache in der Sprache) zeigt die Universalität der Sprache. (Zusammen mit Frank Müller.)

C.SMORYNSKI: Remarks on Exponential Diophantine Equations

Let $C = \{0,1,\ldots,\aleph_0\}$, $A \subseteq C$, $A^* = \{P\colon P \text{ has } n \text{ zeros}, n \in A\}$.

Thm: A^* is recursively enumerable iff

$A = \{c \in C : c > m\}$, some $m \in C$.

This generalizes the exponential case of a result of M.Davis.

R.STATMAN: Length of proofs in the predicate calculus

Bounds on Proof-search and Speed-up in the predicate calculus. Special emphasis on open problems.

K.STEFFENS: Hochzeiten in abzählbaren Graphen

Eine Hochzeit H in einem Graphen $G = (V,E)$ ist eine Menge von eckendisjunkten Kanten. Liegt jede Ecke $v \in V$ auf einer Kante aus H, so heißt H perfekt. Ein Weg $(v_i)_{i<k\leq\omega}$ heißt H-Tauschweg, falls $v_0 \in V - V(H)$, $\{v_{2i},v_{2i+1}\} \in E - H$ für alle i mit $2i+1 < k$,

$\{v_{2i+1}, v_{2i+2}\} \in H$ für alle i mit $2i+2 < k$ und $v_{k-1} \notin V(H)$, falls $k \leq \omega$. Ein Graph G genügt der Bd. (A), falls zu jeder Hochzeit H und zu jeder Ecke $v \in V(G) - V(H)$ ein H-Tauschweg existiert, der mit der Ecke v beginnt.

Satz. Ein abzählbarer Graph besitzt eine perfekte Hochzeit genau dann, wenn er der Bd. (A) genügt.

Satz. Jeder abzählbare Graph $G = (V,E)$ besitzt eine $\subseteq$-maximale Teilmenge $V' \subseteq V$, die eine perfekte Hochzeit besitzt.

Die Voraussetzung der Abzählbarkeit der Graphen ist in beiden Sätzen nicht entbehrlich.

B.J.STEPHAN: Eine Theorie der effektiven Mathematik und Fragmente der klassischen Analysis

Zunächst wird eine intuitionistische Theorie T erster Stufe formuliert, die eine (geringfügige) Variante einer Theorie von S.FEFERMAN darstellt. Die Theorie T umfaßt Axiome für Kombinatoren, ein Komprehensionsschema für elementare Formeln, ein Vereinigungsaxiom sowie ein Induktionsprinzip. Ein modelltheoretischer Konsistenzbeweis für die klassische Variante von T kann nach FEFERMAN innerhalb der Π^1_2-Analysis plus Bar-Induktion geführt werden. Um die beweistheoretische Stärke der Theorie T zu untersuchen, wird zunächst auf die Reduktion der klassischen Π^1_1-Analysis auf eine Theorie IDR^c_ω mit ω-fach iterierter induktiver Definition zurückgegriffen. Es zeigt sich, daß eine Theorie IDP^c_ω, die in gewisser Weise dieselbe Ordinalzahl wie IDR^c_ω charakterisiert, in einer mit T konsistenten Erweiterung von T interpretiert werden kann. Für die klassische Δ^1_2-Analysis wird eine hierzu analoge Vermutung begründet.

L.W.SZCZERBA: Interpretability of elementary theories

It is possible to generalise Tarski's notion of interpretation to a such one as to cover interpretability of Euclidean geometry in arithmetic of real numbers. The generalisation is following: Let $\mathfrak{A}$ be a structure, and $c=\langle n,\varphi,\psi,\xi_0,\dots,\xi_{r-1}\rangle$ where $\varphi,\psi,\xi_0,\dots,\xi_{r-1}$ are formulas in the language of $\mathfrak{A}$ and n is a natural number not equal to zero. We put

$$\Gamma c\mathfrak{A} = \langle A^n;R_0,\dots,R_{r-1}\rangle\lceil S_{/\approx}$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

where R_i is a relation defined on A^n by a formula ξ_i, S is a non-empty subset of A^n defined by φ and $\approx$ is a congruence relation on S defined by ψ. We say that an elementary theory T is interpretable in T' (in symbols $T \leq T'$) if there is c such that

$$\mathrm{Mod}T' \subseteq \mathrm{Dom}\Gamma c \wedge T = \mathrm{Th}\vec{\Gamma} c \mathrm{Mod}T'.$$

Completeness, decidability, $\aleph_0$-categoricity and stability are hereditary with respect to $\leq$, but $\aleph_1$-categoricity, model-completeness and finite axiomatisability are not.
We say that the theory T is universal if for any theory T' with finite signature, there is $T'' \leq T$ (with the same language) such that $T' \leq T'' \leq T'$ (and moreover both interpretations commute up to isomorphism). The following theories are universal: the logical theory of one symmetric relation, the theory of partial order, the theory of lattices, the theory of two unary functions, and the theory of one unary function and one equivalence relation.

A.S.TROELSTRA: <u>Special cases of generalized continuity which are conservative over intuitionistic arithmetic</u>

(Dieser Vortrag wurde während der Tagung nur als Abstract präsentiert.)
Let generalized continuity be the schema GC

$$\forall\alpha[A\alpha \to \exists\beta B(\alpha,\beta)] \to \exists\gamma\forall\alpha[A\alpha \to !\gamma|\alpha \wedge B(\alpha,\gamma|\alpha)]$$

where A is almost negative (i.e. does not contain $\vee$, nor $\exists$ except before prime formulae); α,β are variables for functions from N into N; $\gamma|\alpha \simeq \beta$ expresses $\forall x(\gamma(\langle x\rangle * \bar{\alpha}(\min_z[\gamma(\langle x\rangle * \bar{\alpha}z) \neq 0])) = \beta x+1)$, and $!\gamma|\alpha$ is short for $\exists\beta(\gamma|\alpha \simeq \beta)$. If $A\alpha$ is of the form: "α is an associate (neighbourhood function) of an extensional or intensional continuous functional of type σ", then the corresponding class of instances of GC, when added to intuitionistic elementary analysis, produces a conservative extension of intuitionistic arithmetic.

J.K.TRUSS: <u>On Sets having Calibre $\aleph_1$</u>

The Boolean algebra B is said to have <u>calibre $\aleph_1$</u> if for any uncountable subset A of $B - \{0\}$ there is $b \in B - \{0\}$ such that $\{a \in A : b \leq a\}$ is uncountable. I shall prove the following theorems.
<u>Theorem 1</u>: If B is a complete Boolean algebra having calibre $\aleph_1$, then B is countably generated.

Theorem 2: Assume CH. Then any complete atomless Boolean algebra having calibre $\aleph_1$ is isomorphic to the category algebra (= Borel sets / meagre sets).

Theorem 3: Let B satisfy the c.c.c. and C have calibre $\aleph_1$. Then

$$[\![C \text{ has calibre } \aleph_1]\!]^B = 1.$$

Theorem 4: If $A_{\aleph_1}$ is true and B satisfies the c.c.c., then

$$[\![\text{the amoeba algebra has calibre } \aleph_1]\!]^B = 1.$$

M.ZIEGLER: Eine elementare Sprache für topologische Strukturen

L^2 sei die elementare Sprache für zweisortige Strukturen $(\mathfrak{A}, \alpha, \varepsilon)$, ($\mathfrak{A}$ L-Struktur, $\alpha \subset \mathcal{P}(A)$, A Grundbereich von $\mathfrak{A}$). Die folgende Teilsprache L_t ist geeignet für topologische Strukturen $(\mathfrak{A}, \alpha)$ (α also eine Topologie) in folgendem Sinn:

Satz: a) L_t erfüllt den Kompaktheitssatz für topologische Strukturen: d.h. Wenn jede endliche Teilmenge einer Menge von L_t-Aussagen von einer topologischen Struktur erfüllt wird, gilt diese Menge in einer geeigneten topologischen Struktur.

b) L_t erfüllt den Satz von Löwenheim-Skolem, d.h. zu jeder top. Struktur $(\mathfrak{A}, \alpha)$ gibt es eine top. Struktur $(\mathfrak{B}, \beta)$ mit $|\mathfrak{B}| \leq \omega$ und β mit abzählbarer Basis.

c) L_t ist maximal mit a) und b): Jede "Logik für topologische Strukturen", die L_t enthält und a), b) erfüllt ist gleich L_t.

Definition von L_t: L_t wird aus den atomaren Formeln $x \in X$ und den atomaren Formeln für L mit $\wedge$, $\neg$, $\exists x$ aufgebaut. Hinzukommt die Anwendung von $\exists X \ni x\ \phi(X)$, wobei hier X nicht positiv in φ vorkommen darf.

J.Schulte Mönting, Tübingen