Math. Forschungsinstitut
Oberwolfach
E 20 /01536

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 6/1977

Nichtkommutative Arithmetik und ganzzahlige Darstellung endlicher Gruppen

6.2. bis 12.2.1977

Die Tagung stand unter der Leitung von K.W.Roggenkamp (Stuttgart).

Die Darstellungstheorie von Ordnungen und Gruppen hat in den letzten zehn Jahren erhebliche Fortschritte gemacht. Insbesondere ist es gelungen, Formeln für Gitter im gleichen Geschlecht aufzustellen und die kommutativen Ordnungen von endlichem Gittertyp zu bestimmen. Durch diese Fortschritte haben auch die Anwendungen der Darstellungstheorie, z.B. in der algebraischen Zahlentheorie und in der Theorie der Gruppenerweiterungen mit abel'schem Kern profitiert.

Auf der Tagung waren auch Nichtspezialisten anwesend, die sich in das Gebiet einarbeiten oder einen Überblick über die neueren Ergebnisse erhalten wollten. Für sie - aber ebenso für die Spezialisten, denn das Gebiet hat sich so reichhaltig ausgedehnt, daß auch die meisten Spezialisten es nicht bis in alle Einzelheiten übersehen - wurden Übersichtsvorträge über die folgenden Gebiete gehalten:

Nichtkommutative Arithmetik und Genera [6]

Klassengruppen [11], [3]

Moderne Induktionstheorie [1]

Das Isomorphieproblem bei endlichen Gruppen [16]

Relationenmoduln [4]

Polyzyklische Gruppen [15]

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

Bei den Spezialvorträgen standen im wesentlichen die folgenden Aspekte im Vordergrund

A) Bestimmung unzerlegbarer Moduln

Hier erscheinen die folgenden Ergebnisse von Wichtigkeit:

1. Ein neuer Beweis für die Bestimmung der kommutativen Ordnungen von endlichem Typ [12].
2. Die Bestimmung der Ordnungen von endlichem Typ in nichthalbeinfachen Algebren [13].
3. Anwendungen von "Almost split sequences" für die Bestimmung des endlichen Gittertyps bei Gorenstein-Ordnungen [18].
4. Einen Algorithmus, um die absolut irreduziblen Gitter - auf der Maschine - zu berechnen mit Anwendung auf $GL(n,\mathbb{Z})$ [9].
5. Eine Konstruktion, die jedem bewerteten Graphen einer Ordnung zuordnet, so daß die Darstellung des Graphen in einer konstruierbaren Bijektion mit den unzerlegbaren Gittern stehen [14].

B) Bestimmung der Genera lokalfreier Moduln; i.e.Klassengruppen

Hier seien die folgenden Ergebnisse erwähnt:

1. Bei Ordnungen von endlicher globaler Dimension stimmt die Klassengruppe mit der Klassengruppe einer darüber liegenden maximalen Ordnung überein, falls die Eichler-Bedingung erfüllt ist [7], für Ordnungen von globaler Dimension 2 wurden Beispiele - konstruiert durch Graphen - gegeben [14].
2. Ein analoges Resultat gilt für die Klassengruppe der Projektion gewisser Gruppenringe auf eine einfache zu einer monomialen Darstellung gehörigen Komponente [20].
3. Für zahme Erweiterungen wurde die Galoismodulstruktur einiger Ringe algebraisch ganzer Zahlen in der Klassengruppe bestimmt durch genaue Analyse Artinscher L-Funktionen und verallgemeinerter Gaußsummen [3].

C) Anwendung auf die Gruppentheorie

Wichtige Resultate hier sind:

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

1. Einige Ergebnisse über die lokale und globale Äquivalenz von ganzzahligen Darstellungen, die von transitiven Permutationsdarstellungen induziert sind. Hier ist von besonderem Interesse -im Zusammenhang mit dem Isomorphieproblem -ein Beispiel zweier nicht äquivalenter transitiver Permutuationsdarstellungen, die isomorphe ganzzahlige Darstellungen induzieren [19].
2. Für $PSL(2,p)$ $p > 5$ sind minimale Relationenmoduln isomorph; es wurde über Beispiele von Sieradski-Dyer berichtet, bei denen es nicht isomorphe minimale Relationenmoduln gibt [21].

D) Für weitere Anwendungen der Ordnungen sind als wesentlich zu bemerken:
Eine Klassifizierung der minimalen Modelle von arithmetischen Flächen durch Isomorphietypen maximaler Ordnungen in Quaternionenalgebren [2] und eine Beschreibung der Galoismodulstruktur der Einheitengruppe für metazyklische Gruppen der Ordnung pm, p eine ungerade Primzahl und $m \mid (p-1)$ [5].

Weitere Vorträge beschäftigten sich mit SL_2 über komplex quadratischen Zahlkörpern [8], zentraler Multiplikation in der Kohomologie [17], einer nicht kommutativen Verallgemeinerung von Krullringen [10] und einer Verallgemeinerung der Steinberg-Gruppen auf Algebren über Körpern [20].

Neben abendlicher eifriger Benutzung des - leider schlecht gelüfteten - Tischtennisraumes und des Billardtisches fanden sich immer wieder Diskussionsgruppen, die versuchten, Ergebnisse aus den Vorträgen zu verbessern oder anstehende Probeme zu lösen. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, nach dem Vortrag [7] am Freitag Nachmittag existierte am Sonnabend Morgen ein Beweis des Resultates ohne Benutzung der Eichler Bedingung.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Mit großem Bedauern muß ich berichten, daß trotz der Grundlagenverträge und der Schlußakte von Helsinki die offiziellen sowjetischen Stellen die eingeladenen russischen Kollegen nicht ausreisen ließen, obwohl diese wesentlich zur modernen Entwicklung der Darstellungstheorie beigetragen haben und sehr interessiert waren, an der Tagung teilzunehmen.

Klaus Roggenkamp

Teilnehmer

Baer, R., Zürich
Bak, A., Bielefeld
Becker, H.E., Stuttgart
Behr, H., Frankfurt
Benz, H., Köln
Bieri, R., Freiburg
Brzezinski, J., Göteborg
Fein, B., z.Z.Stuttgart
Fröhlich, A., London
Gabriel, P., Zürich
Green, J.A., Coventry
Gruenberg, K.W., London
Halter-Koch, F., Essen
Iffland, K., Stuttgart
Ischebeck, F. Münster
Jakobinski, H. Göteborg
Keating, M.E., London
Kegel, O.H., Freiburg
Kimmerle, W., Stuttgart
Lorenz, F., Münster
Mennicke, J., Bielefeld
Michler, G., Giessen
Ojanguren, M., Münster
Pahlings, H., Giessen
Plesken, W., Aachen
Rehm, H.P., Karlsruhe
Reiner, L., Urbana
Ringel, C.M., Bonn
Ritter, J. Heidelberg
Roggenkamp, K.W., Stuttgart
Roseblade, J.E., Cambridge
Sandling, R., Manchester
Scharlau, W., Münster
Schmid, P., Tübingen
Schmidt, J., Stuttgart
Scott, L.L., Charlottesville
Segal, D., z.Z.Bielefeld
Stammbach, U., Zürich
Strooker, J.R., Utrecht
Stümke, B.U., Stuttgart
Williams, J., Kenosha
Wilson, S.M.J., Durham

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Vortragsauszüge

A.BAK: An introduction to modern induction theory

The theme of the lecture was to give an introduction to the modern induction principles of Swan-Lam-Dress. If F is a functor from ((category of finite groups)) $\rightarrow$ ((category of abelian groups)) and if π is a finite group then a machine called induction was described which computes for certain F the group $F(\pi)$ in terms of groups $F(\gamma)$, for certain subgroups γ of π, for example hyperelementary subgroups γ of π. Specific functors, such as $K_o(Z\pi)$, which satisfy the induction machine were exhibited.

J.BRZEZINSKI: Arithmetic surfaces and orders

By an (affine) arithmetic surface we mean Spec(A) where A is a domain of Krull dimension 2 (e.g. $A = Z[X]$). Let R be a Dedekind ring of char. $\neq 2$, K its field of fractions and $f(X_o,X_1,X_2)$ an irreducible ternary quadratic form over R. Then the scheme $\mathrm{Proj}(R[X_o,X_1,X_2]/(f)$ is a projective arithmetic surface over Spec(R). The field of rational functions on this scheme is an extension of genus 0 of K and it is well-known that such extensions can be classified by quaternion algebras over K. Every irreducible quadratic form f (or generally, an R-lattice on a quadratic ternary space over K) which has the given field L as a field of rational functions defines an R-order in the quaternion algebra corresponding to L. There are very close relations between these orders, quadratic forms (lattices) and the corresponding geometrical objects, for example, the relatively minimal models of L can be classified by the isomorphism classes of maximal orders in the corresponding

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

quaternion algebra. Some geometrical results give some results concerning orders, which, maybe, can be obtained directly.

A.FRÖHLICH: Arithmetic applications of classgroups

A survey was given of recent results connecting the Galois module structure of rings of algebraic integers for tame extensions with the functional equations of Artin L-functions, based on the recent paper in the 150^{th} year Jubilee volume in Crelle (J.reine u.angew.Math. 286/7 (1976), p.380-440).

K.GRUENBERG: Applications of integral representations to presentations of groups

The abelian extensions of a group G can be studied via the module extensions by the augmentation ideal $\mathfrak{g}$. If K is a commutative ring, the appropriate categories $(\frac{KG}{})$, $(\frac{K\mathfrak{g}}{})$ are equivalent. The lecture surveyed recent work on the projective objects in these categories and in particular the following problems were discussed: 1) comparison problems; 2) decomposition problems; 3) generation problems.
Reference: CBMS booklet # 25.

F.HALTER-KOCH: Unit-theory for metacyclic extensions of algebraic number fields

Sei $K|k_o$ eine galois'sche Erweiterung algebraischer Zahlkörper mit Gruppe $G = \langle\sigma,\tau \mid \sigma^p = \tau^m = 1, \sigma^\tau = \sigma^r\rangle$ mit p prim, $p \neq 2$, $m|p-1$, $\operatorname{ord}_p(r) = m$, $k = \operatorname{fix}(\sigma)$, $L = \operatorname{fix}(\tau)$. Ist U_* die Einheitengruppe von $*$, so läßt sich $U_K/U_k \cdot U_L \cdot U_{L^\sigma} \cdot \ldots \cdot U_{L^{\sigma^{p-1}}} = U_K/U_k \cdot \prod_{v=o}^{m-1} U_v$ mit Hilfe ganzzahliger Darstellungen von G

studieren. Betrachte dazu $X_{K/k} = U_K/\{\varepsilon\in U_K \mid \varepsilon^p\in k\}$ und studiere $X_K/\prod_{\nu=0}^{m-1} X_{L^{\sigma^\nu}/k_0}$; $X_{K/k}$ ist ein $\mathbb{Z}G/(1+\sigma+\ldots+\sigma^{p-1})$-Gitter, also nach Galovich-Reiner-Ullom (1972) isomorph zu $\bigoplus_{i=1}^{s}(1-\zeta)^{\varepsilon_i}\mathfrak{a}_i R$

($\zeta=\zeta_p, R = \mathbb{Z}[\zeta],\ \mathfrak{a}_i \lhd R_0 = R^{\langle\tau\rangle},\ 0\le\varepsilon_i<m$) ; die dabei auftretenden "Invarianten" ε_i lassen sich durch Einheitennormen und ambige Hauptideale von K/k beschreiben.

H.JACOBINSKI: Nicht-kommutative Arithmetik und Genera

Dies war ein Übersichtsvortrag, der auch Nichtspezialisten einigermaßen verständlich sein sollte. Er umfaßte eine Übersicht über die klassische Theorie der Maximalordnungen in einer halbeinfachen Algebra in Bezug auf einen Dedekind-Ring, wo der Grundkörper ein algebraischer Zahlkörper ist. Dies wurde dann zur Bestimmung der Isomorphieklassen in einem Genus von Gittern benutzt. Der letzte Teil behandelte dann konkretere Anwendungen auf ganzzahlige Darstellungen (Kürzung, lokale Bilder - globale Bilder).

H.JACOBINSKI: Gitter von endlicher homologischer Dimension

Sei $\mathfrak{o}$ ein Dedekindring, R eine $\mathfrak{o}$-Ordnung in einer halbeinfachen Algebra über k, k der Quotientenkörper von $\mathfrak{o}$; wir setzen $(k:\mathbb{Q}) < \infty$ voraus. Der folgende Satz wurde bewiesen:
Satz: Sei F ein freies R-Gitter, welches die Eichler-Bedingung erfüllt und X ein R-Gitter mit endlicher homologischer Dimension. Ist dann M ein R-Gitter mit $F\oplus X \cong M\oplus X$, so folgt $F\cong M$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

Daraus ergibt sich

Korollar: Hat die Ordnung R endliche globale Dimension, so ist die lokal-freie Klassengruppe von R isomorph zu der entsprechenden Gruppe einer Maximalordnung.

Dies folgt aus dem obigen Satz, wenn man für X die Maximalordnung, aufgefaßt als R-Linksmodul, nimmt.

J.MENNICKE: SL_2 über komplex-quadratischen Zahlkörpern

Hecke und Eichler haben die Darstellungen von $PSL_2(p)$ studiert, die aus $SL_2(\mathbb{Z})$ durch Reduktion mod p entstehen. Mit Hilfe der Spurformel leitet Eichler Formeln für die Multiplizitäten ab, in die in gewissen Fällen Klassenzahlen eingehen. Berichtet wurde über einen Versuch, entsprechende Multiplizitäten für $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ zu berechnen. Die bisherige Arbeit deutet darauf hin, daß in diesem Fall arithmetische Eigenschaften von $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ in die Multiplizitäten eingehen, z.B. die Frage, ob die verzweigte Primzahl diese Gruppe ganz oder "fast ganz" erzeugt.

W.PLESKEN: Integral classes of rationally equivalent representations

Let H be an R-order in the semi-simple K-algebra KH where R is a Dedekind domain and K is the quotient field of R. We are concerned with the problem how to find a set of representatives of the R-classes of H-representation modules which lie in the K-class of a given module M. In case M is absolutely irreducible the methods are easy to describe and lead to a fast algorithm to compute such sets of representatives. This algorithm is applied to find the maximal finite absolutely

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

irreducible subgroups of $GL(n,Z)$ for $n = 5,6,7,9,11$. We also gain some insight into the structure of the lattice of submodules of M. A characterization of the case where this lattice is distributive is achieved. We extend the methods to the case where M is reducible and prove a generalization of Maschke's Theorem.

H.P.REHM: Divisorial ideals in noncommutative rings

Es seien E,R Ringe mit Einselement $1 \in E \subseteq R$. Wir nennen (E,R) ein Krullpaar, wenn (i) E maximal in seiner Asano'schen Klasse ist, (ii) eine Noetherbedingung für divisoriellezweiseitige Ideale erfüllt, (iii) beschränkt in Asanos Sinn ist. (Ein Ideal A von E heißt divisoriell, wenn $A \cap R^x \neq \emptyset$ und $(A^{-1})^{-1} = A$ ist.) Das "symbolische" Produkt zweier additiver Untergruppen wird als $A * B \simeq ((AB)^{-1})^{-1}$ definiert. Mit dieser symbolischen Multiplikation erhält man ein Brandtgruppoid divisorieller Moduln, das dem "Gruppoid normaler gebrochener Ideale" der klassischen nichtkommutativen Arithmetik entspricht. Die kommutative Spezialisierung dieser Begriffe ist mit den gewöhnlichen Krullringen (Gruppe divisorieller Ideale) identisch, Asanos Idealtheorie ist eine Art "Dimension 1"-Spezialfall.

I. REINER: Class groups and Picard groups of group rings and orders

Let R be a Dedekind ring, and Λ an R-order in a semisimple algebra. This lecture surveyed old and new results on the Grothendieck group $G_0(\Lambda)$, the projective class group $K_0(\Lambda)$, and the central Picard group $\mathrm{Picent}(\Lambda)$. The discus-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

sion includes: brief description of K_1 ; localization sequences for G_O, K_o, and Picent; Mayer-Vietoris sequences; the locally free class group $Cl(\Lambda)$ and subgroups thereof. Special emphasis was placed on the case where Λ is an integral group ring.

Reference: CBMS booklet # 26.

I. REINER: Integral representations and diagrams (joint work with E.L.Green)

Let $\mathfrak{L}(\Lambda)$ be the category of lattices over an order Λ. The question, as to wether $\mathfrak{L}(\Lambda)$ is of finite type, is reduced to a corresponding problem for the category $\mathfrak{A}(\Delta,\Gamma)$. Here, Δ, Γ are artinian rings, and the objects are triples (X,Y,f) with $X \in \mathbb{P}(\Delta)$, $Y \in \mathbb{P}(\Gamma)$, $f \in \mathrm{Hom}_\Delta(X,Y)$, $Y = \Gamma\cdot f(X)$, $\ker f \subset (\mathrm{rad}\,\Delta)X$, where $\mathbb{P}(\ )$ denotes the category of f.g. projectives. In the case where Λ is a commutative order over a local ring, the study of $\mathfrak{A}(\Delta,\Gamma)$ reduces to a matrix problem. This problem can be solved, and so a new proof is obtained for the finiteness theorems (of representation type) of Jacobinski and Drozd-Roiter.

C.M. RINGEL: Orders of bounded lattice type (joint work with K.W.Roggenkamp)

Let R be a discrete valuation ring, and K its quotient field. Let Λ be an R-order in a finite dimensional K-algebra A. Then A is said to be of bounded lattice type, provided the rank of the indecomposable Λ-lattices are bounded.

Theorem: Assume A is twosided indecomposable, and $\mathrm{rad}(A) \neq 0$. Then Λ is of bounded lattice type if and only if A is serial, $(\mathrm{rad}A)^2 = 0$, and $\Lambda/\mathrm{nil}(\Lambda)$ is a hereditary order. One should

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

remark that in this situation Λ is never of finite representation type.

K.W. ROGGENKAMP: Indecomposable representations and Dynkin diagrams (joint work with C.M.Ringel)

Let R be a complete valuation ring with field of quotients K and residue field k. Λ is an R-order in the separable K-algebra A.

Theorem I: (i) If Λ is of infinite lattice type, then there exist indecomposable lattices $\{M_{o\lambda}\}$, where λ runs over the irreducible polynomials in $k[X]$, and for every λ there exists an infinite chain of indecomposable lattices $M_{o\lambda} \subset M_{1\lambda} \subset \dots \subset M_{i\lambda} \subset M_{i+1\ \lambda} \subset \dots$ such that $M_{i+1\ \lambda}/M_{i\lambda} \simeq M_{o\lambda}$.

(ii) Λ is of infinite lattice type iff there exists an indecomposable Λ-module, which is R-projective, but not finitely generated.

We call Λ a Bäckström order provided there exists a hereditary R-order Γ such that $\Lambda \subseteq \Gamma$ and $\mathrm{rad}\Lambda = \mathrm{rad}\Gamma$. For any Bäckström order Λ, we introduce a valued graph in the following way: Let $\Lambda \subseteq \Gamma$, with Γ hereditary, and $J = \mathrm{rad}\Lambda = \mathrm{rad}\Gamma$. By Morita-equivalence, we may suppose $\Lambda/J = \prod_{i=1}^{s} (F_i)_{n_i}$ and $\Gamma/J = \prod_{i=s+1}^{t} (F_i)_{n_i}$ where F_i are skew fields $1 \le i \le t$, and $(F)_n$ denotes the full nxn-matrix ring over F. Note that for later purposes we denote the various skew fields by F_i, the index ranging from 1 to t. For $s+1 \le j \le t$, let S_j be a simple Γ/J-module with endomorphism ring F_j, and we denote by ${}_iS_j$ the F_i-F_j-bimodule ${}_iS_j = F_i \otimes_\Lambda S_j$, where $1 \le i \le s$, $s+1 \le j \le t$, and by $d_{ij} = \dim_{F_i}({}_iS_j)$, $d'_{ij} = \dim({}_iS_j)_{F_j}$ the resp. two dimensions of ${}_iS_j$. For $i>s$, and for $j<s$, we put $d_{ij} = d'_{ij} = 0$. In this way we get a valued graph G with t vertices and valuation (d_{ij}, d'_{ij}).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

<u>Theorem II:</u> Let Λ be a Bäckström order with valued graph G.
(i) $N(\Lambda)$ is finite if and only if G is a Dynkin diagram, and, in this case, the elements of $N(\Lambda)$ correspond bijectively to the non-simple positive roots of G .
(ii) If G is an extended Dynkin diagram, then $N(\Lambda)$ can be classified. Bäckström proved part (i) under the assumption that the residue field k of R is finite and that all $F_i = k$ (note that in this case only the Dynkin diagrams A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 can occur), without, however, constructing the indecomposable representations explicitely. The reduction method, on the other hand, allows an actual classification of all indecomposable representations in both cases (i) and (ii).

Assume $A = (K)_n$ and assume $\Lambda \supset (\pi)_n$.

<u>Theorem III:</u> Let $\Lambda/(\pi)_n$ be a hereditary k-algebra. $\mathrm{gl.dim}\Lambda \leq 2$ $\Leftrightarrow$ either $(R)_n$ is an injective Λ-lattice or a projective Λ-lattice.

J.E. ROSEBLADE: <u>Prime ideals in certain group rings</u>

A survey of recent results of Brewster and me was given. These all concerned the prime ideal structure of group rings kG of polycyclic groups G over commutative Noetherian rings k. Good descriptions of the prime structure were given for orbitally sound groups G, and theorems concerning prime length, primitve length, primitivity and so on were deduced for arbitrary G.

R. SANDLING: <u>Survey of the isomorphism problem for group rings</u>

Let R be commutative with unit, G finite. The isomorphism problem asks whether the group ring RG determines G. In general the answer is no: If G and H are abelian

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

of the same order, it is easy to see that $\mathbb{C}G \approx \mathbb{C}H$; there are two groups (metabelian) whose grouprings over <u>any</u> field are isomorphic (Dade).
Most attention has focussed on the cases $R = \mathbb{Z}$, and R a field of characteristic p with G a p-group. Here no negative answer is known. Among the positive results: $\mathbb{Z}G$ determines: The lattice of normal subgroups of G (Passman, J.Cohn and Livingstone, Sehgal); commutator subgroups $[N,M]$ of normal subgroups N,M (Whitcomb, Sandling); abelian sections of G as G-modules (Sehgal, Obayashi, Sandling) and so the derived (Sehgal), upper central (Coleman) and lower central (Passman) series and their factors; and other factors of G as well.
$\mathbb{Z}G$ determines G if G is: Abelian (Higman, Perlis and Walker, P.M.Cohn); metabelian (Whitcomb, Jackson, Obayashi); p-group of order $\leq p^6$ (Passman, Cohn and Livingstone); a group of all quasi-regular elements of a ring (Sandling) such as general linear groups (a consequence of the method is the fact that any abelian group (i.e. possibly infinite) is a direct factor of the unit group of $\mathbb{Z}G$).
There are a few results over finite fields (Deskins, Passman, Holvoet, Jeyakuman, Miah, etc.) .
Some work has been done for infinite groups (Berman, May, Ziegenbalg etc.).

P. SCHMID: <u>Central multiplication in cohomology</u>

Suppose G is a group and A is a (right) G-module. If z is any element in the centre of $\mathbb{Z}G$, $a \mapsto az$ is a G-endomorphism of A. We are interested in such multiplications producing only zero maps in (co-) homology. For instance, let $z = x-1$ for some x in the centre of G. Then $az = [a,x]$ and so this is obviously true (check dimensions 0 and use dimension-shifting). Or let G be finite and $z = |G|$; then, as is well known,

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

z kills all Tate cohomology groups (check again dimension 0: $\hat{H}^0(G,A) = A^G/A^{\sigma}$ and so $|G|(A^G) = (A^G)^{\sigma} \subseteq A^{\sigma})$. If it turns out that the module morphism $a \mapsto az$ is non-trivial in some sense (e.g. an automorphism), then one will obtain vanishing theorems. In fact, most of the"classical" splitting theorems (Maschke, Schur-Zassenhaus, Higman-Carter-Hawkes etc.) may be considered from this point of view. Some further applications are given, dealing with nilpotent and linear groups.

J. SCHMIDT: Almost split sequences

Let Λ be a complete R-order in the semi-simple k-algebra A. Then there exists for each non-projective indecomposable Λ-lattice M a unique 'almost split sequence'

$$0 \to N \to E \to M \to 0$$. [Roggenkamp-Schmidt, Auslander] .

Here we study the middle term of almost split sequences by so called irreducible morphisms; thus we obtain the result: If for some indecomposable projective $P : P|E$, then $N|\operatorname{rad} P$ and conversely if $N|\operatorname{rad} P$ then the a.s.s. $0 \to N \to E \to M \to 0$ has P as direct summand of the middle term E. This we use to prove the following theorem: Let Λ be indecomposable and Gorenstein and $\operatorname{rad}\Lambda$ decomposes. Then either (i) $\operatorname{rad}\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ gives a complete description of all non-isomorphic indecomposable non-projective lattices or (ii) Λ is of infinite representation type.

L.L. SCOTT: Integral equivalence of permutation representations

An example is given of a finite group G and inequivalent transitive permutation representations on sets Ω, Ω' for which the associated permutation modules $\mathbb{Z}\Omega$, $\mathbb{Z}\Omega'$ for $\mathbb{Z}G$ are iso-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

morphic. The group G is $PSL(2,29)$ and $\Omega = G/H$, $\Omega' = G/H'$ where $H \approx H \approx \mathfrak{A}_5$, the alternating group on 5-letters. The isomorphism $\mathbb{Z}\Omega \to \mathbb{Z}\Omega'$ is described on $\alpha \in \Omega$ by $\alpha \mapsto \underline{\Delta(\alpha)} - \underline{\Gamma(\alpha)}$ where $\underline{\Delta(\alpha)}$, $\underline{\Gamma(\alpha)}$ denote the sums of the elements in the unique orbits of G_α in Ω' having lengths 5,6 respectively. The methods involved in searching for and verifying this example were discussed and some positive results were given. For example, when the permutation character of G on Ω is multiplicity-free with rational-valued constituents, then indeed $\mathbb{Z}\Omega \approx \mathbb{Z}\Omega' \Rightarrow \Omega \approx \Omega'$. Also, if G is 2-transitive or rank 3, then if $\mathbb{Z}\Omega, \mathbb{Z}\Omega'$ are in the same genus, then $\Omega \approx \Omega'$. A general simple sufficient condition that $\mathbb{Z}\Omega$, $\mathbb{Z}\Omega'$ be in the same genus is that $\Omega_P \approx \Omega'_P$ as $N_G(P)$ sets for all p-subgroups $P \neq 1$ of G; here Ω_P denotes the fixedpoint set of P in Ω.

J.R. STROOKER: Ein nichttrivialer Schurscher Multiplikator und eine modulare Darstellung der binären Ikosaedergruppe

Eine Gruppe G heißt perfekt, falls $G = [G,G]$, also $H_1(G)=0$. Eine perfekte Gruppe besitzt eine bis auf Isomorphie bestimmte universelle zentrale Überlagerung $\rho: \hat{G} \to G$. Sie ist dadurch charakterisiert, daß ρ eine zentrale Überlagerung ist, und daß $\hat{G}$ perfekt und zentral geschlossen ist $(H_2(G) = 0)$ (Kervaire, Milnor). Der Kern von ρ ist dann der Schursche Multiplikator $H_2(G)$ von G.

Falls $G = SL(n,K)$, K ein Körper, definiert man nach R. Steinberg mit Erzeugenden und Relationen eine abstr. Gruppe $ST(n,K)$ und einen Epimorphismus $\rho: ST(n,K) \to SL(n,K)$. Ein klassisches Ergebnis Steinbergs ist, daß ρ eine universelle zentrale Überlagerung ist mit Ausnahmen für $n = 2$ und $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_9$ und für $n \geq 3$ und $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

Hier wird das durchgeführt im Falle einer beliebigen Algebra A über K. Es wird gezeigt, daß die entsprechende Steinberggruppe $ST(n,A)$ perfekt und zentral geschlossen ist mit den gleichen Ausnahmekörpern. Nur soll man für $n = 2$ noch dazu rechnen $\mathbb{F}_5$: Es gibt dann eine Algebra A, wofür $ST(n,A) = SL(n,A)$ einen nichttrivialen Schurschen Multiplikator besitzt.
Beim Beweis wird eine modulare Darstellung der binären Ikosaedergruppe benützt.

J.S. WILLIAMS: Minimal relation modules and non-cancellation in stable isomorphism classes of minimal relation modules

Methods are derived for which the trace ideal of a minimal relation module can be easily calculated. This gives examples, e.g. $PSL(2,p)$ $p\geq 5$, of groups for which minimal relation modules are unique. Further, results of Sieradski and Dyer are used to define a surjection, under suitable conditions, from the set of isomorphism classes of minimal relation modules onto the group of units of $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ modulo the $d(G)^*$ powers for some m defined by the trace ideal of $\overline{R}$. This provides examples; e.g. $C_p \times C_p$ $p\geq 5$, of groups for which there are non-isomorphic minimal relation modules.

S. WILSON: Kernel groups of orders associated to certain inducible monomial representations

Let G be a group and H a subgroup with an abelian character $\chi: H \to G$. Let $K = \ker\chi$ and ρ the monomial representation $\chi\uparrow_H^G$. Put $A_\rho = \rho(\mathbb{Z}G)$. A_ρ is an order in a simple algebra and $D(A_\rho)$ is a quotient of $D(\mathbb{Z}G)$. We ask $D(A_\rho) = \{0\}$?

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

If $K,H \lhd G$ then putting $C = H/K$, $\overline{G} = G/K$, $\Gamma = G/H$ we get an exact sequence $1 \to C \to \overline{G} \overset{s}{\underset{\to}{\leftarrow}} \Gamma \to 0$ and we choose a section s. This gives an action of Γ on C (which is faithful by Mackey irreducible criterion) and this transfers to an action on $\langle\eta\rangle$ (η a $|C|$-th root of 1) via the isomorphism $\chi: C \to \langle\eta\rangle$. The section s gives a 2-cocycle $\psi \in\in H^2(\Gamma,C) \overset{\chi}{\simeq} H^2(\Gamma,\langle\eta\rangle) \to$ $\to H^2(\Gamma,\mathbb{Z}[\eta]^*)$. Writing $\bar{\gamma} = \rho(s(\gamma))$, $A_\rho = \mathbb{Z}[\eta]_\psi\Gamma =$ $= \mathbb{Z}\langle\eta,\bar{\gamma} | \gamma\in\Gamma,\ \bar{\gamma}\bar{\delta} = \overline{\gamma\delta}\ \psi(\gamma,\delta),\ \eta\bar{\gamma} = \bar{\gamma}\eta^\gamma\rangle$, a crossed product algebra. We have the general <u>theorem</u> (*): "If $|K:\mathbb{Q}| < \infty$, $S = \mathrm{int}(K)$, $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(S)$, $\psi \in\in H^2(\Gamma,S^*)$ then $D(S_\psi\Gamma) = \{o\}$ " and so, in this case, $D(A_\rho) = \{o\}$. If $K \ntriangleleft G$, $D(A_\rho)$ is not always zero. M.Taylor of K.C.L. produced a case where $|D(A_\rho)|>3$ with $H = C_3 \times C_3$ and $G = H \tilde{\times} C_3$.

B.U. Stümke (Stuttgart)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©