MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 18/1976

Mehrdimensionale konstruktive Funktionentheorie

25.4. - 1.5.1976

Die Fortschritte, die in den letzten Jahren auf dem Gebiet der mehrdimensionalen konstruktiven Funktionentheorie erzielt worden sind, ließen es wünschenswert erscheinen, in Oberwolfach eine Tagung über dieses Thema zu veranstalten. Die Leitung übernahmen W. Schempp (Siegen) und K. Zeller (Tübingen). Der Tagung wohnten 46 Teilnehmer bei, die u.a. aus Frankreich, den Niederlanden, Österreich, Rumänien, Schweden und den USA kamen. Das der Tagung entgegengebrachte Interesse war so groß, daß nicht alle Teilnahmewünsche erfüllt werden konnten. Dies läßt erkennen, daß Tagungen dieser Art einem wirklichen Bedürfnis entsprechen und künftig in kürzeren Zeitabständen stattfinden sollten.

Die 28 Vorträge erfaßten ein breites Spektrum von Problemen; daraus ergab sich ein besonders fruchtbarer Gedankenaustausch. Behandelt wurden Themen aus der Theorie der Spline-Approximation und der Finiten Elemente, der mehrdimensionalen Interpolation und Kubatur, der Approximation durch Bernstein-Polynome, der Theorie der speziellen Funktionen der mathematischen Physik und der Theorie der intermediären Räume. Die Vorträge machten ebenso wie die Diskussionsbeiträge deutlich, daß die konstruktive Funktionentheorie in einem fruchtbaren Spannungsverhältnis zwischen der Funktionalanalysis auf der einen Seite und der angewandten Mathematik auf der anderen Seite steht. Es ist geplant, einen Ergebnisband der Tagung herauszugeben.

Der Institutsleitung sei für die Übernahme der neuen Tagung ins Programm gedankt.

Teilnehmer

Albrecht, J.	Clausthal-Zellerfeld
Ansorge, R.	Hamburg
Berens, H.	Erlangen
Berns, U.	Siegen
Björneståł, B.O.	Stockholm
Blatt, H.-P.	Mannheim
Böhmer, K.	Karlsruhe
Boman, J.	Stockholm
Braess, D.	Bochum
Bragard, G.	Aachen
Brass, H.	Osnabrück
Brosowski, B.	Frankfurt
Delvos, F.-J.	Siegen
DeVore, R.	Rochester
Dreseler, B.	Siegen
Duchon, J.	Grenoble
Fromm, J.	Dortmund
Hämmerlin, G.	München
Haußmann, W.	Duisburg
Helfrich, H.-P.	Freiburg
Hoffmann, K.-H.	Berlin
Hrach, R.	Bochum
Jetter, K.	Tübingen
Johnen, H.	Bielefeld
Knoop, H.-B.	Duisburg
Koornwinder, T.H.	Amsterdam
Möller, H.M.	Dortmund
Niethammer, W.	Mannheim

Nitsche, J.	Freiburg
Pottinger, P.	Duisburg
Rauch, E.	Siegen
Reimer, M.	Dortmund
Sard, A.	New York
Schäfer, W.	Siegen
Schempp, W.	Siegen
Scherer, K.	Bonn
Schmid, H.J.	Erlangen
Schnabl, R.	Wien
Scholz, R.	Freiburg
Schurer, R.	Eindhoven
Shapiro, H.S.	Stockholm
Sommer, M.	Erlangen
Stancu, D.D.	Cluj
Trebels, W.	Darmstadt
Werner, H.	Münster
Zeller, K.	Tübingen

Vortragsauszüge

J. ALBRECHT: Zur numerischen Integration auf Kreisbereichen

Zur numerischen Integration über Kreisbereichen

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} u(x,y)\,dx\,dy = \pi \sum_{\nu=1}^{N(n)} a_\nu u(x_\nu,y_\nu) \qquad (\,u(x,y)\in \mathbb{P}_{4n-1}\,,\; n=1;2;3,4;5,6,7,8;..)$$

ist man bestrebt, minimale Stützstellenzahl $N(n)$ zu erreichen, jedoch so, daß $x_\nu^2+y_\nu^2\leq 1$ und $a_\nu>0$. Einige Kubaturformeln mit diesen beiden Eigenschaften, bei denen allerdings offen ist, ob $N(n)$ minimal ist, verwenden die Ecken regelmäßiger Polygone als Stützstellen:

$$\sum_{\nu=1}^{N(n)} a_\nu u(x_\nu,y_\nu) = \sum_{\nu=1}^{P_4(n)} s_{4,\nu} S_4(\sigma_{4,\nu}) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{Q_4(n)} t_{4,\nu} T_4(\tau_{4,\nu}) + \sum_{\nu=1}^{Q_8(n)} t_{8,\nu} T_8(\tau_{8,\nu}) + \sum_{\nu=1}^{Q_{16}(n)} t_{16,\nu} T_{16}(\tau_{16,\nu}) + \ldots$$

mit

$$S_{2m}(\sigma) = \sum_{\mu=1}^{2m} u\left(\sigma\cos\mu\frac{\pi}{m},\sigma\sin\mu\frac{\pi}{m}\right) \qquad (\,2m = 4\,)\,,$$

$$T_{2m}(\tau) = \sum_{\mu=1}^{2m} u\left(\tau\cos(2\mu-1)\frac{\pi}{2m},\tau\sin(2\mu-1)\frac{\pi}{2m}\right) \qquad (\,2m = 4;\ 8;\ 16;\ ..\,).$$

n	N(n)	$P_4(n)$	$Q_4(n)$	$Q_8(n)$	$Q_{16}(n)$	
1	4	1				v. Mises
2	12	2	1			Hammer, Stroud
3	28	3	2	1		
4	44	4	3	2		Mysovskich
5	76	5	4	3	1	
6	108	6	5	4	2	
7	140	7	6	5	3	
8	172	8	7	6	4	

H. BERENS: Über Bernsteinpolynome in mehreren Veränderlichen

Sei $\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x+y \leq 1 \}$ und $f \in C(\Delta)$. Nach Dinghas ist für $n \geq 1$ das n-te Bernsteinpolynom $B_n f(x,y)$ definiert durch

$$B_n f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} f(\tfrac{\nu}{n},\tfrac{\mu}{n}) \binom{n}{\nu} \binom{n-\nu}{\mu} x^\nu y^\mu (1-x-y)^{n-\nu-\mu} \quad .$$

Im Vortrag wird insbesondere das Verhalten von $B_n f$ für konvexe Funktionen f untersucht. So gelten: Für $n \geq 2$ erhält der Bernsteinoperator B_n nicht die Konvexität, wohl aber die Achsenkonvexität. Dabei ist $f \in C(\Delta)$ achsenkonvex, falls f konvex ist auf jeder Geraden, die parallel zur x-Achse, oder y-Achse, oder x+y=1 - Achse verläuft. Ist $f \in C(\Delta)$ achsenkonvex, dann konvergiert $B_n f$ monoton fallend gegen f. Insbesondere folgt:

$$(*) \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n(B_n f(x,y) - f(x,y)) \geq 0 \quad , \quad (x,y) \in \Delta \, .$$

Die Umkehrung ist falsch. Hier gilt: Ist für ein $f \in C(\Delta)$ die Beziehung (*) im Innern von Δ erfüllt, dann ist f subharmonisch bzgl. des elliptischen Differentialoperators

$$Af(x,y) = \frac{x(1-x)}{2} f_{xx}(x,y) - xyf_{xy}(x,y) + \frac{y(1-y)}{2} f_{yy}(x,y) \quad .$$

Hieraus läßt sich die Saturation von $\{B_n : n=1,2,..\}$ folgern: Es gilt der punktweise "o"-Satz: Sei $f \in C(\Delta)$

$$\lim_{n\to\infty} n(B_n f(x,y) - f(x,y)) = 0 \iff f \text{ linear} \quad .$$

Der "O"-Satz wurde diskutiert, eine befriedigende Beschreibung der Saturationsklasse konnte nicht angegeben werden. Die oben angegebenen Ergebnisse gehen auf Herrn Dr. H. J. Schmid und den Vortragenden zurück.

H. BERENS - R. DEVORE : Quantitative Korovkin Theorems in L_p

If (L_n) is a sequence of positive linear operators mapping $L_p(I^m)$ ($I^m = [0,1]^m$) into itself, let

$$u^2_{n,p} = \max_{i=0,..,m+1} ||a_i - L_n(a_i)||_p$$

with $a_o \equiv 1$, $a_i(t) = t_i$ $(i=1,..,m)$, $a_{m+1}(t) = t_1^2 +..+ t_m^2$.

It is well known that if $u^2_{n,p} \to 0$ $(n \to \infty)$ then $||f - L_n(f)||_p \to 0$ for each $f \in L_p$. In this work, we give quantitative estimates for this result. For example, if f is in the Sobolev space W^2_∞ then we have

$$||f - L_nf||_p \le C||f||_{W^2_\infty} . u^2_{n,p} ,$$

with C an absolute constant. When $\theta > 0$ and $r = [\theta] + 1$, let $W^{\theta,q}_p$ denote the Besov space of all functions f with

$$\left(\int_0^1 (t^{-\theta}\omega_{r,p}(f,t))^q . \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty ,$$

with $\omega_{r,p}$ the r-th order L_p moduli of smoothness. Then the space $W^{2+\frac{n}{p},1}_p$ is continuously embedded in W^2_∞ . So we have the estimate:

$$||f - L_nf||_p \le C||f||_{W^{2+\frac{n}{p},q}_p} . u^2_{n,p} , \text{ for each } f \in W^{2+\frac{n}{p},1}_p .$$

Using interpolation theory this gives estimates for the classical Lipschitz spaces $W^{\theta,\infty}_p$ if $\theta < 2 + n/p$. Namely, when $f \in W^{\theta,\infty}_p$, $\theta < 2 + n/p$, we have :

$$||f - L_nf||_p \le C||f||_{W^{\theta,\infty}_p} . u^{2\theta/(2+n/p)}_{n,p} .$$

The same estimates can be obtained for more general domain Ω . For example bounded regions Ω whose boundary has the uniform cone property.

K. BÖHMER: Blendingmethoden für gemischte Randwertvorgaben auf Dreiecken

Auf dem Rand eines Dreiecks seien die Werte einer Funktion und/oder ihrer Ableitungen bekannt. Durch Blendingmethoden werden rationale Approximationsfunktionen konstruiert und deren Konvergenzverhalten studiert, wenn der Durchmesser des Dreiecks gegen Null konvergiert.

J. BOMAN: Directional regularity of vector valued functions

If $\xi \in \mathbb{R}^n$ and $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, define the directional modulus of continuity of f by

$$\omega_\xi(f;t) = \sup \{|f(x+u\xi) - f(x)|;\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < u < t\} .$$

Let Λ be given finite set of pairs $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, let $\rho(t)$ be a positive, subadditive, continuous function, $\rho(0) = 0$, and denote by $<\ ,\ >$ the usual inner product in $\mathbb{R}^n$. Assume that $\omega_\xi(<\eta,f>;t) \leq \rho(t)$ for each $(\xi,\eta) \in \Lambda$. Does it follow that f is continuous, and if so, what can be said about the modulus of continuity of f ? It turns out that the conclusion is either none, or

$$\omega(f;t) \leq C.t \int_t^1 u^{-2}\rho(u)\,du \ , \text{ or } \quad \omega(f;t) \leq C\rho(Bt) \ ,$$

depending on Λ (J. Boman, Acta Math. 119 (1967), 1 - 25). In the talk the solution of this problem will be shown to be a special case of a comparison theorem for generalized moduli of continuity $\omega_\sigma(f;t)$ (for background and terminology see H. S. Shapiro, Topics in Approximation Theory, Lecture Notes in Mathematics vol. 187, Springer Verlag 1971, Chapter 9.4). The new feature of the comparison theorem given here is that the measure σ is vector valued.

G. BRAGARD: Lokaler Vergleich linearer kommutativer Verfahren in Banach-Moduln

Der Vergleichssatz mit lokaler Teilbarkeitsvoraussetzung, den H. S. Shapiro in Acta Math. 120 (1968) für die Räume $L^p(\mathbb{R}^n)$ $L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$, bewies, läßt sich im Rahmen von Banach-Moduln verallgemeinern. Erfüllt die Banach-Algebra X gewisse Voraussetzungen and lassen sich Approximationsverfahren μ_t durch Homomorphismen T_t, $t>0$ aus Elementen $\mu \in X$ gemäß der Vorschrift $\mu_t = T_t\mu$ erzeugen, so gilt für die Approximation in Banach X-Moduln E unter der lokalen Teilbarkeitsvoraussetzung $\mu\hat{}(m) = \zeta\hat{}(m)\nu\hat{}(m)$ (für m aus einer (offenen) Teilmenge des Raums maximaler Ideale) die Abschätzung

$$\|f \circ \mu_t\|_E \leq C_1 \|f \circ \nu_t\|_E + C_2 \sum_{j=0}^{\infty} \|f \circ \nu_{t_o s^j t}\|_E$$

für alle $f \in E$ und gewisse Konstanten C_1, C_2, t_o, $0<s<1$. Wir diskutieren die abstrakten Bedingungen im Raum lokalkompakter abelscher Gruppen G und kommen so zu einer Bedingung an G, die den lokalen Teilbarkeitssatz in den Gruppenalgebren bzw. für $L^p(G)$ impliziert. Weiterhin betrachten wir die Algebra der L^p-Multiplikatoren und zeigen für die Approximation durch die Riezs-Mittel einen Äquivalenzsatz.

F. J. DELVOS: Blending-Approximation

Es werden zweidimensionale Interpolationsmethoden behandelt, die auf Booleschen Summen von n Projektoren ($n \in \mathbb{N}$) basieren. Diese Blendingmethode n-ter Ordnung stellt eine Erweiterung der von W. J. Gordon entwickelten Blendinginter - polation dar. Die Abhängigkeit des Blendings n-ter Ordnung von n wird für den Fall der numerischen Kubatur untersucht.

B. DRESELER: Zu Entwickelungen nach sphärischen Funktionen gehörende Approximationsverfahren

Ein wichtiger Aspekt einer großen Klasse spezieller Funktionen besteht darin, sie als sphärische Funktionen auf einer kompakten homogenen Mannigfaltigkeiten X aufzufassen. Wir haben diesen geometrischen Ursprung gewisser spezieller Funktionen benutzt, um die zugehörigen Fourierentwicklungen auf X und Summationsverfahren zu diesen Entwicklungen zu untersuchen. Hierzu transformieren wir die Approximationsprobleme in Multiplikatorenprobleme und lösen einige dieser Probleme durch die Untersuchung der Wechselwirkung zwischen der Euklidischen Multiplikatorentheorie auf dem Tangentialraum X_1 in einem Basispunkt $1 \in X$ und der Multiplikatorentheorie auf X. Als wichtiges Hilfsmittel beweisen wir auf beliebigen symmetrischen Räumen X von kompaktem Typ Analoga zum Restriktionstheorem 3.6 [1; Chapter VII] und zum Passage-Theorem 3.18 [1; Chapter VII] im Buch

[1] Stein, E. M. , Weiss, G. : Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.

Als Anwendung erhalten wir die Konstruktion einer großen Klasse approximativer Einheiten auf X , Multiplikatorentheoreme, Saturationstheoreme und Vergleichstheoreme im Sinne von Favard.

J. DUCHON : Splines with rotation-invariant energy

As an example, we consider functions of the form

$$(1) \quad \sum_{a \in A} \lambda_a |t-a|^2 \mathrm{Log}|t-a|^2 + \alpha . t + \beta$$

with $\Sigma\lambda_a = 0$ and $\Sigma\lambda_a a = 0$, where A is a finite subset of $\mathbb{R}^2$. If no line contains A , there is exactly one function of the form (1), say σ , taking prescribed values $f(a)$, $a \in A$. It has the following variational property: putting

$$|v|^2_{2,\mathbb{R}^2} := \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} |D_i D_j v|^2 ,$$

$$|\sigma|_{2,\mathbb{R}^2} = \inf\{|v|_{2,\mathbb{R}^2} ; v = f \text{ on } A\} .$$

As a consequence, the following convergence result holds:

if $f \in H^2(\Omega)$ and $\{A_k\}$ is a sequence of sets with $d(t,A_k) \to 0$, $\forall\, t \in \Omega$, then the sequence $\{f^k\}$ of interpolants of the form (1) converges to f in $H^2(\Omega)$.
Many extensions are possible, replacing $\mathbb{R}^2$ by $\mathbb{R}^n$, D^2 by D^m, L^2-norms by other rotation-invariant norms, interpolation by smoothing, point evaluation by other linear functionals, and so on.

J. FROMM : Orthogonale Polynome in mehreren Veränderlichen mit Rodrigues-Darstellung

In naheliegender Analogie zum eindimensionalen Fall wird der Begriff einer Rodrigues-Darstellung für eine Familie von Polynomen mehrerer Veränderlicher so gefaßt, daß sich die Orthogonalität der so definierten Polynome in einfacher Weise aus dem Ansatz heraus ergibt.
Für die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ werden die möglichen Gewichts - funktionen bestimmt. Es wird eine explizite Darstellung dieser Polynome angegeben und ihre Werte auf der Einheitssphäre bestimmt. Auf natürliche Weise ergibt sich daraus eine umkehrbar eindeutige lineare Beziehung zwischen orthogonalen und homogenen Polynomen.

G. HÄMMERLIN : Zur Anwendung von Splines auf Integralgleichungen

Zur numerischen Behandlung von homogenen Fredholmschen Integral - gleichungen 2. Art

$$\lambda\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt \qquad (\, s \in [a,b] \,)$$

bietet sich eine Approximation durch ausgeartete Kerne der Gestalt

$$\tilde{K}(s,t) = \sum_{j,k=0}^{m} c_{jk} y_j(s) y_k(t)$$

an. Verwendet man insbesondere die Blending-Approximation

$$\tilde{K}(s,t) = \sum_{j=0}^{n} K(s_j,t)\beta_j(s) + \sum_{k=0}^{n} K(s,t_k)\beta_k(t) - \sum_{j,k=0}^{n} K(s_j,t_k)\beta_j(s)\beta_k(t),$$

$\{\beta_j\}$ eine Spline-Basis, so ist die Lösung der Integralgleichung

$\tilde{\tilde{\lambda}}\tilde{\varphi} = \tilde{\tilde{K}}\tilde{\varphi}$ der Lösung des linearen Gleichungssystems $\tilde{\lambda}\underline{d} = CY\underline{d}$ mit Matrizen C und Y äquivalent, die sich aus K(s,t) und der Spline-Basis berechnen lassen. Fehlerabschätzungen und numerische Vergleiche zeigen die Brauchbarkeit der Methode.

K. JETTER : <u>Numerische Fourier-Analyse und gleichmäßige Approximation auf Würfeln</u>

Die Asymtotik der Fourier-Koeffizienten

$$a_k = (1/2^n)\int_{Q_n} f(t).\exp(-\pi ikt)dt$$

einer auf dem n-dimensionalen Einheitswürfel Q_n definierten, reelwertigen Funktion $f \in C^{m,\dots,m}(Q_n)$ hängt im wesentlichen vom Grad der (stetig) periodisch fortsetzbaren partiellen Ableitungen von f ab. Aufgrund dieser Tatsache wurden im Fall $n = 1$ zur Numerischen Fourier-Analyse und zur Gleichmäßigen Approximation auf Q_n Methoden vorgeschlagen, die darauf beruhen, die Funktion zunächst derart zu interpolieren, daß der Interpolationsfehler $f - Pf$ einschließlich einiger Ableitungen periodisch fortsetzbar ist (vgl. Lanczos 1964, Ehlich 1966, Jones and Hardy 1970, Lyness 1974). Unter Verwendung der sog. Blending-Methode läßt sich diese Idee auf den höherdimensionalen Fall übertragen.

H. JOHNEN, K. SCHERER : <u>The K-functional spaces on spaces of Sobolev type in several variables</u>

Let Ω be an open Lipschitz graph domain in $\mathbb{R}^n$ and $H_p^r(\Omega)$ the closure of the r-times continuously differentiable functions in the Sobolev space $W_p^r(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$. Setting

$$|g|_{p,r} = \sup_{|\beta|=r} \|D^\beta g\|_p \quad \text{for} \quad f \in H_p^r(\Omega)$$

then the K-functional K_r is given for $t>0$ and $f \in H_p(\Omega)$ by

$$K_r(t,f) = \inf\{\|f-g\|_p + t|g|_{p,r} ; g \in H_p^r(\Omega)\} \quad .$$

Defining the r-th modulus of smoothness of $f \in H_p(\Omega)$ by

$$\omega_r(t,f) = \sup_{0<|h|<t} ||\Delta^r(h)f||_{p,\Omega(rh)} \quad , \text{ where}$$

$$\Delta^r(h)f(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k}\binom{r}{k} f(x+kh) \quad \text{for}$$

$$x \in \Omega(rh) = \{ x \in \Omega ; x+trh \in \Omega \text{ for all } t \in [0,1]\}$$

and $||.||_{p,\Omega(rh)}$ is the L_p-norm on $\Omega(rh)$, there holds the

<u>Theorem</u>: There exists a constants $c_1,c_2>0$, depending only on r and Ω such that

$$c_1\omega_r(t,f) \leq K_r(t^r,f) \leq c_2\omega_r(t,f)$$

for $0<t\leq 1$ and $f \in H_p(\Omega)$.

This theorem is applied to obtain inequalities between various K-functionals and item various moduli of smoothness. Furthermore, it allows the construction of extension operators on $H_p(\Omega)$ which preserve the modulus of smoothness as well as applications to many other problems.

T. H. KOORNWINDER : <u>Two-variable analogues of Jacobi polynomials</u>

First a short survey will be given of several classes of ortho - gonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of partial differential operators. Then we specialize to a class of polynomials denoted by $R^{\alpha,\beta,\gamma}_{n,k}(\xi,\eta)$, which are orthogonal on a region bounded by two straight lines and a parabola touching these lines. The main topic of this lecture will be the derivation of a series expansion of $R^{\alpha,\beta,\gamma}_{n,k}(\xi,\eta)$ in terms of so-called James type zonal polynomials. This series expansion is analogous with the hypergeometric power series expansion for Jacobi polynomials. If time permits then finally the group theoretic interpretation of these polynomials as sperical functions on Grassmann manifolds will be discussed.

H. M. MÖLLER : Mehrdimensionale Hermite-Interpolation

Eine Interpolationsaufgabe für Funktionen in n Variablen wird in Anlehnung an die Bezeichnungen im eindimensionalen Fall Hermite-Interpolationsaufgabe genannt, wenn die Polynomlösungen der homogenen Aufgabe ein nulldimensionales Ideal bilden. Die Polynomräume werden näher angeben, in denen diese Interpolations - aufgabe eindeutig lösbar ist. Hieraus läßt sich eine Charakteri - sierung der numerischen Integrationsformeln ableiten. Bei Betrachtung nulldimensionaler Ideale mit n-gliedriger Basis ergibt sich eine n-dimensionale Verallgemeinerung des Satzes von Max Noether, aus der man, wie an Beispielen erläutert wird, Verfahren zur Konstruktion numerischer Integrationsformeln, Darstellungssätze für nicht-negative Polynome und Antworten auf Eindeutigkeitsfragen für mehrdimensionale Splines erhalten kann.

W. NIETHAMMER : Bemerkungen zur numerischen analytischen Fort - setzung von Potenzreihen

Es wird die Verwendung von Matrix-Summierungsverfahren zur numerischen analytischen Fortsetzung von Potenzreihen untersucht. Ein Satz von Perron und Okada liefert den Fortsetzungsbereich für eine beliebige Potenreihe, falls man den Fortsetzungsbereich für die geometrische Reihe kennt. Letzterer wird für die Klasse der Sonnenschein- und Euler-Verfahren bestimmt. Anschließend wird der Konvergenzfaktor eingeführt und seine Verwendung für eine Fehlerabschätzung und ein Abbruchkriterium dikutiert. Ferner wird gezeigt, wie sich der gemeinsame Fortsetzungsbereich für die Klasse der in einem einfach zusammenhängenden Gebiet holomorphen Funktionen als Enveloppe einer Kurvenschar ergibt.

J. NITSCHE : Zur Konvergenz von Projektionen auf Finite Elemente

Im ersten Teil werden Jackson- und Bernstein-Sätze für Finite Elemente in Sobolev-Räumen mit gewichteten Normen behandelt. Im zweiten Teil wird als Anwendung die Beschränktheit der L_2-Projektion in der Maximum-Norm gezeigt.

P. POTTINGER : Zur mehrdimensionalen Approximation mit stetigen linearen Abbildungen

Bei mehrdimensionalen Approximationsprozessen, die durch Tensorproduktbildung aus eindimensionalen Verfahren gewonnen werden, ergibt sich im allgemeinen deswegen eine schlechtere Fehlerabschätzung, weil die betreffenden Operatornormen multiplikativ eingehen. Dies wirkt sich insbesondere dann nachteilhaft aus, wenn die Folge der Operatornormen bestimmt divergiert. Es erhebt sich die Frage, ob für Funktionenklassen trotzdem dieselbe Konvergengüte erhalten werden kann. Wir leiten unter Benutzung der Theorie der normierten Tensorprodukte ein Konzept zur Lösung dieser Fragestellung her. Insbesondere ergeben sich hierbei für stetig differenzierbare Funktionen bei der Approximation mit der mehrdimensionalen Lagrange- und Hermiteinterpolation an den Čebyšev-Knoten dieselben Konvergenzordnungen wie im eindimensionalen Fall.

M. REIMER : Clenshaw-Teilsummen in mehreren Veränderlichen

Bei Auswertungsverfahren für reelle Polynome in mehreren Veränderlichen spielt die Größenordnung der auftretenden Zwischenergebnisse, der Clenshaw-Teilsummen, eine dominierende Rolle. Damit das Verfahren bei großem Polynomgrad stabil bleibt, dürfen diese Teilsummen mit der Dimension des zugrunde gelegten Polynomraumes höchstens schwach anwachsen. Diese Forderung ist besonders gut erfüllt, wenn der Algorithmus auf der Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen 2. Art aufgebaut wird.

A. SARD : Function spaces for analysis

The spaces A are like the spaces B of my book "Linear approximation" exept that the norm in A is of L^p type, $1 \leq p < \infty$, rather than a supremum. The elements of A are functions on a (many dimensional) compact interval I. For suitable j and k, $C_j(I) \subset A \subset C_k(I)$, with dominating topologies. An element of the adjoint space A^* may involve only part of I and need not to have a rectangular character.
For each $F \in A^*$ the present paper gives accessible, explicit formulas

for Fx, $x \in A$, and for $||F||$. The spaces A are distinguished in this respect. For the space $C_j(I)$, for example, an explicit procedure for obtaining a representation of an arbitrary element (distribution) of $C_j(I)^*$ and its norm is apparently not known, no matter what norm is used in $C_j(I)$.

W. SCHÄFER : Fehlerabschätzungen bei der mehrdimensionalen Spline Interpolation

Es sei (X,Y,Z;U,F) ein erweitertes Sard-System(vgl. Delvos-Schempp, An extension of Sard's method, Lect. N. in Math. 501 (1976), 80-91) und P der durch Ker P = Ker F definierte Spline Projektor. Ferner sei A der eindeutig bestimmte positiv definite selbstadjungierte Operator in Y mit dem Energieraum H_A = Ker F, so daß für $x \in H_A$ und für $y \in D(A)$ die Beziehung $(x,Ay)_Y = (Ux,Uy)_Y$ erfüllt ist. Außerdem sei $G: H_A \to W$ eine stetige lineare Abbildung in einen Hilbertraum W und Q der durch Ker Q = Ker G definierte "homogene" Spline Projektor auf H_A. Definiert man dann auf X den "inhomogenen" Spline Projektor $\tilde{P}$ durch $\tilde{P}x = Px + Q(x-Px)$, so gilt die Abschätzung $||A^{\alpha/2}(x-\tilde{P}x)|| \leq c^{1-\alpha}\ ||U(x-Px)|| \leq c^{1-\alpha}\ ||Ux||$ $(x \in X,\ 0 \leq \alpha \leq 1;$

$c = \sup\limits_{\substack{x \in H_A \\ x \neq 0}} \frac{||x-Qx||}{||Ux||}$. Es ist nun das Ziel des Vortrages, diese Abschätzung mit Hilfe des Ansatzes zur "optimalen Flächeninterpolation" (vgl. Delvos, On surface interpolation, J. Approx. Th. 15 (1975), 209-213) auf mehrere Dimensionen zu verallgemeinern und am Beispiel der zweidimensionalen Spline Interpolation mit verallgemeinerten (0,2)-Randbedingungen zu erläutern.

W. SCHEMPP : Über den Satz von Charshiladze-Lozinski

Es bezeichne X = G/K eine kompakte G-Mannigfaltigkeit, $\Lambda(X)$ ihr duales Objekt, $J \subset \Lambda(X)$ einen endlichen Teil, Q_J einen stetigen, linearen Projektor und P_J den Fourier-Projektor. Der Satz von Charshiladze-Lozinski, d.h. die Symmetrierungsformel vom Marzinkiewicz-Berman-Typ,

$$P_J = \int_G \gamma(s^{-1}) \cdot Q_J \cdot \gamma(s)\ ds$$

(γ die linksreguläre Darstellung von G auf einem G-homogenen Banach-Raum E(X)) wird formuliert und damit ein für die n-Sphäre $X = S_n$ gültiger Divergenzsatz für Approximationsprozesse in den SO(n+1)-homogenen Banach-Räumen $E(S_n) = C(S_n)$ und $= L^1(S_n)$ bewiesen.

W. SCHEMPP : Bernstein-Polynome in mehreren Variablen

Es sei T ein kompakter topologischer Raum, $X = M_+^1(T)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf T unter der vagen Topologie (induziert von $\sigma(M(T), C(T))$) und P eine unendliche stochastische untere Dreiecksmatrix. Es wird ein für den reellen Banach-Raum C(X) gültiger Satz vom Bohman-Korovkin-Typ formuliert und damit die Konvergenz der verallgemeinerten Bernstein-Operatoren $(B_{n,P})_{n\geq 1}$ untersucht. Zur Erläuterung der expliziten Ergebnisse dient das Beispiel: $T = \{0,1,...,m\}$, X = Standardsimplex des $\mathbb{R}^m$.

H. J. SCHMID : Interpolation harmonischer Funktionen in mehreren Veränderlichen

Die Lösund des q-dimensionalen Dirichlet-Problems in einem beliebigen Punkt innerhalb der q-dimensionalen Einheitskugel S_q wird durch Interpolation angenähert. Die Interpolationsformeln haben Stützstellen auf der Oberfläche von S_q und sind für alle harmonischen Polynome bis zum Grad n exakt. Stroud (1973) hat aufgezeigt, wie man solche Formeln erhalten kann. Hier wird eine Methode vorgestellt, die bei der Darstellung der harmonischen Polynome durch Müller (1966) ansetzt. Es ergibt sich eine einheitliche Darstellung, bei der die Knoten gerade die Nullstellen der ultrasphärischen Polynome sind, mit denen die harmonischen Polynome aufgebaut werden.

H. S. SHAPIRO : Remainder Formulas, Several Varables

An important role in numerical analysis is played by Peano's theorem, which gives an integral representation for remainders of the type which arise with numerical integration, interpolation, and similar formulas. The present lecture represents a preliminary study of the fundamental aspects of the analogous problem, i.e.

integral representation of remainders, in several variables, where many new difficulties arise.

D. D. STANCU : Use of Biermann's interpolation formula for constructing a class of positive linear operators for approximating multivariate functions

In two previous papers, published in: "Studii Cercet. St. Matematica" (Iasi) vol. 11 (1960), pp. 221-233 , and in: "Approximation Theory" (edit. A. Talbot), Academic Press, 1970, pp. 329-342, we have discussed some probalistic methods for constructing linear positive operators suitable for approximation of multivariate functions. In a next paper published in "Proceedings of the international Conference on Constructive Function Theory", Varna, May 19-25, 1970, we have indicated also an algebraic method, based on the Vandermonde convolution, for obtaining such operators.
In the present paper, by starting from the O. Biermann [Monatshefte f. Math. u. Physik, Bd. 14 (1903), pp. 211-225] interpolation formula for s variables, we construct a class of positive linear polynomial operators, depending on a real parameter, useful for approximation of the real-valued functions, continuous on the compact standard s-dimensional simplex of $\mathbb{R}^s$. We investigate the approximation properties of these operators, which, actually, generalize the operators introduced in our paper published in: "Numerische Methoden der Approximationstheorie" (ed. L. Collatz and G. Meinardus), Bd. 1, ISNM, Bd. 16, pp. 187-203, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1972.

W. TREBELS : Stetigkeits- und Wachstumseigenschaften radialer Funktionen, die durch ihre Fourier-Transformierte gegeben sind

Ausgangspunkt des Vortrages ist folgende Modifikation einer Frage von G.G. Lorentz (1949): Wie kann man den Stetigkeitsmodul einer periodischen Funktion abschätzen, die durch ihre Fourier-Koeffizienten gegeben ist? Diese Frage wird für radiale Funktionen auf

$\mathbb{R}^n$ untersucht. Wichtiges Hilfsmittel ist die Darstellung (F^{-1} bedeutet die inverse Fouriertransformation)

$$(*) \quad F^{-1}[e(|v|)](x) = c \int_0^\infty t^n \, r_a^\wedge(tx) \, t^a \, de^{(a)}(t) .$$

Hierbei ist $r_a^\wedge(v) = (1-|v|)_+^a$ der Riesz-Kern.

Satz 1. Es gelte (*) für $a \geq 0$, $a > n(1/p - 1/2) - 1/2$. Dann folgt

$$\|\Delta_h^k F^{-1}[e(|v|)]\|_p \leq C\{|h|^k \int_0^{|h|^{-1}} t^{a+k+n|p|} \, |de^{(a)}(t)| + \int_{|h|^{-1}}^\infty t^{a+n|p|} \, |de^{(a)}(t)| \}.$$

Aus einer Modifikation von (*) lassen sich auch Wachstumseigenschaften von $F^{-1}[e(|v|^2)](x)$ gewinnen.

H. WERNER : Eine Identität für Differenzenquotienten mit einer Anwendung bei der Splineinterpolation

Beim Versuch, den speziellen Eigenschaften einer Funktion bei der Approximation mit Splines gerecht zu werden, kann man mit einer nichtlinearen Funktion $t(x,c,d)$ die Splines n-ten Grades $s \in C^n([a,b])$ mit den Knoten x_j in jedem Teilintervall in der Form $s|_{[x_{j-1},x_j]} = p_j + t(x,c_j,d_j)$ ansetzen, $p_j \in P_{n-1}$.
Bei regulären Splines kann man annehmen, daß $c_j = s^n(x_{j-1})$ und $d_j = s^n(x_j)$ ist. Zur Berechnung eines interpolierenden Splines kann man, wie in der Dissertation von H. Arndt ausgeführt, ein Gleichungssystem für die nichtlinearen Parameter bestimmen, d.h. die Polynome p_j eliminieren. Zur Herleitung dieser Gleichungen kann man sich einer Identität für Differenzenquotienten bedienen, durch die jeder auf der Knotenmenge definierte (gegebenenfalls konfluente) Differenzenquotient n-ter Ordnung als gewichtetes Mittel solcher n-ter Differenzenquotienten dargestellt wird, die nur jeweils zwei benachbarte Punkte als Argumente enthalten. Ein einfacher Beweis für diese Identität wird skizziert.

F.-J. Delvos (Siegen)