MATHEMATISCHES FORSCHUNDINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 2 /1977

Modelltheorie

(Anwendungen der Modelltheorie auf die Zahlentheorie)

9.1. bis 15.1.1977

Die Modelltheorietagung wurde in diesem Jahr von Herrn K. Potthoff und Herrn A. Prestel geleitet. Hauptthema der Vorträge waren Anwendungen der Modelltheorie auf die Zahlentheorie und die Theorie der Diophantischen Gleichungen.

Teilnehmer

G. Altmann, Kiel

W. Baur, Zürich

E. Becker, Essen

L. Bröcker, Münster

L. v. d. Dries, Utrecht

U. Ehlers, Kiel

U. Felgner, Tübingen

W. Felscher, Tübingen

U. Friedrichsdorf, Konstanz

F. Halter-Koch, Essen

H. Heinen, Köln

H. Hesse, Hannover

M. Jarden, Tel-Aviv

E. Kani, Heidelberg

U. Kiehne, Princeton

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

N. Klingen, Köln

M. Knebusch, Regensburg

E. Köpping, Köln

B. Koppelberg, Berlin

W. Lange, Wuppertal

W. Meyer, Bonn

R. Perlis, Bonn

H. Pfeuffer, Mainz

A. Pfister, Mainz

P. Plesken, Aachen

P. Podewski, Hannover

K. Potthoff, Kiel

A. Prestel, Konstanz

R. Reineke, Hannover

M. Richter, Aachen

K. Schmidt, Kiel

P. Schmidt, Heidelberg

B. Schuppar, Dortmund

W. Schwarz, Frankfurt

E.J. Thiele, Berlin

T.v.d. Twer, Bonn

H. Vogel, Münster

H. Volger, Tübingen

V. Weispfennig, Heidelberg

M. Ziegler, Berlin

Vortragsauszüge

A.Prestel: Ultraprodukte - Enlargements

In diesem Vortrag wurden die modelltheoretischen Grundbegriffe erläutert, die zum Verständnis der Robinson - Roquette - Arbeit über "On the Finiteness Theorem of Siegel and Mahler Concerning Diophantine Equations" notwendig sind. Der Durcharbeitung dieser Arbeit war die erste Hälfte dieser Tagung gewidmet.

N.Klingen: Algebraische Zahl - und Funktionen - körper

Es wurde eine Einführung in die Grundbegriffe der Theorie der algebraischen Zahl - und Funktionenkörper gegeben, soweit sie für die folgenden Vorträge über den nicht - standard Beweis des Siegel - Mahlerschen Satzes benötigt wurden.

V.Weispfennig: Divisoren in einem Enlargement eines algebraischen Zahlkörpers

Es wurden einige grundlegende Eigenschaften von internen nonstandard Divisoren in einem Enlargement $\mathfrak{K}^*$ eines algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}$ nach §3 der Arbeit von Robinson - Roquette vorgetragen.

M.Ziegler: Funktionenkörper im Enlargement des Konstantenkörpers (§ 4 der Arbeit von Robinson und Roquette)

K Zahlkörper, $F|K$ Funktionenkörper, K^* Enlargement. V die Menge der Primdivisoren von K. (1) F in K^* einbettbar $\Leftrightarrow$ F hat unendlich viele Primdivisoren vom Grad 1. (2) Jede Primstelle von $F \subset K^*$ wird von einem $\mathfrak{P} \in V$ induziert. (3) Die Divisorengruppe D von F läßt sich eindeutig in D^*/D_{fin} (D Divisorengruppe, $D_{fin} \subset D^*$ die von D erzeugte isolierte Untergruppe) einbetten, wobei Hauptdivisoren in Hauptdivisoren abgebildet werden.

(4) Für alle $A,B \in D$ ist $\frac{\deg A}{\deg B} \simeq \frac{\sigma(A)}{\sigma(B)}$ ($\sigma(A)$ = "size" von A in D^*, "$\simeq$" unendlich nahe).

U.Friedrichsdorf: Ausnahmedivisoren

Es wurde nach der Arbeit Robinson - Roquette gezeigt, daß es nur endlich viele Ausnahmedivisoren gibt. Unter Benutzung der Abschätzung für die Anzahl der Ausnahmedivisoren wurde gezeigt, daß im elliptischen und hyperelliptischen Fall keine Ausnahmedivisoren existieren.

E.Kani: Der Satz von Mordell - Weil via Methoden der nonstandard Analysis

Für einen Funktionenkörper F einer Variablen über einem Zahlkörper K besagt bekanntlich der

Satz von Mordell-Weil, daß die Gruppe $C^{\circ}_{F/K}$ der Divisorenklassen 0-ten Grades endlich erzeugt ist. Anschließend an die Methoden von Robinson-Roquette wurde ein nonstandard Beweis dafür gegeben (genauer: angedeutet), indem man ein Analogon des aus der algebraischen Geometrie bekannten Satzes von Castelnuovo-Severi (welcher bei dem Beweis der Riemann'schen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper sowie beim Beweis der zweiten Siegel'schen Ungleichung sowie in der allgemeinen Theorie der abelschen Varietäten eine wesentliche Rolle spielt) für den "Doppelkörper" FK (K nonstandard Modell von K) benützt.

A. Pfister: Historische Bemerkungen über diophantische Gleichungen

Es wurden die wichtigsten Schritte in der Entwicklung der Theorie der diophantischen Gleichungen aufgezeigt, wie sie etwa durch die Namen Pythagoras, Diophant, Fermat, Lagrange, Gauß, Thue, Mordell, Siegel, A. Weil, und A. Baker stichwortartig beschrieben werden kann. Für die Thue-Gleichung $f(x,y)=a$ und die hyperelliptische Gleichung $y^2=f(x)$ wurden die klassischen Beweise für die Endlichkeit ganzzahliger Lösungen skizziert und der Zusammenhang mit diophantischen Approximationen und dem Satz von Thue-Siegel-Roth aufgezeigt.

G.Hesse: <u>Algebraische Eigenschaften von Körpern von endlichem Korang</u>

Zur Vorbereitung der Jarden/Kiehne-Arbeit "The Elementary Theory of Algebraic Fields of Finite Corank" wurden folgende Sätze bewiesen:

(*) Ist k ein abzählbarer Hilbertkörper, so gilt für fast alle $\vec{\sigma} \in G(k_s/k)^e$: Jede nichtleere absolut irreduzible Varietät, definiert über $k_s(\vec{\sigma})$, hat einen $k_s(\vec{\sigma})$-rationalen Punkt.

(**) Ist k ein Hilbertkörper, so ist für fast alle $\vec{\sigma} \in G(k_s/k)^e$ die von $\sigma_1,\ldots,\sigma_e$ erzeugte abgeschlossene Untergruppe $\langle\vec{\sigma}\rangle$ die freie von e Elementen erzeugte profinite Gruppe $\tilde{F}_e$.

W.Bauer: <u>Elementare Theorie der Körper von endlichem Korang I</u>

Es wurde der erste Teil der Jarden-Kiehne-Arbeit vorgetragen. Ein perfekter Körper F heißt ein Ax-körper, falls jede über F definierte, nichtleere, absolut irreduzible Varietät einen F-rationalen Punkt hat. Es wurde gezeigt: Sind E, F Ax-körper, $k \subsetneq E \cap F$, $\bar{k} \cap E = \bar{k} \cap F$ ($\bar{k}$=algebraischer Abschluß von k) und ist $G(\bar{E}/E) = G(\bar{F}/F) = \tilde{F}_e$ ($\tilde{F}_e$ = freie profinite Gruppe mit e Erzeugenden), dann sind E, F über k elementar äquivalent.

U.Kiehne: <u>Elementare Theorie der Körper von endlichem Korang II</u>

Es wurde mit Hilfe der in den Vorträgen von Hesse und Bauer bewiesenen Sätze die elementare Theorie von fast allen Fixkörpern $\overline{\mathbb{Q}}(\vec{\sigma})$, $\vec{\sigma} \in G(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})^e$, e feste natürliche Zahl, behandelt. Die Modelle dieser Theorie sind genau die Ax-Körper mit freier profiniter Galoisgruppe vom Rang e. Ferner ist die Theorie entscheidbar. Für die Aussagen in einer Variablen wurde ein primitiv-rekursives Verfahren angegeben.

M. Jarden: ω-free Ax Fields

In "The elementary theory of algebraic fields of finite corank" Jarden and Kiehne proved the following theorem: If e is a positive integer and Θ is an elementary statement in the field theory language, then there exists a one variable statement φ_e such that $\overline{\mathbb{Q}}(\vec{\sigma}) \models \Theta \leftrightarrow \varphi_e$ for almost all $\vec{\sigma} \in G(\overline{\mathbb{Q}})^e$. In the present talk it was shown that if $e \geq e_o(\Theta)$ then φ_e depends only on Θ and not on e. It was done by considering the theory $T_\omega(\mathbb{Q})$ of all elementary statements Θ for which there exists an e_o such that for every $e \geq e_o$ and almost all $\vec{\sigma} \in G(\overline{\mathbb{Q}})^e$: $\overline{\mathbb{Q}}(\vec{\sigma}) \models \Theta$. A list of axioms for $T_\omega(\mathbb{Q})$ was given and a recursive procedure is established.

L. van den Dries: Model theory of fields with several orderings and valuations

Let $n \in \mathbb{N}$ be given. The elementary theory of fields with n orderings, $OF(n)$, has a decidable model companion $\widetilde{OF}(n)$, whose models are the $(K,P_1,\ldots,P_n) \models OF(n)$

such that (i) $P_1 \cap \ldots \cap P_n = K^2$, (ii) $P_1,\ldots,P_n$ are independent orderings ,and (iii) for each irreducible $f(T,X) \in K[T,X]$ such that $\exists a$ $f(a,X)$ changes sign for each ordering P_i ,there exists $(c,d) \in K \times K$ $f(c,d) = 0$.If K is a countable Hilbertian field and $P_1,\ldots,P_n$ independent orderings on K,then there is $(L,Q_1,\ldots,Q_n) \supset (K,P_1,\ldots,P_n)$ with $L|K$ algebraic and $(L,Q_1,\ldots,Q_n) \models \widetilde{OF}(n)$. For two models $\mathfrak{K} = (K,P_1,\ldots,P_n)$ and $\mathfrak{L} = (L,Q_1,\ldots,Q_n)$ of $\widetilde{OF}(n)$ we have $\mathfrak{K} \equiv \mathfrak{L} \Leftrightarrow K \cap \tilde{\mathbb{Q}} \simeq L \cap \tilde{\mathbb{Q}}$.Defining for each $k \in \mathbb{N}$ the predicate W_k by $W_k(a_1,\ldots,a_k) \Leftrightarrow \exists x\ (x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0)$ in models of $\widetilde{OF}(n)$ the corresponding extension by definitions of $\widetilde{OF}(n)$ has quantifier elimination.All of the above can be generalized to fields of char. 0 endowed with a fixed number n of valuations where the valuations are required to be of a certain type,although the i-th type may differ from the j-th type for $1 \leq i < j \leq n$.

A. Prestel: <u>Modelltheorie topologischer Körper</u>

Lokale Aussagen seien Aussagen einer 2-sortigen Sprache(1.Sorte:Elemente,2.Sorte:offene Mengen einer Topologie),die ihren Wahrheitswert in einer topologischen Struktur nicht ändern,falls das System der offenen Mengen (als Variationsbereich der Variablen 2.Sorte) durch eine Basis dieser Topologie ersetzt wird.(Beispiele:Stetigkeit,Hausdorff,Approximation)

Es wurde (mit modelltheoretischen Hilfsmitteln) ein Approximationssatz für V-Topologien bewiesen. Weiter wurde eine topologische Variante des Henselschen Lemmas angegeben. Schließlich wurde gezeigt, daß henselsche Topologien in gewisser Weise ausgezeichnet sind.

K. Schmidt (Kiel)

Gefördert durch
DFG Deutsche
Forschungsgemeinschaft