MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 19/1976

Konvexe Körper, Geometrische Ordnungen, Kombinatorische Geometrie

2.5. bis 8.5.1976

Die diesjährige Tagung über "Konvexe Körper, Geometrische Ordnungen, Kombinatorische Geometrie" stand unter der Leitung von P.Scherk (Toronto), R.Schneider (Freiburg i.Br.) und G.C.Shephard (Norwich). Die Hinzunahme des Teilgebietes "Kombinatorische Geometrie" sollte dem Umstand Rechnung tragen, daß die Konvexgeometrie in den letzten Jahren besonders in kombinatorischer Richtung eine beträchtliche Ausweitung erfahren hat. Hier sind einerseits die kombinatorische Theorie der konvexen Polytope und der Zellkomplexe, andererseits die mit den Sätzen von Carathéodory, Helly und Radon und ihren Verallgemeinerungen zusammenhängenden Untersuchungen zu nennen. Von den auf der Tagung gehaltenen Vorträgen befaßte sich eine größere Gruppe mit der Theorie der konvexen Körper im klassischen Sinne, eine etwa gleich große Gruppe mit der Theorie der Polytope und kombinatorischer Geometrie. Weitere Themenkreise waren die Geometrischen Ordnungen und Fragen der Diskreten Geometrie. Das eng gedrängte Vortragsprogramm (bei etwa gleicher Teilnehmerzahl wie bei der entsprechenden Tagung vor zwei Jahren waren diesmal 10 Vorträge mehr angemeldet worden) konzentrierte sich vorwiegend auf im engeren Sinn geometrische Fragestellungen; Fragen der unendlichdimensionalen Konvexität und der in letzter Zeit zunehmend Anhänger findenden axiomatischen Konvexität konnten nur am Rande behandelt werden. Dies wurde zum Teil kompensiert durch zwei abendliche "Workshops" über "Extended Notions of Convexity".

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Wie vor zwei Jahren, so wurde auch diesmal wieder eine Sammlung offener Fragen zusammengestellt, die den Teilnehmern zur Verfügung gestellt wird. Einige der Probleme der letzten Liste konnten inzwischen gelöst werden; einige Untersuchungen der dieses Mal gehaltenen Vorträge gingen auf Anregungen der letzten Problemliste zurück.

Der Tagungsverlauf wurde trotz des anstrengenden Vortragsprogramms allgemein als sehr angenehm empfunden, zumal da auch der nun schon traditionelle Nachmittagsausflug nach St.Roman bei bestem Wetter stattfinden konnte.

Teilnehmer

A. Altshuler, Beer-Sheva (Israel)
J. Bair, Liège (Belgien)
U. Betke, Siegen
G. Bielig, Bochum
H. Bieri, Bern (Schweiz)
T. Bisztriczky, Calgary (Kanada)
R. Blind, Stuttgart
J. Bokowski, Bochum
M. Breen, Norman (USA)
J.-P.Doignon, Dar El Beida (Algerien)
J. Eckhoff, Dortmund
G. Ewald, Bochum
R. Fourneau, Liège (Belgien)
M. Geivaerts, Brüssel "
P. Gruber, Linz (Österreich)
E. Heil, Darmstadt
J. Höbinger, Linz (Österr.)
R.E. Jamison, Bonn
M. Kömhoff, Freiburg
J. Kraeft, Bochum
N.D. Lane, Hamilton (Kanada)
D.G. Larman, London (England)
K. Leichtweiß, Stuttgart
J. Linhart, Salzburg (Österreich)
P. Mani, Bern (Schweiz)
P. McMullen, London (England)
T. Overhagen, Siegen
U. Pachner, Bochum
R. Park, Calgary (Kanada)
M.A.Perles, Jerusalem(Israel)
C.M.Petty, Columbia (USA)
G. Ramharter, Linz (Österr.)
J.R.Reay, Bellingham (USA)
J. Schaer, Calgary (Kanada)
R. Schneider, Freiburg
Ch.Schulz, Mainz
G.C.Shephard, Norwich (England)
G. Sierksma, Groningen (Niederlande)
W. Spiegel, Berlin
G. Spoar, Guelph (Kanada)
K. Strambach, Erlangen

J. Turgeon, Montreal (Kanada)
H. Tverberg, Bergen (Norwegen)
G. Valette, Brüssel (Belgien)
G. Wegner, Dortmund
W. Weil, Freiburg
J.M.Wills, Siegen
T. Zamfirescu, Dortmund

Vortragsauszüge

A. ALTSHULER: Simplicial 4-polytopes and combinatorial 3-manifolds with few vertices

We describe an enumeration of all the combinatorial 3-manifolds with up to nine vertices, and of all the neighborly combinatorial 3-manifolds with ten vertices. We classify those 3-manifolds topologically. Those 3-manifolds which are spheres are further classified into polytopal and non-polytopal spheres. Those classifications yield certain simple transformations on combinatorial 3-manifolds, which are useful for several purposes, and lead to a certain conjecture concerning the structure of the face-lattice of simplicial n-polytopes.

J. BAIR: The loose strong separation of two convex sets

In a real vector space we know that two convex sets A and B are strongly separated if there exist two (distinct) parallel hyperplanes which separate A and B.
We investigate the conditions for a loose strong separation of two convex sets, i.e. the strong separation by several hyperplanes non parallel to each other. A loose strong separation is obtained in some cases for which one of the sets is bounded or at least continuous, while the other one, disjoint from the first one, contains no hyperplane.
We use this notion in order to give a new "Sandwich Theorem" for convex and concave functions.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

U. BETKE: Abschätzung von Gitterpunktanzahlen

H. Hadwiger hat zur Lösung des Problems, die Anzahl der Gitterpunkte eines konvexen Körpers nach oben abzuschätzen, folgende weitergehende Vermutung aufgestellt: Seien A,B konvex, $d(A,B) = \min\limits_{x\in A, y\in B} d(x,y) \geq 1$ (d euklidischer Abstand). Dann gilt $W(\mathrm{conv}(A\cup B)) \geq W(A)+W(B)$.

Dabei ist $W(K) = \sum\limits_{i=1}^{d} \binom{d}{i} \frac{W_i(K)}{\omega_i}$, W_i die Minkowskischen Quermaßintegrale und ω_i das Volumen der i-dimensionalen Einheitskugel. Es wird folgendes Gegenbeispiel angegeben: Seien A,B konvexe Körper des E^d mit $A = \{x \mid \|x\| \leq 1, x_d=0\}$, $B = \{(0,\ldots,0,1)\}$. Dann gilt für $d \geq d_0$ $W(\mathrm{conv}(A\cup B)) < W(A)+W(B)$.

G. BIELIG: Längenexponenten von polyedrischen Graphen

Sei $\mathcal{G}(q,r)$ die Familie aller 3-polytopalen Graphen, deren Ecken höchstens Valenz r und deren Facetten höchstens q Ecken haben. Dann ist $\sigma(\mathcal{G}(q,r)) := \liminf\limits_{G\in\mathcal{G}(q,r)} (\log h(G)/\log v(G))$ der Längenexponent der Familie $\mathcal{G}(q,r)$, wobei v(G) die Anzahl der Ecken von G, h(G) die Anzahl der Ecken auf einem maximalen Kreis von G bezeichnet. Es werden einige Oberabschätzungen von $\sigma(\mathcal{G}(q,r))$ angegeben für Graphenfamilien mit $\sigma(\mathcal{G}(q,r)) < 1$, die gewonnen werden durch induktive Konstruktion von Graphenfolgen oder durch Vergleich der Längenexponenten verschiedener Graphenfamilien. Ist $\mathcal{G}^*(q,r)$ die Menge der Graphen aus $\mathcal{G}(q,r)$, bei denen alle Facetten gerade Eckenzahl haben, so gilt: Existiert in $\mathcal{G}^*(q,3)$ ein Graph mit m Ecken, der keinen Hamiltonschen Kreis besitzt, so ist $\sigma(\mathcal{G}^*(2q,3)) \leq \log(m/2 -2)/\log(m/2 -1)$. Damit ist der Beweis der Barnetteschen Vermutung, daß alle einfachen 3-Polytope mit Facetten, deren Eckenzahl stets gerade ist, einen Hamiltonschen Kreis besitzen, darauf reduziert, zu zeigen $\sigma(\mathcal{G}^*(4q,3)) = 1$ für alle q.

H. BIERI: Ein Extremalproblem für rotationssymmetrische Kegelstümpfe im R_3

Das Problem, unter den konvexen Körpern des R_3 diejenigen anzugeben, für die bei 2 konstanten Maßzahlen die dritte extremal ausfällt, ist immer noch nicht vollständig gelöst. Vollständige Lösungen erzielt man bei Beschränkung auf spezielle Körperklassen. Das vorliegende Referat bringt die Lösung für die zweiparametrige Schar der rotationssymmetrischen Kegelstümpfe. Wichtig ist die Wahl der besten Parameter. Kernstück ist das Studium einer Abbildung auf eine (x,z)-Ebene. Die Funktionaldeterminante, Null gesetzt, liefert eine kubische Gleichung im Parameter L, deren Koeffizienten komplizierte Funktionen des Winkelparameters sind.
In ausgedehnten Intervallen sind Zylinder und Kegel extremal. Doch büßen beide Körper ihre Extremaleigenschaft überraschend ein, der letztere in der Umgebung der Kreisscheibe.
Es besteht die Vermutung, daß die aufgefundenen Extremaleigenschaften in der vollen Klasse der konvexen Rotationskörper mindestens teilweise erhalten bleiben.

T. BISZTRICZKY: Some surfaces of order three

A description and examination of four types of surfaces of order three which contain a finite number of lines. These surfaces are defined synthetically in the real projective 3-space and examined by means of a differentiability condition.

R. BLIND: Eine Charakterisierung der Sphäre im E^3

Auf der Sphäre im E^3 gilt bekanntlich: Jede geschlossene Jordankurve mit der geod. Gesamtkrümmung 0 halbiert die Oberfläche. Es ist bekannt, daß dieser Satz zu einer Kennzeichnung der Sphäre unter den geschlossenen C^2-Flächen verwendet werden kann. Diese Tatsache soll verallgemeinert werden. Es läßt sich zeigen: F sei eine glatte, geschlossene konvexe Fläche im E^3. Jede geschlossene Jordankurve von F mit der Schwenkung 0 nach beiden Seiten halbiere die Oberfläche von F. Dann ist F eine Sphäre. Wie ein Gegenbeispiel zeigt, kann auf die Voraussetzung der Glattheit nicht verzichtet werden.

J. BOKOWSKI: Konvexe Körper approximierende Polytopklassen

Es bezeichne $P(m,n)$ die Klasse konvexer Polytope des dreidimensionalen euklidischen Raumes E^3, deren Ecken höchstens m-valent sind und deren Seiten höchstens n Ecken besitzen ($m \geq 3$, $n \geq 3$). $P(m,n)$ heiße approximierende Klasse der Klasse K aller konvexen Körper des E^3, wenn es zu jedem $k \in K$ eine Folge $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ konvexer Polytope $P_i \in P(m,n)$ gibt, die im Sinne der Hausdorffmetrik gegen k konvergiert.

Satz: Die Klassen $P(4,4)$, $P(3,6)$, $P(6,3)$ und alle diese Klassen enthaltenden Klassen sind approximierende Klassen von K, und dies sind alle approximierenden Klassen im E^3.

Damit ist eine Vermutung von G. Ewald widerlegt. Die Frage von Ewald, ob es für höhere Dimensionen überhaupt approximierende Klassen gibt, bleibt unbeantwortet.

M. BREEN: Decomposition theorems for m-convex sets

Let S be a subset of R^d. S is said to be m-convex, $m \geq 2$, if and only if for every m points of S, at least one of the $\binom{m}{2}$ corresponding line segments lies in S. Several interesting decomposition theorems have been proved for closed 3-convex subsets of the plane, and Valentine has proved that such a set is expressible as a union of three or fewer convex sets. Examples show that a decomposition theorem for m-convex sets must require an unpleasantly

large number of convex sets, and it has not been known if a closed planar m-convex set could even be expressed as a finite union of convex sets. This presentation answers the question in the affirmative, and we have the following results:
Let S be a closed m-convex set in the plane, $m \geq 3$. If there is some line H supporting S at a point p in the kernel of S, then S is expressible as a union of $m - 1$ convex sets. In the general case, S is a union of $(m - 1)^3 \, 2^{m-3}$ or fewer convex sets.
Moreover, with suitable hypotheses, these results may be used to obtain decomposition theorems for S a closed m-convex set in R^d and for S a nonclosed planar m-convex set.

J.-P. DOIGNON: <u>Convexity in modules</u>

Let E be a torsionfree module over the ordered domain of integrity A. We know that there are canonical embeddings of A in its field of quotients $\bar{A}$ and of E in a vector space over the ordered field $\bar{A}$. Use this latter embedding to define lines, segments and i-convex sets in E as the intersections of E with the corresponding sets in $\bar{E}$. On the other hand, the segments in E give rise to another type of convex sets, which we call s-convex sets.
<u>Proposition</u>: When A is order-dense in $\bar{A}$, the i-convex and s-convex sets coincide. In the lattice case, they do not. So we ask for a characterization of i-convex sets within the module E. <u>Proposition</u>: The i-convex sets are the intersections of halfspaces, a halfspace being a subset of E which is s-convex together with its complement. Other results concern the Carathéodory, Helly and Radon numbers. For instance, in dimension d, the Helly number can be d+1, 2d or 2^d depending on the structure of E.

J. ECKHOFF: Realisierung von f-Vektoren im R^d

Ist C der Nerv einer endlichen Familie konvexer Mengen im R^d und $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ der f-Vektor von C, so heißt $(h_0, h_1, h_2, \ldots)$ mit

$$h_i := \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{i+j-d}{j} f_{i+j}$$

der h-Vektor von C. Vermutlich liefert die Folge $h_0, h_1, h_2, \ldots$ ganzer Zahlen genau dann einen h-Vektor, wenn die Ungleichungen

$$h_i \geq 0 , \qquad i \geq 0$$

$$h_i^{(i+1)} \leq h_{i-1} , \qquad 0 \leq i \leq d-1$$

$$h_i^{(d)} \leq h_{i-1} - h_i , \qquad i \geq d$$

gelten (h-Vermutung). Dabei ist $u^{(k)}$ mit Hilfe der sog. k-kanonischen Darstellung von u definiert. Durch Konstruktion von Beispielen (vorgeführt im Fall d = 2) wird gezeigt, daß die obigen Ungleichungen für die Realisierbarkeit von $(h_0, h_1, h_2, \ldots)$ als h-Vektor hinreichend sind.

G. EWALD: On the stellar equivalence of convex polytopes

G.C.Shephard and myself have proved the following theorem: The boundary complexes B(P), B(P') of two convex n-polytopes P,P' are geometrically stellar equivalent in the sense that there exists a sequence of polytopes $P = P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}, P_k = P'$ such that either $B(P_i)$ from $B(P_{i-1})$ or $B(P_{i-1})$ from $B(P_i)$ can be obtained by a stellar subdivision, i = 1,..., k.- Let P be simplicial, let P' be a simplex, and let m(p) be the minimal number of polytopes needed in the sequences $P_1, \ldots, P_k$ (for a fixed P). The result presented here is an upper bound for m(P): Let v_{max} (P) be the maximal number of (n-1)-

faces of P that meet in a common vertex of P. Then

$$m(P) \leq 2\, f_{n-1}(P) - f_0(P) - 2\, v_{max}(P)+n-1 .$$

The bound is, in general, not sharp.

R. FOURNEAU: Isomorphisms of lattices of closed balanced convex sets

Let E be a real vector space of dimension greater than one. We describe the isomorphisms of the $\cap$-semilattice $\mathfrak{P}_2^b$ of all balanced convex k-polytopes ($-1 \leq k \leq 2$). This description gives the characterization of the isomorphisms of various lattices of balanced closed convex sets, one of which is related to a lattice introduced by J.J.Schäffer in the theory of differential equations.

M. GEIVAERTS: Vector spaces consisting of classes of convex bodies

H. Radström proved that the set of all non-empty compact convex sets $\mathcal{K}_n$ (convex bodies) in the euclidean space $\mathbb{E}^n$, endowed with the Minkowski addition, scalar multiplication with non-negative real numbers and Hausdorff distance, can be embedded, as a generating closed convex cone, in a normed vector space $\langle \mathcal{K}_n \rangle$. Different spaces consisting of classes of convex bodies studied by G. Ewald and G.C. Shephard can be considered as special cases of a general construction of vector spaces of classes of convex bodies. To do this we construct the quotient space $\langle \mathcal{K}_n\rangle/\mathcal{E}$ where $\mathcal{E}$ is a closed subspace of $\langle \mathcal{K}_n\rangle$ and restrict this linear equivalence to the convex cone $\mathcal{K}_n$. So we can describe the largest subspace of $\langle \mathcal{K}_n\rangle/\mathcal{E}$ contained in the cone of all classes $K+\mathcal{E}$ with $K \in \mathcal{K}_n$. Examples:

1) $\mathcal{E} = \mathbb{E}^n$

2) $\mathcal{E}$ = vector space generated by a convex body K.

3) $\mathcal{E}$ = vector space generated by all centrally symmetric convex bodies.

4) $\mathcal{E}$ = the closure of the vector space generated by all convex bodies with constant width.

P. GRUBER: Isometrien des Konvexringes

Es sei $\underline{R}$ die Klasse aller nichtleeren, endlichen Vereinigungen von kompakten, konvexen Teilmengen des R^d. $\underline{R}$ sei mit der Hausdorff-Metrik ausgestattet. Es werden alle Isometrien von $\underline{R}$ auf sich bestimmt. Dieses Resultat ergänzt ein Ergebnis von R. Schneider (1975), das die Isometrien der Klasse der nichtleeren, kompakten, konvexen Teilmengen des R^d auf sich beschreibt.

E. HEIL: Körper gegebener Dicke

Während die Aufgaben, bei gegebenem Durchmesser die Quermaßintegrale W_i zu maximieren, schon lange gelöst sind, sind die Aufgaben, bei gegebener Dicke die W_i zu minimieren, außer in der Ebene nicht gelöst. Aus dem regulären Tetraeder im 3-dimensionalen Raum wird ein Körper konstruiert, der vermutlich kleinstes Volumen und vielleicht auch kleinste Oberfläche hat. In diesem Zusammenhang wurde eine Körperklasse untersucht, in der die Lösungskörper der genannten Probleme zu suchen sind: K heiße reduziert, wenn jeder in K enthaltene Körper kleinere Dicke als K hat. Es gilt z.B.: Ist K reduziert und glatt, so ist K ein Gleichdick.

R.E. JAMISON: Topological and geometrical properties of convex hull operators determined by families of linear functionals

A family M of linear functionals on Euclidean space determines a convex hull operator as follows: The M-hull of a compact subset A of the space consists of all points which cannot be separated from A by a functional in M. The continuity of such hull operators as well as Lipschitz conditions they satisfy will be discussed. In addition, some topological properties of these operators under uniform, pointwise, etc. convergence will be mentioned. Associated with an M-hull operator is a family of M-convex sets. The Carathéodory number and other geometrical properties of the M-convex sets will be discussed.

J. KRAEFT: Über 3-realisierbare Folgen mit beliebigen Sechseckzahlen

Eine Folge $(p_3, p_4, p_5, \ldots)(p_k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ heißt 3-realisierbar, wenn ein einfaches 3-Polytop P existiert, so daß p_k die Zahl der k-eckigen 2-Seiten von P ist. Eine notwendige Bedingung für die 3-Realisierbarkeit einer Folge ist die Gleichung:

$$(*) \qquad 3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k \geqq 7} (k-6)p_k .$$

Sie enthält keine Information über p_6. Es stellt sich deshalb die Frage nach den möglichen Werten von p_6, wenn eine Folge $(p_k)_{k \neq 6}$, die (*) genügt, vorgegeben ist.

Satz: Ist $(p_k)_{k \neq 6}$ eine Folge, die (*) genügt, und gilt $\sum_{3 \nmid k} p_k \geqq 3$ und $p_5 = 0 \vee (p_5 = 1 \wedge p_4 = 0)$, so gibt es ein c, so daß die Folge (p_k) für alle $p_6 \geqq c$ 3-realisierbar ist. Fassen wir diesen Satz mit anderen Ergebnissen (von Grünbaum-Motzkin (1963), Fisher (1974)) zusammen, so können wir sagen, daß alle Folgen (p_k), die (*) genügen, und für die gilt $\sum_{3 \nmid k} p_k \geqq 3$ 3-realisierbar sind, wenn p_6 größer oder gleich einem bestimmten c ist. Alle übrigen Folgen sind entweder für gerade oder ungerade Werte von p_6 größer oder gleich einem bestimmten c 3-realisierbar.

D.G. LARMAN: Extreme linear maps

J.Lindenstrauss and M.A.Perles have studied the extreme points of the set of all linear operators T of norm ≤ 1 from a finite dimensional Banach space X into itself. In particular they studied the question "When do these extreme points form a semigroup"? They conjectured that under these conditions the unit ball S(X) of X is either a polytope or an ellipsoid and they proved this conjecture for dimensions ≤ 4. Here I prove the conjecture for dimensions ≤ 6.

J. LINHART: Über die Kantenlängensumme von konvexen Dreieckspolyedern

Unter allen konvexen Dreieckspolyedern, die eine Einheitskugel enthalten, haben die regulären dieser Kugel umschriebenen Tetraeder und Oktaeder die kleinste Kantenlängensumme. Im Vortrag wird gezeigt, wie man diese Vermutung von L.Fejes Tóth beweisen kann.

P. MANI: Mittlere Schattenlänge konvexer Körper

Von P.McMullen stammt die Vermutung, daß die mittlere Schattenlänge eines dreidimensionalen konvexen Körpers niemals größer sei als diejenige eines 3-Polytops mit gleicher mittlerer Breite wie der betreffende Körper. Diese Vermutung und, wenn möglich, eine Verallgemeinerung derselben, soll hier bewiesen werden.

P. McMULLEN: Lattice invariant valuations on rational polytopes

Let Λ be a lattice in d-dimensional euclidean space E^d, $\bar{\Lambda}$ the rational vector space it generates, and P a polytope with vertices in $\bar{\Lambda}$. If φ is a valuation invariant under Λ, then for non-negative integers n there is an expression $\varphi(nP) = \sum_{r=0}^{d} n^r \varphi_r(P,n)$, where the coefficient $\varphi_r(P,n)$ depends only on the congruence class of n modulo the smallest integer k such that each r-face of kP lies in an r-flat spanned by points of Λ. Moreover, φ_r satisfies the Euler-type relation

$\sum_F (-1)^{\dim F} \varphi_r(F,n) = (-1)^r \varphi_r(-P,-n)$, where the sum extends over all non-empty faces F of P. The proof involves a specific representation of simple such valuations, analogous to that of Hadwiger of weakly continuous simple valuations on d-polytopes.

U. PACHNER: Imbeddings of closed manifolds in convex polytopes

Let S be a p.l. n-sphere, $M \subset S$ a closed (n-1)-pseudo-manifold and $\mathfrak{P}$ a family of convex (n+1)-polytopes. $(M;S)$ is called $\mathfrak{P}$-realizable provided there exists a cellular decomposition (not necessary geometric) of S isomorphic to $\mathfrak{B}(P)$ for some $P \in \mathfrak{P}$, which contains a decomposition of M as a subcomplex. We have:

1.) $(M;S)$ is $\mathfrak{P}_{st}$-realizable, where $\mathfrak{P}_{st}$ denotes the family of those (n+1)-polytopes, whose boundary complexes are isomorphic to some stellar subdivision of $\mathfrak{B}(T^{n+1})$.

2.) $(M;S)$ is $\mathfrak{P}^*_{st}$-realizable if and only if M is a flat p.l. manifold, i.e., M and the closures of the connected components of $S \setminus M$ are p.l. manifolds. Here $\mathfrak{P}^*_{st}$ denotes the family of the duals of $\mathfrak{P}_{st}$.

R. PARK: Hypersurfaces in projective space

Given a compact set C in P^n of bounded linear order, the geometric multiplicity $g(p,L)$ with which a line L meets C at a point p is the maximum number of points in which lines close to L can meet a small relative neighborhood $U(p)$. If $L \subset C$, put $g(p,L) = \infty$.
A hypersurface is a pair (C,μ) satisfying

① $g(p,L) \leq \mu(p,L)$,

② there exist $U(p)$, $U(L)$ such that for each $L' \in U(L)$, $\sum_{p' \in U(p) \cap L'} \mu(p',L') \leq \mu(p,L)$
and both sides are congruent mod 2.

A point p is simple if its multiplicity $m(p) = \min_L \mu(p,L)$ is 1. A smoothness condition is introduced and one shows: Th.1. At simple points p of a smooth hypersurface the tangents form a hyperplane $\pi(p)$ which depends continuously on p. Th.2. The product $C_1C_2 = (C_1 \cup C_2, \mu_1+\mu_2)$ of smooth hypersurfaces is a smooth hypersurface.

A. PERLES: Sets with no infinite visually independent subsets

Let S be a subset of a real topological vector space V. $F \subset S$ is visually independent if for all $x,y \in F$: $x \neq y \Rightarrow [x,y] \not\subset S$. Define:
$\alpha_1(S) = \sup\{|F|: F \subset S \text{ vis. ind.}\}$.
For $2 \leq k < \infty$ and $T \subset V$ let $\mathrm{conv}_k(T) = \bigcup\{\mathrm{conv}\, F: F \subset T \,\&\, |F| \leq k\}$.
$T \subset S$ is (s,k)-convex if $\mathrm{conv}_k\, T \subset S$. Define:
$\alpha_k(S) = \inf\{n: S$ is the union of n (s,k)-convex subsets$\}$,
$\alpha_\infty(S) = \inf\{n: S$ is the union of n convex sets$\}$.
Sample results:
1.) For closed K and $k \geq 2$:

$$(\alpha_1(K) \leq k \text{ or } \alpha_k(K) \leq k+1) \Rightarrow \alpha_k(K) = \alpha_\infty(K).$$

For $d \geq 2$ there is a compact set $K \subset R^d$ with $\alpha_1(K) = d+1$, $\alpha_2(K) = \alpha_d(K) = d+2$, $\alpha_\infty(K) = d+3$.

2.) For $d \geq 4$ there is a compact starshaped set $K \subset R^d$ with $\alpha_1(K) = 2$, $\alpha_2(K) = \infty$, and for every hyperplane H: $\alpha_\infty(H \cap K) \leq 2$.

3.) If $\alpha_3(S) = 2$ then $\alpha_\infty(S) = 2$.

C.M. PETTY: Convex bodies with projective centers

An interior point p of a convex body $K \subset R^d$ is called a projective center of K if there exists an admissible projectivity of K so that the image of p is an affine center of K. P.Kelly and E.G.Strauss have shown that if the Hilbert geometry on the interior of K has non-positive curvature at a point then this point is necessarily a projective center of K. With respect to this Hilbert geometry, we show that the set of projective centers of K is either a lattice or the intersection of int K by a flat. Moreover, this flat must have dimension $n \leq d-2$ unless K is an ellipsoid. Given $1 \leq n \leq d-2$ we construct, up to a projectivity, all convex bodies whose set of projective centers have dimension n. Such convex bodies may be strictly convex and differentiable. However, if the boundary of K is of class C^2 with positive Gauss curvature then K must be an ellipsoid if it has more than one projective centers.

G. RAMHARTER: Über das Umkehrproblem für den Minkowskischen Linearformensatz

Es sei K ein bezüglich dem Nullpunkt o symmetrischer, offener, konvexer Körper im R^n mit Volumen $V > 2^n$, ferner G ein Gitter des R^n mit Determinante 1. Dann besagt der berühmte Minkowskische Hauptsatz, daß K außer o mindestens einen weiteren Gitterpunkt enthält. Die entsprechende Aussage für die Klasse der Parallelepipede ist als Linearformensatz bekannt. Mordell hat 1936 das folgende Umkehrproblem gestellt: Es sind möglichst große positive Zahlen k anzugeben derart, daß zu jedem Gitter des R^n mit Determinante 1 ein (bis auf o) gitterpunktfreies Parallelepiped mit Volumen $V > k \cdot 2^n$ gefunden werden kann. Wir fragen nach dem Supremum k_n dieser Zahlen. Nach dem obigen ist $k_n \leq 1$. Man kennt nach Siegel und Hlawka untere Abschätzungen von k_n, jedoch außer k_2 (nach Gruber, Suranyi und Szüsz) für kein $n \geq 3$ den genauen Wert. Es wird eine Verschärfung der bekannten Abschätzungen für k_3 nach oben und unten angegeben sowie ein lokales Resultat, welches die Vermutung stützt, daß die Oberschranke mit k_3 zusammenfällt.

J.R. REAY: Radon-type theorems without independence conditions

An m-set X in R^d is (r,k)-divisible if it can be partitioned into r pairwise disjoint subsets whose convex hulls intersect in a set of dimension at least k. Thus Radon's theorem says each (d+2)-set in R^d is (2,0)-divisible. Jürgen Eckhoff recently showed that each (2d+2)-set in R^d is (2,1)-divisible, and asked what analogous results hold for (r,1)-divisible sets. The question was solved more generally, some time ago, if the points of X have certain independence conditions; each $[(d+1)(r-1)+k+1]$-set in R^d is then (r,k)-divisible. Without such conditions the question has meaning and is unsolved only if $k = 1$.

1) Examples of $[2d(r-1)+1]$-sets, not $(r,1)$-divisible, exist in R^d.
2) Upper bounds on m are given for each m-set in R^d to be $(r,1)$-divisible.
3) Each $[2d(r-1)+2]$-set in R^d admits two r-partitions for which $z_i \in \bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{conv} X_{ij}$ for distinct points z_1 and z_2. Further, some subset of at most $(d+1)(r-1)+2$ points has this property.
4) Specifically, each $[4(r-1)+2]$-set in R^2 is $(r,1)$-divisible.

R. SCHNEIDER: <u>The size of skeletons of convex bodies</u>

For a convex body K in euclidean space E^d let $\operatorname{skel}_k K$ be the set of all points in K which are not centres of $(k+1)$-dimensional balls contained in K. Let $\mathcal{H}^k$ denote k-dimensional Hausdorff measure in E^d. We prove the following inequality of isoperimetric type:

$$\mathcal{H}^k(\operatorname{skel}_k K)^{d-1} \geq c(d,k)\mathcal{H}^{d-1}(\operatorname{bd} K)^k$$

$(k = 1,\dots d-2)$, where $c(d,k)$ is a positive constant (given explicitly, but not best possible). It is a consequence of the inequality

$$\mathcal{H}^k(\operatorname{skel}_k K) \geq c_1(d,k)W_{d-k}(K),$$

where W_{d-k} denotes the quermassintegral of order $d-k$. The proof depends on upper bounds for Federer's curvature measures of suitable pieces of $\operatorname{bd} K$ and the fact, which we prove, that the curvature measure of order k is concentrated in $\operatorname{skel}_k K$.
(Joint work with Wm.J.Firey)

CH. SCHULZ: Zur Zerlegbarkeit von Skeletten

Das 2-Skelett eines Polytops heiße zerlegbar, wenn es in zwei Komplexe M_1 und M_2 zerfällt, die keine gemeinsame 2-Seite haben und deren Trägermengen 2-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeiten sind. Es werden die folgenden Ergebnisse aus einer gemeinsamen Arbeit mit U.Betke und J.M.Wills referiert:

1) Es gibt genau 5 simpliziale Polytope mit zerlegbarem 2-Skelett.
2) Ein einfaches 4-dimensionales Prisma hat genau dann ein zerlegbares 2-Skelett, wenn die Facetten seiner Basis 4-färbbar sind.

G.C. SHEPHARD: Some problems on plane tilings

The mathematical theory of tiling started with a publication of J.Kepler in 1619. This work was forgotten for nearly 300 years, until it was discovered by D.M.Y.Sommerville in 1905. It contains many suggestions that have not yet been completely developed. The theory of tiling is rich in open problems and the purpose of this talk was to discuss some of these. For example, it is still not known what types of convex pentagons will tile the plane, and an example was given of a tile for which it is not known whether a tiling of the plane is possible. The question of n-typic tilings was then discussed. A tile is n-typic if it will tile the plane in exactly n different (that is, not congruent) ways. Examples of 1-typic, 2-typic and 3-typic tiles were shown, and it is an open problem whether n-typic tiles exist for $n \geq 4$. This leads naturally to the idea of patches of tiles which determine a tiling. A patch is a small number of contiguous tiles and it is said to determine a tiling if it can be extended, using only the same shapes of tiles as those used in the patch, to tile the whole plane. Several examples of patch-determined tilings were shown. In conclusion a number of "spiral tilings" analogous to the one discovered by Voderberg in 1936, were exhibited and some unsolved problems were stated.

W. SPIEGEL: Kanonische Simplexzerlegung und Eikörperfunktionale

Wir werden zeigen, wie man neuere Ergebnisse über translationsinvariante, additive und stetige Eikörperfunktionale allein aus der sogenannten kanonischen Zerlegung eines Simplexes nach dem Teilungsverhältnis λ ($\lambda \in (0,1)$) begründen kann. Hierzu formulieren wir einen Hilfssatz, der über die Struktur der an der Simplexzerlegung beteiligten Polytope und deren Durchschnitte Auskunft gibt. Im Anschluß daran erhalten wir durch vollständige Induktion den von P.McMullen aufgestellten Satz, daß jedes additive, translationsinvariante und stetige Eikörperfunktional sich bei Dilatation seines Argumentes in ein Polynom höchstens k-ten Grades (k = Dimension des Raumes) entwickeln läßt. Mit dem oben aufgeführten Hilfssatz gelingt es außerdem zu zeigen, daß jedes bewegungsinvariante, additive, positiv definite Eipolyederfunktional im 2-dimensionalen Raum monoton ist. Ob dieser Satz für beliebige Dimensionen gültig ist, bleibt eine offene Frage.

G. SPOAR: A least upper bound for the number of singular points on arcs of cyclic order four

It is known that a strongly differentiable normal arc of cyclic order four in the conformal plane contains at most four singular points. Assuming no differentiability conditions the best bound obtained so far is eleven. This paper shows that assuming no differentiability conditions the maximum number of singular points on such an arc is indeed four. In obtaining this result it is necessary to categorize the different possible singular points on such arcs. This characterization is similar to that of O.Haupt and H.Künneth for linearly singular points of arcs of linear order three.

J. TURGEON: Les quasigraphes

Il s'agit d'une recherche entreprise à trois, M.M.Norman Lane, Peter Scherk et moi-même, en mai 1969, et dont nous avons déjà parlé à Oberwolfach, en 1970 et en 1972. Notre propos est de rassembler en une seule plusieurs théories parallèles en géométrie différentielle directe, c'est-à-dire, de définir des notions dont les objets utilisés dans les théories déjà connues deviendront des cas particuliers et de donner à ces notions exactement les propriétés qui sont absolument nécessaires pour que les théorèmes démontrés dans les cas particuliers se trouvent généralisés. La notion de base qui nous apparaît maintenant la meilleure pour notre but est celle de quasigraphe, dont nous parlerons.

H. TVERBERG: On the Barnette-Stein 4-colour theorem

The theorem is: Any map on the sphere can be coloured with 4 colours in such a way that each country has the same colours as at most one of its neighbours. (Barnette-Stein, Springer Lecture Notes 186). A new proof of the theorem was presented. The proof uses the classical method of Kempe chains, and the fact that in a "nice" map where every country has ≥ 5 neighbours, there must be a country with 5 neighbours among which there is one with ≤ 6 neighbours. A "nice" map means one which may be realized by a simple convex polyhedron, facets being countries.

G. VALETTE: Rectangular convexity

This is a report of results obtained by R.Blind, G.Valette and T.Zamfirescu about r-convex sets. A set $X \subset E^d$ is called r-convex if, given $x \neq y$ in X, there is a $F \in \mathfrak{F}$ such that $\{x,y\} \subset F \subset X$. Theorems: 1. The following closed sets in E^2 are r-convex: (A) E^2, (B) all closed convex sets whose asymptotic cone has an angle in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, (C) all the strips, (D) all the half strips with right angles, (E) all the compact convex sets which are centrally symmetric and extremely circular (extreme points on a circle). 2. The only non bounded closed r-convex sets in E^2 are those described in (A), (B), (C) and (D). 3. The only polygons which are r-convex belong to the class (E). 4. The only compact r-convex sets in E^2 which intersect their circumscribed circle in a centrally symmetric set are those described in (E). 5. Let B be an unbounded closed strictly convex set in E^3. Suppose that the intersection A of the unit sphere S with the asymptotic cone of B is spherically strictly convex. Then B is r-convex iff A is not included in a quarter of S.

G. WEGNER: <u>Über die f-Vektoren d-repräsentierbarer Komplexe</u>

Neben dem f-Vektor (f_i) simplizialer Komplexe betrachten wir

$$\chi_{i,k} := \sum_j (-1)^j \binom{i+j-k}{j} f_{i+j}.$$

Es ist $\chi_{i,i+1} = f_i$, $\chi_{0,0} = \chi$ (Euler-Char.). Nach Kruskal-Katona gilt für die f-Vektoren simplizialer Komplexe

$$(1) \qquad \chi_{i,k}^{(k)} \leq \chi_{i-1,k-1} \quad \text{für} \quad k > i\ ,$$

wobei $n^{(r)}$ mit der r-kanon.Darstellung $n = \binom{a_r}{r} + \binom{a_{r-1}}{r-1} + \ldots$ definiert wird durch $n^{(r)} = \binom{a_r}{r-1} + \binom{a_{r-1}}{r-2} + \ldots$. Nach einer Vermutung von Eckhoff gilt für die f-Vektoren d-repräsentierbarer (d.h. als Nerven von Familien konvexer Mengen im $\mathbb{R}^d$ auftretender) Komplexe

$$(2) \qquad \chi_{i,k}^{(k)} \leq \chi_{i-1,k-1} \quad \text{für} \quad k \geq d.$$

Wir beweisen für d-dim. Komplexe eine Ungleichung, aus der (2) für d-dim., d-collapsible Komplexe folgt (jeder d-repräsentierbare Komplex ist d-collapsible).

W. WEIL: Zentralsymmetrische konvexe Körper und Distributionen

Es werden die zum Nullpunkt zentralsymmetrischen konvexen Körper K betrachtet, deren Stützfunktion H_K durch ein gerades Maß ρ_K auf der Einheitssphäre Ω des E^n erzeugt wird:

$$(*) \qquad H_K(u) = \int_{\Omega} |\langle x,u\rangle| \rho_K(dx) \ , \ u \in E^n .$$

Falls ρ_K signiertes Maß ist, nennen wir K verallgemeinertes Zonoid. Für $\rho_K \geq 0$ erhalten wir die bekannten Zonoide, für ρ_K mit endlichem Träger die Zonotope. Die geometrisch interessanten Größen lassen sich aus den Maßen ρ_K berechnen:

$$V(K_1,\ldots, K_n) = \frac{2^n}{n!} \int_{\Omega} \ldots \int_{\Omega} D_n(x_1,\ldots, x_n)\rho_{K_1}(dx_1)\ldots \rho_{K_n}(dx_n),$$

$$W_j(K) = c_{j,n} \int_{\Omega}\ldots\int_{\Omega} D_{n-j}(x_1,\ldots,x_{n-j})\rho_K(dx_1)\ldots\rho_K(dx_{n-j}),$$

$j = 0,\ldots, n.$ ($D_j(x_1,\ldots, x_j) = |\det (x_1,\ldots, x_j)|$ bzgl. j-dim.Unterraum)

Der Zusammenhang (*) läßt sich auf alle zu 0 zentralsymmetrischen Körper ausdehnen, falls ρ_K durch eine gerade Distribution T_K auf Ω ersetzt wird. Es gelten entsprechende Formeln für die gemischten Volumina und die Quermaßintegrale. Aus: K Zonoid $\Leftrightarrow T_K \geq 0$ ergibt sich noch eine Charakterisierung von Zonoiden mittels gemischter Volumina.

J.M. WILLS: Mannigfaltigkeiten im 2-Skelett konvexer Polytope

Ergebnisse zweier gemeinsamer Arbeiten mit U.Betke und Ch.Schulz. Es werden 2-Mannigfaltigkeiten (kurz:Mf) in konvexen d-Polytopen (d.h. im 2-Skelett ihres Randkomplexes) des euklidischen E^d untersucht. Dabei interessieren zuerst allg. Existenzaussagen. Es gilt:

1.) Jede Mf außer den geschlossenen nichtorientierbaren ist in unendlich vielen 4-Polytopen enthalten, 2.) Jede Mf ist in unendlich vielen 5-Polytopen enthalten,

3.) Jede Mf M ist in jedem d-Polytop mit $d \geq d_o(M)$ enthalten; jedoch gilt:

4.) Zu jeder geschlossenen orientierbaren Mf außer der Sphäre gibt es unendlich viele 4-Polytope, die sie nicht enthalten.

Neben diesen analogen Ergebnissen werden Aussagen über Anzahl von Ecken, Kanten und 2-Seiten der Mf gebracht, insbesondere untere Schranken und damit sog. minimale Realisierungen von Mf (wie beim Czaszarschen Torus). Modelle (Schlegeldiagramme) dienen der geometrischen Erläuterung und der didaktischen Erbauung.

T.ZAMFIRESCU: Reaching a fixed point in a convex body

A certain iteration method was given by Krasnosel'skii and improved by several other people, for computing a fixed point of a continuous mapping T from a convex body into itself under some additional conditions. Among these conditions an important one is that T be non-expansive. Marsabò gave in 1974 a theorem containing several previous improvements of Krasnosel'skii's result. My talk presents two theorems improving in a certain direction Marsabò's results.

Ch. Schulz (Mainz)