MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 17/1976

Grundlagen der Geometrie

19.4. bis 24.4.1976

Die traditionelle Tagung über "Grundlagen der Geometrie" fand dieses Jahr nach zweijähriger Pause unter der Leitung der Herren F. Bachmann und E. Sperner vom 19.4. bis 24.4.1976 statt. Der große Teilnehmerkreis (39 Teilnehmer) und die zahlreichen Vorträge - es wurden 33 Referate in 4 Tagen gehalten - beweisen die Anziehungskraft dieser Tagung für Mathematiker des In- und Auslandes.

Das Forschungsgebiet der "Grundlagen der Geometrie" erlebte in den vergangenen 3 Jahrzehnten eine starke Expansion, die eine Differenzierung der einzelnen Forschungsrichtungen innerhalb der Grundlagen der Geometrie bewirkte und fast zur Verselbständigung einzelner Teilgebiete dieser Disziplin führte. Man denke z.B. an die nicht-desarguesschen affinen und projektiven Geometrien und ihre Klassifikation bzw. an den Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff oder Verallgemeinerungen der Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Geometrien sowie Geometrien mit nicht-eindeutiger Verbindungsgeraden. Im Hinblick auf diese starke Differenzierung hat die Tagung über Grundlagen der Geometrie ihre Bedeutung in der Zusammenführung von Vertretern der verschiedenen Forschungsrichtungen, die durch die Analyse der speziellen Ergebnisse in Referaten und Diskussionen zu einer Synthese der Grundlagen der Geometrie beitragen.

Das Vortragsprogramm der diesjährigen Tagung gibt einen Eindruck von der Breite des Spektrums der Grundlagen der Geometrie und zeigt, welche Fragen und Probleme derzeit im Mittelpunkt des Interesses stehen. Schwerpunkte des Programms bildeten Themen der Inzidenz- und metrischen Geometrie, darüber hinaus wurden Fragen des Zusammenhangs von Geometrie und Gruppen sowie von Geometrie und Topologie behandelt. In zahlreichen Gesprächen und Diskussionen konnten die Teilnehmer der Tagung viele Anregungen und Informationen für die eigene Forschungsarbeit gewinnen. Die angenehme Atmosphäre des Oberwolfacher Instituts bot vielfältige Gelegenheit zum Gedankenaustausch und trug damit wesentlich zum Erfolg der Tagung bei.

Zudem bot die Oberwolfacher Tagung einen angemessenen Rahmen, Herrn H. Lenz zu seinem 60. Geburtstag am 22.4.1976 zu beglückwünschen. Die gemütliche Geburtstagsfeier am Abend, zu der Herr Sperner und das Oberwolfacher Institut als Gastgeber großzügige Beiträge leisteten, wird allen Tagungsteilnehmern in guter Erinnerung bleiben.

Teilnehmer

J. André, Saarbrücken
H.-J. Arnold, Duisburg
F. Bachmann, Kiel
A. Barlotti, Bologna
I. Becker, Duisburg
W. Benz, Hamburg
D. Betten, Kiel
A. Beutelspacher, Mainz
L. Bröcker, Münster
E. Ellers, Toronto
E. Fischer, Duisburg
H.R. Friedlein, Santiago
R. Fritsch, Konstanz
M. Götzky, Kiel
H. Groh, Darmstadt
H.-R. Halder, München
W. Heise, München
A. Herzer, Mainz
P. Klopsch, Kiel
H.-J. Kroll, München
F. Kuhn, Saarbrücken
W. Leißner, Bochum
H. Lenz, Berlin
R. Lingenberg, Karlsruhe
H. Lüneburg, Kaiserslautern
J. Misfeld, Hannover
G. Nicoletti, Bologna
U. Ott, Gießen
D. Row, Duisburg
H. Salzmann, Tübingen
R. Schüler, Duisburg
E. Sperner, Hamburg
R. Stölting, Erlangen
K. Strambach, Erlangen
C. Stroscher, Stuttgart
L.W. Szczerba, Warsaw
G. Törner, Darmstadt
A. Wagner, Birmingham
H. Wolff, Kiel

Vortragsauszüge

J. ANDRE: Über verschiedene Klassen von Unterräumen in Räumen mit nichtkommutativer Verbindung

Wir betrachten Verbindungsräume, d.h. Strukturen der Form $V = (X, \sqcup)$ mit $X \neq \emptyset$, $\sqcup : X^2 \setminus \Delta_X \to \mathcal{P}(X)$, $(x,y) \mapsto x \sqcup y$, so daß $x, y \in x \sqcup y$ gilt. Die Abbildung $\sqcup$, genannt Verbindung, ist nicht notwendig kommutativ. Wir führen weitere Axiome so ein, daß V ein affiner Raum wird, wenn $\sqcup$ zusätzlich kommutativ ist, und gelangen so zu den quasiaffinen und fastaffinen Räumen. Es werden fünf Klassen von Unterräumen in natürlicher Weise in V eingeführt und miteinander in Beziehung gesetzt. Ist insbesondere V ein endlicher fastaffiner Raum, so stimmen alle diese Klassen überein.

H.-J. ARNOLD: Richtungsalgebren

Über die Begriffsbestimmung von Richtungsalgebren $(\mathcal{R}, +, ^{-}, \rho)$ s. Tagungsbericht 1975 ("Punktalgebren mit Involution"). Satz 1: In jeder Richtungsalgebra $\mathcal{R}$ mit

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

dim $\mathcal{R}=3$ läßt sich eine und bis auf Inversion nur eine Orientierungs - Indikatrix definieren, d.h. eine Abbildung $\mathcal{R}\times\mathcal{R}\to\mathcal{P}(\mathcal{R})$; $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\mapsto\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subset\mathcal{R}$, für welche gilt $\{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\}$ l.a. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\{\mathfrak{o}\}$ und die für $\{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\}$ l.u. erfüllt:
1. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\overline{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}$, 2. $\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}=\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$, 3. $\mathfrak{c}\in\mathfrak{a}\mathfrak{b}\succ\mathfrak{a}\in\mathfrak{b}\mathfrak{c}$,
4. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{r}+\mathfrak{b}\mathfrak{r}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, 5. $\mathcal{R}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\dot{\cup}\,\mathfrak{b}\mathfrak{a}\,\dot{\cup}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{r}+\mathfrak{b}\mathfrak{r})$.

[Dabei bezeichnet $\mathfrak{a}\mathfrak{r}$ die von $\mathfrak{a}$ erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{R}$, es gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{r}=\mathfrak{a}+\bar{\mathfrak{a}}$.] Ferner wurde der Begriff des schwach affinen Richtungsraumes (angeordneter schwach affiner Raum) eingeführt.

Satz 2: Jede dreidimensionale Richtungsalgebra kann als Projektion eines geeigneten zwei-äugig homogenen schwach affinen Richtungsraumes aufgefaßt werden. Insoweit wird der nicht-desarguessche Fall auch im Dreidimensionalen der Indikatrix teilhaftig.

A. BARLOTTI: <u>Zusammenhänge zwischen Klassen von Translationsebenen und Faserungen</u>

Auszug aus einer Arbeit von G. Lunardon (Bologna).

Wir setzen die Andrésche Darstellung der Translationsebenen durch Faserung als bekannt voraus.

Für Ebenen der Klasse VII hat Herzer (1974) die zugehörigen (regulären) Faserungen durch Schließungssätze charakterisiert.

Auf der Suche nach Anwendungen dieser Methode auch für Translationsebenen allgemein fand G. Lunardon den Begriff der (A,B)- bzw. A-regulären Faserungen, und mit Hilfe von Schließungssätzen (Herzer) können dadurch Faserungen zu den Ebenen der Klasse IV a 2 bzw. V-1 gekennzeichnet werden.

I. BECKER: <u>Kennzeichnung geometrisch äquivalenter Gruppen</u>

Existiert in einer affinen Liniengeometrie (siehe H.-J. Arnold, Die Geometrie der Ringe im Rahmen allgemeiner affiner Strukturen, Hamburger Math. Einzelschriften, N.F. Heft 4, 1971) eine scharf einfach transitive Quasitranslationsgruppe, so ist diese Gruppe i.a. nicht eindeutig bestimmt. Daraus resultiert eine geometrische Äquivalenzrelation auf der Klasse der vektoriellen Gruppen, welche zur algebraischen Beschreibung der affinen Liniengeometrie dienen. Es wird eine Charakterisierung geometrisch äquivalenter vektorieller Gruppen mit Hilfe von Gruppenerweiterungen angegeben.

W. BENZ: <u>Zur Charakterisierung von Lorentz-Transformationen</u>

Eine Bijektion des $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, die in beiden Richtungen die p.e. Distanz o erhält, ist bis auf eine Dilatation Lorentz-Transformation (i.w. A.D. Alexandrov, V.V. Ovchimikova, Borchers, Hegerfeldt...). Auch die Zeemansche Charakterisierung über Kausalautomorphismen funktioniert nur für $n \geq 3$. Im Falle $n \geq 2$ dagegen gilt: Invarianz der p.e. Distanz 1 charakterisiert genau die Lorentz-Transformationen. Für $n = 2$ kann 1 durch jedes $\varrho \neq o$ ersetzt werden, im Fall $n > 2$ durch jedes $\varrho > o$.

D. BETTEN: Die Projektivitätengruppe der Moulton-Ebenen

Ein Homöomorphismus α der Kreislinie auf sich heiße stückweise projektiv, falls eine Aufteilung der Kreislinie in endlich viele Intervalle existiert, so daß die Beschränkung von α auf jedes Intervall übereinstimmt mit der Beschränkung eines Elementes aus $PSL_2(R)$. Es wurde bewiesen: Für jede Moulton-Ebene M_k ist die Projektivitätengruppe als Permutationsgruppe isomorph zur Gruppe aller stückweise projektiven Homöomorphismen der Kreislinie. Insbesondere ist die Projektivitätengruppe transitiv auf der Menge der orientierten n-Tupel von Punkten (n natürlich)

A. BEUTELSPACHER: Einbettung von Teilfaserungen in Faserungen

Ist P ein projektiver Raum, so heißt eine Menge S von Geraden eine 1-Faserung von P, falls jeder Punkt von P auf genau einer Geraden aus S liegt; S heißt 1-Teilfaserung, falls jeder Punkt von P auf höchstens einer Geraden aus S liegt. Es wurden Beweis, mögliche Verallgemeinerungen und Anwendung des folgenden Satzes erörtert:

Satz. Ist S eine 1-Teilfaserung eines endlichen projektiven Raumes P, so gibt es einen endlichen projektiven Raum P_1, der P als Unterraum enthält, und eine 1-Faserung T von P_1 mit $S \subseteq T$.

L. BRÖCKER: Über die Anzahl der Anordnungen eines Körpers

Bekanntlich gibt es zu jeder natürlichen Zahl ℓ einen Körper K mit genau ℓ Anordnungen. Ist aber 2^n die Zahl der Quadratsummenklassen von K, so gilt für die Anzahl ℓ der Anordnungen von K: $n \leq \ell \leq 2^{n-1}$. Es wird eine Rekursionsformel entwickelt, die es gestattet, für jede natürliche Zahl n die genauen Anzahlen ℓ von Anordnungen zu berechnen, die ein Körper mit 2^n Quadratsummenklassen zuläßt. Die verwendeten Methoden lassen auch eine konstruktive Beschreibung der Klasse der reduzierten Wittringe zu.

E. ELLERS: Äquiaffine Gruppen

Die von den Scherungen erzeugte Untergruppe der affinen Gruppe heißt äquiaffine Gruppe. Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Coxeter. Satz: Gegeben sei eine Pappussche affine Geometrie beliebiger Dimension. Es sei π eine äquiaffine Abbildung, $B(\pi)$ ihre Bahn und $d=\dim B(\pi)$. Ist π eine Translation, parabolische Drehung oder große Dilatation, dann läßt sich π als Produkt von $d+1$, aber nicht von weniger Scherungen schreiben. In allen anderen Fällen sind genau d Scherungen notwendig, um π darzustellen.

E. FISCHER: Über eine Einbettungsfrage für unendliche, reguläre Inzidenzstrukturen

Wir verwenden den Begriff der regulären Inzidenzstruktur in einem etwas verschärften Sinn gegenüber PICKERT, und zwar nennen wir eine Inzidenzstruktur $(P, \Lambda, \in)$ regulär, wenn sie die Eigenschaften

1) $\Lambda \neq \emptyset$,

2) $\bigwedge_{\alpha \in \Lambda} |\alpha| \geqq 3$,

3) $\alpha, \beta \in \Lambda \wedge |\alpha \cap \beta| \geqq 2 \Rightarrow \alpha = \beta$

hat. Insbesondere heiße $(P, \Lambda, \in)$ unendlich, wenn die Punktmenge P unendlich ist.

Seien $(P, \Lambda, \in)$ und $(\bar{P}, \bar{\Lambda}, \in)$ reguläre Inzidenzstrukturen.
Sei ferner $M \subset P$. Wir sagen, $(\bar{P}, \bar{\Lambda}, \in)$ sei eine (echte) Oberinzidenzstruktur von $(P, \Lambda, \in)$, wenn

1) $P \underset{(\neq)}{\subseteq} \bar{P}$,

2) $\Lambda \subset \bar{\Lambda}$,

3) $\alpha \in \bar{\Lambda} \wedge |\alpha \cap P| \geqq 2 \Rightarrow \alpha \in \Lambda$

erfüllt sind. Sie heiße M-projektiv, wenn sie darüber hinaus

4) $\bigwedge_{\substack{(a,b) \in \bar{P}^2 \setminus P^2 \\ a \neq b}} \bigvee_{\alpha \in \bar{\Lambda}} \{a,b\} \subset \alpha$,

5) ("M-VEBLENaxiom")

$$\left.\begin{array}{l} a,b,c,d \in \bar{P} \\ a \neq b \neq c \neq d \neq a \\ \{a,b\}h \cap \{c,d\}h \neq \emptyset \\ |A \cap P| \leqq 2 \\ A \cap P \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap M \neq \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow \{a,d\}h \cap \{b,c\}h \neq \emptyset$$

befriedigt.

(Dabei bedeutet für zwei verschiedene Punkte $x,y \in \bar{P}$ $\{x,y\}h$ die Hülle von $\{x,y\}$ in $(\bar{P}, \bar{\Lambda}, \in)$, d.i. der Durchschnitt aller $\{x,y\}$ umfassenden Unterräume von $(\bar{P}, \bar{\Lambda}, \in)$. Ferner ist mit A die Menge $\{z \mid z=a \vee z=b \vee z=c \vee z=d\}$ gemeint).

<u>Satz:</u> Sei $(P, \Lambda, \in)$ eine unendliche, reguläre Inzidenzstruktur und P' eine unendliche Teilmenge von P. Jeder nichtleeren, endlichen Teilmenge M von P' lasse sich eine M-projektive, reguläre, echte Oberinzidenzstruktur $(P_M, \Lambda_M, \in)$ so zuordnen, daß die Monotonieeigenschaft $\emptyset \neq M_1 \subset M_2 \subset P' \wedge |M_1|, |M_2| < \aleph_0 \Rightarrow (P_{M_2}, \Lambda_{M_2}, \in)$ Oberinzidenzstruktur von $(P_{M_1}, \Lambda_{M_1}, \in)$ erfüllt ist. Dann existiert eine P'-projektive, reguläre, echte Oberinzidenzstruktur von $(P, \Lambda, \in)$.

H.R. FRIEDLEIN: <u>Normalformen für Bewegungen in elliptischen Räumen</u>

Jede Bewegung α eines elliptischen Raumes kann man darstellen durch ein Produkt der Art

$$\alpha = \prod_{j=1}^{m} p_j \prod_{i=1}^{n} g_i l_i$$

mit $g_i=(0,G_i)$; $l_i=(0,L_i)$; $i \in \{1,\ldots,n\}$;

$0 \mid P_j$; $P_j \mid P_{j'}$; $j \neq j'$; $j,j' \in \{1,\ldots,m\}$. Dabei gilt ferner $E(g_i,l_i) \perp E(g_{i'},l_{i'})$ und der Schnitt von $E(g_i,l_i)$ mit $E(g_{i'},l_{i'})$ besteht genau aus dem Punkt 0 für $i' \neq i$, $i,i' \in \{1,\ldots,n\}$. Ähnlich kann jede Bewegung eines halbelliptisch metrischen Raumes auf diese Normalform gebracht werden.

R. FRITSCH: <u>Epimorphismen zwischen projektiven Räumen</u>

Epimorphismen zwischen projektiven Ebenen sind von Stellen der zugehörigen Ternärkörper induziert (vgl. J. André, über Homomorphismen projektiver Ebenen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg <u>34</u>/197o, 98-114). Dieser Sachverhalt läßt sich unmittelbar auf Epimorphismen zwischen projektiven Räumen gleicher endlicher Dimension übertragen. Schwächt man die Voraussetzung gleicher Dimension ab zu der Bedingung, daß Geraden auf Geraden abgebildet werden (unter Beibehaltung der Endlichkeit der Dimensionen), so erhält man zusätzliche Epimorphismen, also solche, die die Dimension erniedrigen. Die angegebenen Beispiele beruhen auf Eigenschaften von Rang 1-Bewertungen von Körpern.

M. GÖTZKY: <u>Eine Charakterisierung einer Klasse involutorisch erzeugter Gruppen als Bewegungsgruppen metrischer Inzidenzstrukturen</u>

Sei $\mathcal{J} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathrm{I})$ mit $\mathcal{P} \cap \mathcal{G} = \emptyset \neq \mathrm{I} \subseteq (\mathcal{P} \times \mathcal{G} \cup \mathcal{G} \times \mathcal{G})$ und $\mathcal{P} \neq \emptyset \neq \mathcal{G}$, vermöge $u \mid v :\Leftrightarrow (u,v) \in \mathrm{I}$ oder $(v,u) \in \mathrm{I}$, eine metrische Inzidenzstruktur.

Seien Stern $A := (\{A\}, \{g \in \mathcal{G};\ g \mathrm{I} A\}, \mathrm{I})$ und Kamm $a := (\{X \in \mathcal{P};\ X \mathrm{I} a\}, \{a\} \cup \{x \in \mathcal{G};\ x \mathrm{I} a\}, \mathrm{I})$ mit $A \in \mathcal{P}$ und $a \in \mathcal{G}$. Es sei $\operatorname{Fix} \alpha = (\{X \in \mathcal{P};\ X^{\alpha} = X\}, \{x \in \mathcal{G};\ x^{\alpha} = x\}, \mathrm{I})$ für $\alpha \in \operatorname{Aut} \mathcal{J}$. Eine von der Menge I ihrer Involutionen erzeugte Gruppe $G \leq \operatorname{Aut} \mathcal{J}$ heißt eine Bewegungsgruppe von $\mathcal{J}$, wenn eine surjektive Abbildung

$$\sigma:\ \mathcal{P} \cup \mathcal{G} \rightarrow I;\ u \mapsto \sigma_u$$

existiert, welche den Bedingungen

$$\operatorname{Fix} \sigma_A = \text{Stern } A \quad \text{und} \quad \operatorname{Fix} \sigma_a = \text{Kamm } a \qquad (A \in \mathcal{P},\ a \in \mathcal{G}) \quad \text{genügt.}$$

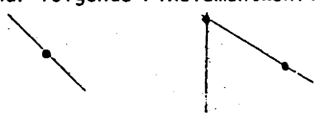
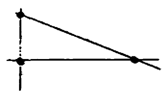
Es folgt: σ ist injektiv, und es gilt $\mathcal{J} \cong (\mathcal{P}^{\sigma}, \mathcal{G}^{\sigma}, \mathrm{I})$ mit $\sigma_u \mathrm{I} \sigma_v$ für $\sigma_u \cdot \sigma_v \in I$, wenn nur $\mathcal{J}$ nichtelliptisch und nichtausgeartet ist.
Unter den gleichen Voraussetzungen über $\mathcal{J}$ lassen sich die Bewegungsgruppen G von $\mathcal{J}$ durch die Eigenschaften

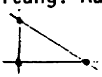
$$(\mathcal{P}^{\sigma})^2 \cap I = \emptyset \quad \text{und} \quad (I \setminus \mathcal{P}^{\sigma})^2 \cap I = \mathcal{P}^{\sigma}$$

gruppentheoretisch charakterisieren.

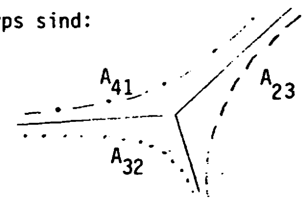
H. GROH: <u>Ebene projektive Ebenen, deren Automorphismengruppe R^2 enthält</u>

In einer nichtdesarguesschen ebenen (= 2-dimensionalen) projektiven Ebene kann $\Delta \cong R^2$ nur folgende Fixelementkonfigurationen haben:


und

.

Eine Klassifizierung der unter die ersten beiden Fälle fallenden Ebenen wurde in vorausgegangenen MRI - Tagungen vorgetragen; die Manuskripte sind eingereicht bzw. in Vorbereitung. Auf der obigen Tagung wurde gezeigt, daß die Ebenen des Falles (R^2, ) die Klebe - Summe von vier Salzmann - Ebenen (= R^2- Ebenen) $(P_i, \mathcal{L}_i)$ folgenden Typs sind:

$(P_1, \mathcal{L}_1) = P_{e,T}(A_{23}, A_{32}, A_{41})$:



, ...

Wesentliches Hilfsmittel ist die Klassifizierung aller Salzmann - Ebenen mit 2 - dimensionaler punkttransitiver Automorphismengruppe ("R^2- planes with 2-dimensional point transitive automorphism group", erscheint in Abh. Math. Sem. Hamburg).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

W. HEISE: Über einen Satz von de Bruijn

Es sei P eine v - Menge und F eine k - Menge Π bzw. Φ seien Permutationsgruppen auf P bzw. F. Das direkte Produkt $\Pi \times \Phi$ operiert als Exponentiationsgruppe Φ^{Π} vermöge $(\pi,\phi)(f) := \phi^{-1}f\pi$ treu auf F^P. Es gibt

$$(|\pi|^{-1}|\phi|^{-1} \sum_{\pi\in\Pi} \sum_{\phi\in\Phi} \prod_{i=1}^{v} (\frac{\partial}{\partial z_i})^{\alpha_i(\pi)} \prod_{j=1}^{k} (\exp(js_j - 1))^{\mu_j(\phi)}) \Big|_{z_1=\ldots=z_v=0}$$

Bahnen surjektiver Abbildungen auf F^P. Dabei ist $s_j := z_j + z_{2j} + \ldots + z_{\left[\frac{v}{j}\right]\cdot j}$ und $\alpha_i(\pi)$ bzw. $\mu_j(\phi)$ die Anzahl der Zyklen der Länge i bzw. j von $\pi\in\Pi$ bzw. $\phi\in\Phi$. Dieser Satz hat geometrische Anwendungen.

A. HERZER: Koordinatisierung zweiseitiger Inzidenzgruppen

Ist $(\mathbf{P}, \mathbb{L}, T, \parallel)$ eine wohlverteilte projektiv darstellbare zentrale Orthotranslationsgeometrie, so läßt sich diese mittels einer K-Algebra R und einem System von Untergruppen M einer Gruppe von Einheiten E von R als $L(E/K^*, M)$, darstellen, wobei $\mathbf{P}$ zu $R/K \cap E^*/K^*$ isomorph ist.
Dieses Ergebnis läßt sich als Verallgemeinerung desjenigen Satzes (Karzel - Wähling) auffassen, welcher einer zweiseitigen projektiven Inzidenzgruppe ein Körperpaar D,K - K im Zentrum von D - zuordnet.

P. KLOPSCH: Metrisch - euklidische Bewegungsgruppen

Im wesentlichen wird folgender Satz bewiesen:
Sei K ein Körper von Charakteristik $\neq 2$, $V = V_n(K,f)$ ein n-dimensionaler anisotroper metrischer Vektorraum über K $(n \geq 2)$, $O(V)$ die orthogonale Gruppe von V und U eine Untergruppe $\neq \{0\}$ der additiven Gruppe von V mit der Eigenschaft: Aus $f(a,b)=0$ und $a+b\in U$ folgt $a,b\in U$ für alle $a,b\in V$. Dann ist $U\alpha \subseteq U$ für alle $\alpha\in O(V)$, und das halbdirekte Produkt $O(V) \times U$ ist eine metrisch - euklidische Bewegungsgruppe der n-dimensionalen absoluten Geometrie im Sinne von F. Bachmann (Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, 2. Aufl.).-
Jede solche metrisch - euklidische Bewegungsgruppe läßt sich in dieser Weise darstellen.

H.-J. KROLL: Perspektivitäten in Benz - Ebenen

Den Parallelperspektivitäten in affinen und den Perspektivitäten in projektiven Ebenen entsprechend lassen sich in jeder Benz - Ebene zwei Mengen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{P}$ von Perspektivitäten definieren. Die Gruppen $\Gamma(\mathcal{B})$ bzw. $\Gamma(\mathcal{P})$ bzw. $\Gamma(\mathcal{B}\cup\mathcal{P})$ der Permutationen eins Kreises K, die sich als Ketten von Abbildungen aus $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{B}\cup\mathcal{P}$ schreiben lassen, operieren dreifach transitiv auf K. Es wird die Frage nach der scharfen dreifachen Transitivität der Gruppen $\Gamma(\mathcal{B})$, $\Gamma(\mathcal{P})$ und $\Gamma(\mathcal{B}\cup\mathcal{P})$ diskutiert.

F. KUHN: Zur Begründung der Liniengeometrie im Raum

Ist K ein kommutativer pythagoräischer Körper und $(A(K^3),f)$ der euklidische Raum darüber mit f als Standardskalarprodukt, so läßt sich die Gruppe der eigentlichen Bewegungen dieses Raumes (G,S) - S die Menge der Geradenspiegelungen - axiomatisch kennzeichnen. Dabei sind die Axiome ähnlich denen von Bachmann - Verbindbarkeits-, Dreispiegelungs- und Reichhaltigkeitsaxiome - , dazu wird noch ein besonderes Axiom benötigt, das die Existenz von Punkten sichert.

H. LÜNEBURG: Verallgemeinerte André - Ebenen und Hilberts Satz 90.

André - Ebenen besitzen eine in gewissem Sinne große abelsche Kollineationsgruppe. Versucht man diesen hier nicht näher geschilderten Sachverhalt umzukehren, so stößt man auf folgendes Problem: Es sei L eine galoissche Erweiterung von K und G ihre Galoisgruppe. Ferner sei n der Normenhomomorphismus von L^* in K^*. Wann ist $\mathrm{Ker}(n) = \langle l^{g-1} \mid l \in L^*, g \in G \rangle$? Dies ist gleichbedeutend mit der Frage: Wann ist $H^{-1}(G,L^*)$ trivial? Dies bedeutet für die Geometrie, daß die verallgemeinerte André - Ebene, die man bekommt, schon eine André - Ebene ist. Hilberts Satz 90 besagt nun, daß $H^{-1}(G,L^*)$ sicher dann trivial ist, wenn G zyklisch ist. Sätze der Kohomologietheorie besagen nun, daß dies auch dann der Fall ist, wenn alle Sylowgruppen von G zyklisch sind. Im allgemeinen dürfte es sehr schwierig sein, $H^{-1}(G,L^*)$ auszurechnen.

J. MISFELD: Beziehungen zwischen Topologie und Halbordnung in projektiven Ebenen

O. Wyler zeigte 1952, daß eine angeordnete projektive Ebene in der Ordnungstopolgie eine topologische projektive Ebene ist (d.h. Schneiden und Verbinden sind stetige Operationen). Verallgemeinert man den Begriff der Anordnung zu dem der SPERNERschen Halbordnung, so sind in der Halbordnungstopologie die Zentralprojektionen stetig. Ist der Raum zusammenhängend, so läßt sich im harmonischen Fall zeigen, daß die Halbordnung im zugehörigen Ternärkörper eine transitive Relation induziert, also bereits eine volle Anordnung ist.

G. NICOLETTI: A New Class of Sperner's Spaces

A new class of Sperner's spaces is determined, which contains Hughes planes and desarguesian planes.

U. OTT: Bemerkungen über Fahnen und involutorische Homologien in endlichen projektiven Ebenen

Es wird über folgende Sätze berichtet:

S1: Eine fahnentransitive Ebene gerader Ordnung ist von Primzahlpotenzordnung, oder sie hat eine scharf fahnentransitive Automorphismengruppe.

S2: Fahnentransitive Ebenen ungerader Ordnung sind von Primzahlpotenzordnung.

S3: Sei $\mathbb{A}$ eine endliche affine Ebene, und sei G eine Kollineationsgruppe der Ebene derart, daß jeder spezielle Punkt von einer involutorischen Homologie aus G festgelassen wird. Dann gilt:
G hat auf der unendlichfernen Geraden genau zwei Bahnen. Die von den involutorischen Homologien erzeugte Untergruppe hat ein normales 2 - Komplement und 2 - Sylowgruppen der Ordnung zwei.

S4: Sei $\mathbf{P}$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung n, und sei G eine Kollineationsgruppe der Ebene derart, daß jede Fahne von einer involutorischen Homologie aus G festgelassen wird.
Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

1. $\mathbf{P}$ ist desarguessch, $G \geq PSL(3,n)$.
2. G läßt ein Unital fest, $\mathbf{P}$ ist von Primzahlpotenzordnung. Enthält G keine Baer - Involutionen, dann ist $\mathbf{P}$ sogar desarguessch, und es gilt: $G \geq PSU(3,n)$.
3. G läßt ein Oval fest, $\mathbf{P}$ ist desarguessch, $G \geq PSL(2,n)$.
4. G läßt eine Anti - Fahne fest, $\mathbf{P}$ ist desarguessch, $G \geq SL^{\pm}(2,n)$.
5. $\mathbf{P}$ ist eine verallgemeinerte Hughes - Ebene (einschließlich des desarguesschen Analogons), $G \geq PSL(3,\sqrt{n})$ oder $G \geq SL(3,7)$.
6. G läßt eine Gerade l fest, $\mathbb{P}^l$ ist eine Translationsebene, $G \geq \mathrm{Tr}(\mathbb{P}^l)$.
7. Dual zu 6.

D. ROW: Homomorphismen offener Erweiterungen

Sei C eine nichtgeschlossene projektive Ebene, dann hat C nichttriviale Homomorphismen.
Sei Λ eine Kollineation von C, alle Λ - Klassen endlich. Es gibt einen offenen Prozeß $\mathcal{E} = (E)$ von C mit $\Lambda E = E$, $\forall E$.
Deshalb hat Λ endliche Ordnung, wenn C einen endlichen freien Rang hat.

H. SALZMANN: 8-dimensionale Ebenen

Eine kompakte, 8-dimensionale topologische projektive Ebene, deren Automorphismengruppe mindestens 25-dimensional ist oder eine mindestens 14-dimensionale kompakte Untergruppe besitzt, ist isomorph zur Quaternionen - Ebene.

R. SCHOLER: Stufen der Homogenität in distributiven schwach affinen Räumen

Wenn in einem distributiven O - Ebenenstern A ein von O verschiedener Punkt C existiert, der denselben Fernraum erzeugt wie O ($f_C(A) = f_O(A)$), so nennen wir A (C,O) - homogen. $\mathfrak{c}$ sei der Fernpunkt der Verbindungsgeraden von O und C. Dann spannt $\mathfrak{c}$ mit jeder nicht durch $\mathfrak{c}$ verlaufenden Geraden des Fernraums eine projektive Ebene auf (Arnold). Falls ein mit O und C nichtkollinearer Punkt D existiert, so daß A (D,O) - homogen ist und sind $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{z}$ die Fernpunkte der Seiten des Dreiecks O,C,D, so spannen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ mit jedem nicht auf ihrer Verbindungsgeraden gelegenen Punkt eine Desarguessche projektive Ebene auf. Nimmt man einen nicht mit O, C, D komplanaren Punkt E hinzu, bezüglich dessen A (E,O) - homogen ist, und ist $\mathfrak{n}$ der Fernpunkt der Verbindungsgeraden von O und E, so spannt in $f_O(A)$ die Ebene $\mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \mathfrak{n}$ mit jedem nicht in ihrer Ebene gelegenen Punkt einen projektiven Raum auf. Wenn in A ein Punkt A existiert, so daß A von den Punkten O, C, D, E, A erzeugt wird, so ist A ein drei- oder vierdimensionaler affiner Raum.

E. SPERNER: Produkte von schwach affinen Ebenen

Die Umkehrung der Zweitafel - Projektion, die zuerst vom Vortragenden zur Konstruktion nicht - desarguesscher schwach affiner Räume benutzt wurde, und eine später von A. Barlotti angegebene n - dimensionale Verallgemeinerung gestatten eine weitere umfassende Verallgemeinerung, die sich als Produktbildung "geschichteter" schwach affiner Räume darstellen läßt. Diese ermöglicht u.a. durch Iteration die Konstruktion großer Klassen schwach affiner Räume, welche durch Rückgang auf die "Faktorräume" auch konstruktiv beherrscht werden können.

R. STÖLTING: Eine Klasse endlicher Hjelmslev - Gruppen

Es wurde eine Charakterisierung derjenigen endlichen Hjelmslev - Gruppen angegeben, deren 2-Komplemente eine triviale Frattinigruppe haben: Ihre 2-Komplemente bestehen aus gewissen subdirekten Produkten von Normalteilern ungerader Ordnung der Gruppen der metrisch-euklidischen sowie der Minkowskischen Geometrien über endlichen Körpern von ungerader Charakteristik.

K. STRAMBACH: Mehrfach scharf transitive Liesche Moufang - Loops

Operiert auf einem lokalkompakten Raum M eine mehrfach scharf transitive Liesche Moufang - Loop L, so läßt sich auf M eine Addition + so definieren, daß M isomorph zur Vektorgruppe $\mathbb{R}^8$ ausfällt und $L=L(h)$ aus den Abbildungen

$$\{x \longmapsto ax + b;\ a \neq 0,\ b \in \mathbb{O}\}$$

besteht, wobei $\mathbb{O}$ die klassische Oktavendivisionsalgebra bedeutet; das Produkt $\beta\alpha$ der Elemente α: $x \longmapsto ax + b$ und β: $x \longmapsto cx + d$ ist dann in $L(h)$ gemäß der Regel

$$\beta\alpha: x \longmapsto (ca)x + [c(bh)]h^{-1} + d$$

mit einem festen $0 \neq h \in \mathbb{O}$ erklärt. Zwei Moufang - Loops $L(h_1)$ und $L(h_2)$ sind genau dann isomorph (abstrakt und permutationstheoretisch), wenn $h_1 h_2^{-1}$ eine reelle Zahl ist.

L.W. SZCZERBA: Do we know all the Notions of Geometry?

There is a gap between axiomatic approach to Euclidean geometry and Klein's Erlangen program: In commonly known axiomatic systems of geometry only countably many notions may be defined, but there is $2^{\aleph_1}$ invariants over the group of similitudes. Thus not all invariants may be defined. On the other hand for any finite measure μ, any invariant relation R and any positive number ε there is a definable relation R' such that

$$\mu'(R \setminus R') < \varepsilon$$

where μ' is a measure induced by μ in a proper Cartesian power of the universe.

G. TÖRNER: Zum Aufbau von Hjelmslev-Ebenen

Es seien H, H' endliche (projektive bzw. affine bzw. fastaffine) Hjelmslev-Ebenen (H-Ebenen). Eine inzidenztreue surjektive Abbildung $\psi: H \to H'$ heißt verfeinerte Nachbarschaft, falls sie fern- und nahtreu ist. Jede H-Ebene besitzt (bis auf Isomorphie) genau eine Folge von epimorphen Bildern H_i und verfeinerten Nachbarschaften $\psi_i: H_{i+1} \to H_i$, so daß H_1 die zugehörige projektive bzw. affine Ebene ist. Die H-Ebene H heißt vom Typ n, falls diese Folge (Auflösung von H) die Länge n hat. Sind (t_{i+1},r) bzw. (t_i,r) die Invarianten von H_{i+1} bzw. H_i, so heißt t_{i+1}/t_i Stufenparameter q_{i+1}. Mithin ist die Invariante t einer H-Ebene H vom Typ n Produkt der q_i, d.h. $t = q_n \cdots q_2$. Im Vortrag werden Bedingungen für die Existenz und die Nichtexistenz gewisser Stufenparameter angegeben. Für den Fall, daß sämtliche Stufenparameter gleich der Ordnung der zugehörigen affinen bzw. projektiven Ebene sind, läßt sich eine geometrische Charakterisierung angeben. Den Unterschied im Aufbau von FAH-Ebenen bzw. PH-/AH-Ebenen belegt die Existenz einer (6,2)-FAH-Ebene vom Typ 3, während (6,2) PH-/AH-Ebenen, deren Existenz noch nicht gesichert ist, vom Typ 2 sein müssen.

A. WAGNER: Reflection Groups over a finite Field

Let $G \leq PGL(V_n,F)$, $|G|<\infty$, G primitive and containing reflections (a reflection is an element which may be represented by:

$$\begin{pmatrix} a & & & & 0 \\ & b & & & \\ & & b & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & b \end{pmatrix}).$$

A complete solution for $F = \mathbb{C}$ was given by Mitchel in 1914. We shall discuss this problem for F a field of finite characteristic. If there are reflections present of order >2 the solution is easy. If all reflections have order 2 a longer list of groups results.
N.B. That G be primitive is needed only to exclude rather trivial cases.

H. WOLFF: Zur Begründung der minkowskischen Geometrie

Bei der in Math. Ann. 171 (1967), S. 166-18o durchgeführten "Begründung" der minkowskischen Geometrie traten beim Beweis der Tatsache, daß sich nichtparallele Idealgeraden stets schneiden, einigermaßen komplizierte Konfigurationen und spekulative Oberlegungen auf (vgl. l.c. S. 172-175). Hierbei hilft jetzt folgendes Lemma radikal ab:

Lemma: Aus $A|a$; $B|b$; A,B unverbindbar; $a \nparallel b$ folgt:

Es gibt ein X mit X,A unverbindbar und $XAX^a|a,b$.

Das Lemma handelt nur von Punkten und Geraden (also nicht von den nur spekulierten trägerlosen Geradenbüscheln), es ist leicht zu beweisen, und die gewünschten Schnittsätze folgen aus ihm alle leicht und natürlich.

Ilse Becker, Duisburg

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft